P. A. Vel'misov, V. B. Kolmanovskii, Yu. A. Reshetnikov,
Stability of the equations of the interaction of viscoelastic plates with a fluid,
*Differ. Uravn.*, 1994, Volume 30, Number 11, 1966–1981

НОЯБРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 11

# УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*УДК 517.958:534.1*

П. А. ВЕЛЬМИСОВ, В. Б. КОЛМАНОВСКИЙ, Ю. А. РЕШЕТНИКОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН С ЖИДКОСТЬЮ

За последние десятилетия проведено большое количество исследований, посвященных устойчивости вязкоупругих тел. Представление о них можно получить из обзора [1], содержащего обширную библиографию. Механическое поведение вязкоупругих тел и элементов конструкций в значительной мере отличается от поведения упругих тел, поэтому при расчете конструкций на прочность учет вязкоупругих свойств имеет важное значение. Хорошо развитый раздел механики сплошной среды представляет теория взаимодействия упругого тела с жидкостью или газом. Достаточно полная библиография работ, посвященных этой тематике, содержится, например, в монографиях [1—5].

Настоящая работа посвящена вопросам устойчивости движения пластин с учетом как вязкоупругих свойств материала, так и взаимодействия с идеальной несжимаемой жидкостью. Принятые определения устойчивости вязкоупругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Механическое поведение материала пластин описывается моделью, согласно которой напряжение в любой точке пластины зависит от предыстории деформирования материала в данной точке, а связь между напряжением и деформацией подчиняется линейному уравнению Вольтерра—Фойхта.

Математическое решение рассматриваемых в работе задач гидровязкоупругости сводится к исследованию начально-краевых задач для систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. В работе используются два метода их решения. Первый основан на построении решения гидродинамической части задачи для потенциала скоростей (решение двумерной краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа) методами комплексного анализа. В результате исключения потенциала скоростей получены определяющие сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными для прогибов пластин. Второй метод предполагает представление гидродинамического потенциала скоростей в виде разложения по системе базисных функций с коэффициентами, зависящими от времени, и последующим выражением этих коэффициентов с помощью метода Фурье (или Галеркина) через прогибы пластин. Это опять же позволяет исключить потенциал скоростей и свести решение задач к исследованию интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для прогибов пластин. В первом случае давление жидкости и соответствующие члены определяющих уравнений выражаются через интегралы от искомых функций прогибов, во втором случае — через ряды с коэффициентами, зависящими от этих функций. Каждое из этих уравнений представляет определенный интерес. Выбор того или иного метода их получения связан как со спецификой рассматриваемых задач, так и с целью исследований. Отметим также, что определяющие уравнения получены для произвольного закрепления пластин. Исследование устойчивости основано на представлении функций прогибов в виде разложений по полным системам базисных функций (вид которых зависит от способа закрепления пластин) с коэффициентами, зависящими от времени, и построении функционалов для интегро-дифференциальных уравнений, которым эти коэффициенты удовлетворяют.

В работе рассмотрен класс задач гидровязкоупругости в случае, когда движение жидкости происходит в канале, ограниченном прямолинейными горизонтальными стенками. В одном из сечений канал перегорожен вязкоупругой пластиной, в другом — или деформируемым по заданному закону поршнем, или второй вязкоупругой пластиной. Исследуется также динамика вязкоупругой пластины-перегородки в случае, когда в одном из сечений задан закон изменения давления жидкости. Получены условия устойчивости движения пластин, налагающие ограничения на значения сжимающих усилий, ядра или меры релаксаций, коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования. В линейном приближении (для заданного вида закрепления пластин) присутствие жидкости хотя и изменяет закон движения пластин за счет появления в уравнениях дополнительных инерционных членов с присоединенными массами, но не сказывается на полученных условиях устойчивости. Показано, что гидродинамическое влияние на устойчивость проявляется при учете в уравнениях гидродинамики нелинейных членов.

Предлагаемые в работе методы решения и полученные уравнения позволяют исследовать и более общие задачи гидровязкоупругости. Так, например, в канале может быть расположено произвольное число вязкоупругих пластин-перегородок, произвольными могут быть и способы их закрепления. При этом в некоторых сечениях можно задавать закон изменения давления жидкости или закон движения поршня (в том числе прямолинейного). Задачи такого рода находят применение в практике проектирования датчиков давления с вязкоупругими элементами.

**1. Задача 1.** Пусть область течения $G^*$ ограничена слева вязкоупругой пластиной, опирающейся на основание, справа — деформируемым поршнем и двумя горизонтальными жесткими стенками $y=0$, $y=y_0$. Обозначим: $W(t,y)$ — прогиб вязкоупругой пластины, занимающей в недеформированном состоянии положение $x=0$ и опирающейся на основание, представляющее собой, например, систему упругих пружин и демпферов; $x=x_0+W^*(t,y)$ — закон движения поршня, расположенного в сечении $x=x_0>0$; $\varphi(t,x,y)$ — потенциал скоростей, описывающий движение идеальной несжимаемой жидкости в области $G^*$; $t$ — время; $x, y$ — декартовы координаты. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0,\ (x,y)\in G^*=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon W(t,y)<x<x_0+ \\ +W^*(t,y),\ 0<y<y_0\}, \tag{1.1}$$

$$\varphi_y(t,x,0)=0,\ W(t,0)<x<x_0+W^*(t,0), \tag{1.2}$$

$$\varphi_y(t,x,y_0)=0,\ W(t,y_0)<x<x_0+W^*(t,y_0), \tag{1.3}$$

$$\varphi_x-\varphi_y\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial W}{\partial t},\ x=W(t,y),\ y\in(0,y_0), \tag{1.4}$$

$$\varphi_x-\varphi_y\frac{\partial W^*}{\partial y}=\frac{\partial W^*}{\partial t},\ x=x_0+W^*(t,y),\ y\in(0,y_0), \tag{1.5}$$

$$L(w)\equiv D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-\int\limits_0^t R(t,\tau)\frac{\partial^4 W(\tau,y)}{\partial y^4}d\tau\right)+N\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+$$

$$+\beta_2\frac{\partial^5 W}{\partial y^4\partial t}+\beta_1\frac{\partial W}{\partial t}+\beta_0 W=P_0-P(t,\,W(t,y),y),\;\; y\in(0,y_0),$$
(1.6)

$$P=P_0-\rho(\varphi_t+(1/2)\varphi_x^2+(1/2)\varphi_y^2),\;\; (x,y)\in G^*, \tag{1.7}$$

где $D$ и $m$ — изгибная жесткость и погонная масса пластины; $N$ — сжимающее пластину усилие; $\beta_2$, $\beta_1$ — коэффициенты демпфирования пластины и основания соответственно; $\beta_0$ — коэффициент жесткости основания; $\rho$ — плотность жидкости; $R(t,\tau)\geqslant 0$ — ядро релаксации, учитывающее зависимость напряжения от предыстории деформирования материала [1, 6, 7]; $P$ — давление жидкости; $P_0$ — давление в покоящейся жидкости; слагаемое $\beta_2\dfrac{\partial^5 W}{\partial y^4\partial t}$ учитывает внутреннее демпфирование в материале пластины [8].

В качестве примера в дальнейшем будем рассматривать жесткое защемление концов пластины в свободно перемещающихся вдоль оси $x$ элементах, тогда граничные условия для $W(t,y)$ записываются в виде

$$\frac{\partial W}{\partial y}(t,0)=\frac{\partial W}{\partial y}(t,y_0)=0,\;\;\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}(t,0)=\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}(t,y_0)=0. \tag{1.8}$$

В силу известного свойства гармонических функций граничные значения $\varphi(t,x,y)$ должны удовлетворять условию $\int\limits_{\partial G^*}\varphi_n ds=0$, где $\varphi_n$ — производная по нормали к границе $\partial G^*$ области $G^*$. Для рассматриваемой задачи это условие принимает вид

$$\int\limits_0^{y_0}\frac{\partial W(t,y)}{\partial t}dy=\int\limits_0^{y_0}\frac{\partial W^*(t,y)}{\partial t}dy. \tag{1.9}$$

Задавая дополнительно начальные условия, получаем начально-краевую задачу для функций $\varphi(t,x,y)$, $W(t,y)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1), (1.6), краевым условиям (1.2)—(1.5), (1.8) и условиям разрешимости (1.9).

Для поставленной задачи получим уравнения линейной теории. Предполагая деформации пластин и возмущения жидкости малыми, положим

$$\varphi=\varepsilon\Phi(t,x,y),\;\; W=\varepsilon w(t,y),\;\; W^*=x_0+\varepsilon w^*(t,y),\;\; \varepsilon\ll 1. \tag{1.10}$$

Тогда в линейном приближении математическая постановка задачи принимает вид

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0,\;\; (x,y)\in G=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\, 0<x<x_0,\; 0<y<y_0\}, \tag{1.11}$$

$$\Phi_y(t,x,0)=0,\;\; \Phi_y(t,x,y_0)=0,\;\; x\in(0,x_0), \tag{1.12}$$

$$\Phi_x(t,0,y)=\frac{\partial w(t,y)}{\partial t},\;\; y\in(0,y_0), \tag{1.13}$$

$$\Phi_x(t,x_0,y)=\frac{\partial w^*(t,y)}{\partial t},\;\; y\in(0,y_0), \tag{1.14}$$

$$L(w)=\rho\Phi_t(t,0,y),\;\; y\in(0,y_0). \tag{1.15}$$

Условия (1.8), (1.9) своего вида не изменяют.

**2. Построение решения линейной задачи.** Сведем решение поставленной линейной задачи к решению интегро-дифференциального уравнения относительно функции $w(t,y)$. Для этого, считая $t$ параметром, введем в области $G$ комплексный потенциал поля $U=f(t,z)=\Phi+i\Psi$, где $z=x+iy$, $\Psi$ — гармоническая функция, сопряженная к $\Phi$. Рассмотрим аналитическую в $G$ функцию $f_z(t,z)=\Phi_x+i\Psi_x=\Phi_x-i\Phi_y$. При помощи функции $\zeta=\operatorname{sn}(K(k)(2z-x_0)/x_0)$, где sn — эллиптический синус, конформно отобразим прямоугольник $G$ на верхнюю полуплоскость $H=\{\zeta:\operatorname{Im}\zeta>0\}$ комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$. Граничным точкам $A(0,y_0)$, $B(0,0)$, $C(x_0,0)$, $D(x_0,y_0)$ прямоугольника в $\zeta$-плоскости будут соответствовать точки вещественной оси $\xi$ с абсциссами $-1/k$, $-1$, $1$, $1/k$. Параметр $k$ $(0<k<1)$ определяется из соотношения

$$K(\sqrt{1-k^2})/K(k)=2y_0/x_0,\quad K(k)=\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Полагая

$$\alpha(t)=\frac{1}{y_0}\int\limits_0^{y_0}w_t(t,y)\,dy=\frac{1}{y_0}\int\limits_0^{y_0}w_t^*(t,y)\,dy, \tag{2.1}$$

для аналитической в $H$ функции $F(t,\zeta)=f_z(t,z(\zeta))-\alpha(t)$ получим следующие граничные значения:

$$\operatorname{Im}F=-\Phi_y=0 \text{ при } |\xi|>1/k,\ |\xi|<1;$$

$$\operatorname{Re}F=\Phi_x-\alpha(t)=\begin{cases} w_t(t,y(\xi))-\alpha(t) & \text{при } -1/k<\xi<-1,\\ w_t^*(t,y(\xi))-\alpha(t) & \text{при } 1<\xi<1/k.\end{cases}$$

Здесь зависимость

$$y=y(\xi)=$$
$$=\begin{cases} -\dfrac{x_0}{2K(k)}\displaystyle\int\limits_{-1}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}, & -1/k<\xi<-1,\\ \dfrac{x_0}{2K(k)}\displaystyle\int\limits_{1}^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}, & 1<\xi<1/k,\end{cases} \tag{2.2}$$

определяется связью

$$z=\frac{x_0}{2}+\frac{x_0}{2K(k)}\int\limits_0^{\zeta}\frac{d\zeta}{Q(\zeta)}, \tag{2.3}$$

где $Q(\zeta)=\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}$, причем рассматривается та ветвь корня, которая положительна в интервале $(-1,1)$. Таким образом, для функции $F(t,\zeta)$ имеем смешанную краевую задачу в верхней полуплоскости. Решение этой задачи, ограниченное в точках $\xi=\pm1$, $\xi=\pm1/k$, дается формулой [9]

$$F(t,\zeta)=\frac{Q(\zeta)}{\pi}\left[\int\limits_1^{-1/k}\frac{w_t^*(t,y(\tau))-\alpha(t)}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}\,(\tau-\zeta)}\,d\tau-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{-1/k}^{-1}\frac{w_t(t,y(\tau))-\alpha(t)}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}\,(\tau-\zeta)}\,d\tau\right], \tag{2.4}$$

при этом должно выполняться условие

$$\int\limits_{-1/k}^{-1}\frac{w_t(t,y(\tau))\,d\tau}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}}=\int\limits_1^{1/k}\frac{w_t^*(t,y(\tau))\,d\tau}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}}. \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть, используя (2.2), что оно совпадает с условием (1.9). С учетом (2.3) находим

$$U_\zeta = U_z \frac{dz}{d\zeta} = (\alpha(t) + F(t,\zeta)) \frac{dz}{d\zeta} = \alpha(t) \frac{dz}{d\zeta} +$$
$$+ \frac{x_0}{2\pi K(k)} \left[ \int_1^{1/k} \frac{w_t^*(t, y(\tau)) - \alpha(t)}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}(\tau-\zeta)} d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_{-1/k}^{-1} \frac{w_t(t, y(\tau)) - \alpha(t)}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}(\tau-\zeta)} d\tau \right].$$

Отсюда для комплексного потенциала поля получим

$$U(t, z(\zeta)) = \alpha(t) z(\zeta) +$$
$$+ \frac{x_0}{2\pi K(k)} \left[ \int_{-1/k}^{-1} \frac{w_t(t, y(\tau)) - \alpha(t)}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}} \ln(\tau-\zeta) d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_1^{1/k} \frac{w_t^*(t, y(\tau)) - \alpha(t)}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}} \ln(\tau-\zeta) d\tau \right] + C(t),$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени $t$. Интегрируя по частям, представим $U(t, z(\zeta))$ в виде

$$U(t, z(\zeta)) = \alpha(t) z(\zeta) - \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1/k}^{-1} \frac{\tilde{w}(t,\tau)}{\tau-\zeta} d\tau - \int_1^{1/k} \frac{\tilde{w}^*(t,\tau)}{\tau-\zeta} d\tau \right] + C(t),$$

$$\tilde{w}(t,\tau) = \frac{x_0}{2K(k)} \int_{-1/k}^{\tau} \frac{w_t(t, y(\tau)) - \alpha(t)}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}} d\tau = \int_{y(\tau)}^{y_0} [w_t(t,y) - \alpha(t)] dy,$$

$$\tilde{w}^*(t,\tau) = \frac{x_0}{2K(k)} \int_1^{\tau} \frac{w_t^*(t, y(\tau)) - \alpha(t)}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}} d\tau = \int_0^{y(\tau)} [w_t^*(t,y) - \alpha(t)] dy. \tag{2.6}$$

Осуществляя в (2.6) предельный переход при $\zeta \to \xi \in (-1/k, -1)$ (при этом $z \to iy$, $y \in (0, y_0)$) и приравнивая вещественные части, найдем

$$\Phi(t, 0, y) = -\frac{1}{\pi} \left[ \int_{-1/k}^{-1} \frac{\tilde{w}(t,\tau)}{\tau-\xi} d\tau - \int_1^{1/k} \frac{\tilde{w}^*(t,\tau)}{\tau-\xi} d\tau \right] + C_1(t),$$

$$C_1(t) = \operatorname{Re} C(t), \quad \xi = \operatorname{sn}(K(k)(2iy - x_0)/x_0). \tag{2.7}$$

Согласно (2.7), имеем $(C'(t) = dC(t)/dt)$

$$\rho\Phi_t(t, 0, y) = \rho C_1'(t) - \frac{\rho}{\pi} \left[ \int_{-1/k}^{-1} \frac{\tilde{w}_t(t,\tau)}{\tau-\xi} d\tau - \int_1^{1/k} \frac{\tilde{w}^*(t,\tau)}{\tau-\xi} d\tau \right]. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.6) в (1.15), получим интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $w(t, y)$:

$$L(w) = C_2(t) + \frac{\rho}{\pi} \left[ \int_1^{1/k} \frac{\tilde{w}_t^*(t,\tau)}{\tau-\xi} d\tau - \int_{-1/k}^{-1} \frac{\tilde{w}_t(t,\tau)}{\tau-\xi} d\tau \right], \tag{2.9}$$

где $C_2(t) = \rho C_1'(t)$. Получив решение уравнения (2.9), из (2.6) найдем потенциал скоростей $\Phi(t, x, y)$.

Уравнение (2.9) справедливо при любых способах закрепления вязкоупругой пластины, и дальнейшее исследование ее движения связано с построением и изучением решений этого уравнения. Решение уравнения (2.9), удовлетворяющее условиям (1.8), будем искать в виде

$$w(t, y) = \sum_{n=0}^{N_0} a_n(t) \cos \lambda_n y, \tag{2.10}$$

где $\lambda_n = n\pi/y_0$. Отметим, что на отрезке $[0, y_0]$ система $\{\cos \lambda_n y\}_{n=0}^{\infty}$ полна. Естественно также положить

$$w^*(t, y) = \sum_{n=0}^{N_0} b_n(t) \cos \lambda_n y. \tag{2.11}$$

Согласно условиям (1.9), имеем $a_0'(t) = b_0'(t)$. Нетрудно видеть, что

$$\alpha(t) = \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} w_t(t, y)\, dy = a_0'(t),$$

$$\tilde{w}(t, \tau) = \int_{y(\tau)}^{y_0} [w_t(t, y) - \alpha(t)]\, dy = -\sum_{n=1}^{N_0} \frac{a_n'(t)}{\lambda_n} \sin \lambda_n y(\tau),$$

$$\tilde{w}^*(t, \tau) = \int_0^{y(\tau)} [w_t^*(t, y) - \alpha(t)]\, dy = \sum_{n=1}^{N_0} \frac{b_n'(t)}{\lambda_n} \sin \lambda_n y(\tau).$$

Подставляя (2.10), (2.11) в (2.9), получим

$$\sum_{n=1}^{N_0} \Big[D\lambda_n^4\Big(a_n(t) - \int_0^t R(t, \tau) a_n(\tau)\, d\tau\Big) - N\lambda_n^2 a_n(t) + m a_n''(t) +$$

$$+ (\beta_1 + \beta_2\lambda_n^4) a_n'(t) + \beta_0 a_n(t)\Big] \cos \lambda_n y + m a_0''(t) + \beta_1 a_0'(t) + \beta_0 a_0(t) =$$

$$= \frac{\rho}{\pi} \sum_{n=1}^{N_0} \Big[ \frac{b_n''(t)}{\lambda_n} \int_1^{1/k} \frac{\sin \lambda_n y(\tau)}{\tau - \xi}\, d\tau +$$

$$+ \frac{a_n''(t)}{\lambda_n} \int_{-1/k}^{-1} \frac{\sin \lambda_n y(\tau)}{\tau - \xi}\, d\tau \Big] + C_2(t).$$

Положим

$$C_2(t) = m a_0''(t) + \beta_1 a_0'(t) + \beta_0 a_0(t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N_0} (-1)^{n-1} \frac{\rho}{2\lambda_n \operatorname{sh}(\lambda_n x_0/2)} (a_n''(t) - b_n''(t)).$$

Тогда, учитывая, что для $-1/k < \xi < -1$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1/k}^{-1} \frac{\sin \lambda_n y(\tau)}{\tau - \xi}\, d\tau = -\operatorname{cth} \lambda_n x_0 \cdot \cos \lambda_n y + \frac{(-1)^n}{2 \operatorname{sh}(\lambda_n x_0/2)}, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{\sin \lambda_n y(\tau)\, d\tau}{\tau - \xi} = \frac{\cos \lambda_n y}{\operatorname{sh} \lambda_n x_0} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 \operatorname{sh}(\lambda_n x_0/2)}, \tag{2.13}$$

получим систему уравнений для отыскания функций $a_n(t)$: $a_0'(t) = b_0'(t)$;

$$\Big(m + \frac{\rho}{\lambda_n} \operatorname{cth} \lambda_n x_0\Big) a_n''(t) + (\beta_1 + \beta_2 \lambda_n^4) a_n'(t) + (D\lambda_n^4 - N\lambda_n^2 + \beta_0) a_n(t) -$$

$$- D\lambda_n^4 \int_0^t R(t, \tau) a_n(\tau)\, d\tau = \frac{\rho b_n''(t)}{\lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n x_0}, \quad n = \overline{1, N_0}. \tag{2.14}$$

Для доказательства равенств (2.12) достаточно рассмотреть в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ аналитическую функцию $H(\zeta)=h(z(\zeta))$, где $h(z)=\operatorname{ch}\lambda_n(z-x_0)$, а $z=z(\zeta)$ — функция, определяемая формулой (2.3). Представляя $H(\zeta)$ с помощью интеграла Шварца [9] в виде

$$H(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-1/k}^{-1}\operatorname{Im}H(\tau)\frac{d\tau}{\tau-\zeta}+H(\infty)=$$

$$=-\frac{\operatorname{sh}\lambda_n x_0}{\pi}\int_{-1/k}^{-1}\frac{\sin\lambda_n y(\tau)}{\tau-\zeta}d\tau+(-1)^n\operatorname{ch}(\lambda_n x_0/2)$$

и переходя к пределу при $\zeta\to\xi\in(-1/k,-1)$, получаем (2.12). Для доказательства (2.13) нужно положить $h(z)=\operatorname{ch}\lambda_n z$.

**3. Исследование устойчивости движения вязкоупругой пластины.** Исследуем устойчивость движения вязкоупругой пластины при условии, что ядро релаксации $R(t,\tau)$ зависит от разности $t-\tau$. Приведем определение устойчивости движения, соответствующее понятию устойчивости динамических систем в смысле Ляпунова: движение пластины называется устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>$ $>0$, что как только абсолютная величина возмущений начальных условий станет меньше $\delta$, то для вариации прогиба будет выполняться неравенство

$$\sup_{t,y}|w(t,y)|<\varepsilon,\ y\in[0,y_0],\ t\geqslant 0. \tag{3.1}$$

Обычно в роли возмущений выступают начальный прогиб и начальная скорость точек пластины.

Получим условия асимптотической устойчивости движения пластины, используя второй метод Ляпунова для систем с произвольным последействием [10]. Запишем для каждого из уравнений (2.14) систему уравнений возмущенного движения

$$x'=y,\ y'=-ay-bx+\int_0^t r(t-\tau)x(\tau)d\tau,\ a=(1/\gamma_n)(\beta_1+\beta_2\lambda_n^4),$$

$$b=(1/\gamma_n)(D\lambda_n^4-N\lambda_n^2+\beta_0). \tag{3.2}$$

Будем считать, что $a_n(t)\equiv 0$ при $t<0$. Тогда систему уравнений (3.2) можно переписать в эквивалентном виде

$$x'=y,\ y'=-ay-bx+\int_0^\infty r(s)x(t-s)ds. \tag{3.3}$$

Положим

$$V_0=y+ax+\int_0^\infty r(s)ds\int_{t-s}^t x(s_1)ds_1,$$

$$V_1=\int_0^\infty r(s)ds\int_{t-s}^t dt_1\int_{t_1}^t y^2(t_2)dt_2+\beta\int_0^\infty r(s)ds\int_{t-s}^t dt_1\int_{t_1}^t x^2(t_2)dt_2,$$

$$\alpha=\int_0^\infty sr(s)ds,\ \beta=b-\int_0^\infty r(s)ds,$$

и рассмотрим функционал

$$V=2\beta x^2+y^2+V_0^2+V_1. \tag{3.4}$$

Оценим производную этого функционала вдоль траекторий системы (3.3).

Имеем

$$\frac{d}{dt}(2\beta x^2+y^2)=-2ay^2+2xy(2\beta-b)-2y\int_0^\infty r(s)ds\int_{t-s}^t y(t_1)dt_1+$$

$$+2xy\int_0^\infty r(s)ds\leqslant(\alpha-2a)y^2+2\beta xy+\int_0^\infty r(s)ds\int_{t-s}^t y^2(t_1)dt_1.$$

Далее, считая $\beta>0$, получаем

$$\frac{d}{dt}(V_0^2)=-2V_0\beta x\leqslant-2\beta x(y+ax)+\beta\int_0^\infty r(s)ds\int_{t-s}^t [x^2(t)+$$

$$+x^2(t_1)]dt_1=-2\beta xy+\beta x^2(\alpha-2a)+\beta\int_0^\infty z(s)ds\int_{t-s}^t x^2(t_1)dt_1.$$

Учитывая еще, что

$$\frac{dV_1}{dt}=\alpha y^2-\int_0^\infty r(s)ds\int_{t-s}^t y^2(t_1)dt_1+\alpha\beta x^2-\beta\int_0^\infty r(s)ds\int_{t-s}^t x^2(t_1)dt_1,$$

окончательно получим $dV/dt\leqslant-2(a-\alpha)(\beta x^2+y^2)$.

Таким образом, построен определенно-положительный функционал (3.4), производная которого определенно-отрицательна, если

$$\int_0^\infty r(s)ds<b,\quad \int_0^\infty sr(s)ds<a. \tag{3.5}$$

Значит, тривиальное решение системы (2.14) является асимптотически устойчивым [10]. Следовательно, доказана

Теорема 1. *Решение (2.10) уравнения (2.9) устойчиво, если*

$$N<\min_n\left[D\lambda_n^2\left(1-\int_0^\infty R(s)ds\right)+\beta_0/\lambda_n^2\right],$$

$$\int_0^\infty sR(s)ds<\min_n\left(\frac{\beta_1}{D\lambda_n^4}+\frac{\beta_2}{D}\right). \tag{3.6}$$

Замечание. Если $\int_0^\infty R(s)ds<1$, а $\beta_0\geqslant0$, $\beta_1\geqslant0$, то неравенства (3.6) будут заведомо выполнены при следующих ограничениях на сжимающее усилие и коэффициент демпфирования материала пластины:

$$N<2\sqrt{D\beta_0\left(1-\int_0^\infty R(s)ds\right)},\quad \beta_2>D\int_0^\infty sR(s)ds. \tag{3.7}$$

Согласно (3.7), предельное значение нагрузки будет наибольшим для упругого тела $(R(s)\equiv0)$.

Рассмотрим влияние интегрального члена в уравнении (2.14) на устойчивость его решений в случае, когда $R(t,\tau)=R_0e^{-\gamma(t-\tau)}$, $0\leqslant R_0\ll1$, $\gamma>0$. Дифференцируя (2.14) по $t$ и исключая интегральный член, получаем дифференциальное уравнение третьего порядка, характеристический многочлен которого запишется в виде

$$\varphi(k)=(k+\gamma)(k^2+ak+b)-DR_0\lambda_n^4/\gamma_n, \tag{3.8}$$

где $a$ и $b$ определяются формулами (3.2). Ограничимся рассмотрением случая, когда решение уравнения (2.14) при $R\equiv0$ описывает колебательный процесс. Для корней уравнения $\varphi(k)=0$, учитывая, что $R_0\ll1$, в первом приближении будем иметь

$$k_{1,2}=\alpha\pm i\beta\mp\frac{D\lambda_n^4R_0}{2\beta\gamma_n}\ \frac{\pm\beta+(\gamma+\alpha)i}{\beta^2+(\gamma+\alpha)^2},$$

$$k_3=-\gamma+\frac{D\lambda_n^4R_0}{\gamma_n[(\gamma+\alpha)^2+\beta^2]},\tag{3.9}$$

где $\alpha\pm i\beta$ — корни уравнения $k^2+ak+b=0$. Из формул (3.9) следует: а) если $-\gamma<\alpha$, то для вязкоупругой пластины ($R\not\equiv0$) скорость затухания колебаний будет больше, а частота — меньше, чем для упругой пластины ($R\equiv0$); б) если $-\gamma>\alpha$, то скорость затухания колебаний вязкоупругой пластины определяется значением $(-\gamma)$ и будет меньше, чем для упругой пластины, а частота колебаний — больше.

**4. Задача 2.** Предположим теперь, что в сечении $x=x_0$, как и в сечении $x=0$, область перегорожена вязкоупругой пластиной, концы которой жестко заделаны в элементы, свободно перемещающиеся без трения вдоль оси $x$, массами которых пренебрегаем; прогиб пластины обозначим через $w^*(t,y)$. Тогда решение задачи в линейной постановке будет определяться системой уравнений и условий (1.8), (1.9), (1.11)—(1.15). К ним необходимо добавить уравнение для прогиба пластины, расположенной в сечении $x=x_0$,

$$L^*(w^*)\equiv D^*\left(\frac{\partial^4w^*}{\partial y^4}-\int_0^t R^*(t,\tau)\frac{\partial^4w^*(\tau,y)}{\partial y^4}d\tau\right)+N^*\frac{\partial^2w^*}{\partial y^2}+$$

$$+m^*\frac{\partial^2w^*}{\partial t^2}+\beta_2^*\frac{\partial^5w^*}{\partial y^4\partial t}+\beta_1^*\frac{\partial w^*}{\partial t}+\beta_0^*w^*=-\rho\Phi_t(t,x_0,y)\tag{4.1}$$

и условия ее закрепления: $\dfrac{\partial w^*}{\partial y}(t,\pm y_0)=0$, $\dfrac{\partial^3w^*}{\partial y^3}(t,\pm y_0)=0$. Коэффициенты в (4.1) имеют тот же физический смысл, что и соответствующие коэффициенты уравнения (1.6). Зададим $w(t,y)$, $w^*(t,y)$ в виде (2.10), (2.11). Тогда для определения коэффициентов разложений получим систему уравнений

$$\left(m+\frac{\rho}{\lambda_n}\operatorname{cth}\lambda_nx_0\right)a_n''+(\beta_1+\beta_2\lambda_n^4)a_n'+(D\lambda_n^4-N\lambda_n^2+\beta_0)a_n-$$

$$-D\lambda_n^4\int_0^t R(t,\tau)a_n(\tau)d\tau=\frac{\rho b_n''}{\lambda_n\operatorname{sh}\lambda_nx_0},\quad n=\overline{1,N_0},\tag{4.2}$$

$$\left(m^*+\frac{\rho}{\lambda_n}\operatorname{cth}\lambda_nx_0\right)b_n''+(\beta_1^*+\lambda_n^4\beta_2^*)b_n'+(D^*\lambda_n^4-N^*\lambda_n^2+\beta_0^*)b_n-$$

$$-D^*\lambda_n^4\int_0^t R^*(t,\tau)b_n(\tau)d\tau=\frac{\rho a_n''}{\lambda_n\operatorname{sh}\lambda_nx_0},\quad n=\overline{1,N_0},\tag{4.3}$$

$$a_0'=b_0',\quad (x_0\rho+m+m^*)a_0''+(\beta_1+\beta_1^*)a_0'+(\beta_0+\beta_0^*)a_0=0.\tag{4.4}$$

Пусть параметры, характеризующие свойства вязкоупругих пластин (в том числе ядра релаксации), будут одинаковы. Тогда, вычитая (4.2) из (4.3), для функции $H_n=b_n-a_n$ получим уравнение

$$\left(m+\frac{\rho}{\lambda_n}\operatorname{cth}\lambda_nx_0+\frac{\rho}{\lambda_n\operatorname{sh}\lambda_nx_0}\right)H_n''+(\beta_1+\beta_2\lambda_n^4)H_n'+$$

$$+(D\lambda_n^4-N\lambda_n^2+\beta_0)H_n-D\lambda_n^4\int_0^t R(t,\tau)H_n(\tau)\,d\tau=0. \qquad (4.5)$$

Сложив уравнения (4.2), (4.3), для суммы $r_n=a_n+b_n$ получим

$$\left(m+\frac{\rho}{\lambda_n}\operatorname{cth}\lambda_n x_0-\frac{\rho}{\lambda_n\operatorname{sh}\lambda_n x_0}\right)r_n''+(\beta_1+\beta_2\lambda_n^4)r_n'+$$

$$+(D\lambda_n^4-N\lambda_n^2+\beta_0)r_n-D\lambda_n^4\int_0^t R(t,\tau)r_n(\tau)\,d\tau=0. \qquad (4.6)$$

Отсюда и из теоремы 1 вытекает, что справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены сделанные выше предположения. Тогда условия устойчивости решений уравнений (4.5), (4.6), а следовательно, и (4.2), (4.3) имеют вид (3.6). Для устойчивости решений уравнения (4.4) достаточно потребовать* $\beta_k+\beta_k^*>0$, $k=1, 2$.

Такой же вид имеют условия устойчивости синхронных колебаний ($a_n=b_n$).

**5. Задача 3.** Пусть область $G$ слева ограничена вязкоупругой пластиной, а справа в сечении $x=x_0$ задан закон изменения давления $P(t, x_0, y)=P_0+\varepsilon P^*(t, y)$. Тогда решение задачи в линейной постановке будет определяться системой уравнений и условий (1.8), (1.9), (1.11)—(1.13), (1.15), которые следует дополнить условием

$$-\rho\Phi_t(t, x_0, y)=P^*(t, y). \qquad (5.1)$$

Для гармонической в прямоугольнике $G$ функции $\Phi(t, x, y)$ имеем смешанную краевую задачу, решение которой будем искать в виде

$$\Phi=\xi(t)+\eta(t)x+\sum_{n=1}^{N_0}\left[\Phi_n(t)e^{\lambda_n x}+\Psi_n(t)e^{-\lambda_n x}\right]\cos\lambda_n y, \qquad (5.2)$$

где $\lambda_n=n\pi/y_0$. Очевидно, функция $\Phi$, определяемая формулой (5.2), удовлетворяет уравнению (1.11) и условиям (1.12). Подставляя (5.2) в (1.13), (5.1) и записывая условия ортогональности невязок к системе функций $\{\cos\lambda_n y\}_{n=0}^{N_0}$, находим

$$\eta=\frac{1}{y_0}\int_0^{y_0}\frac{\partial w(t,y)}{\partial t}dy,\quad -\rho(\xi'+x_0\eta')=\frac{1}{y_0}\int_0^{y_0}P^*(t,y)\,dy, \qquad (5.3)$$

$$\Phi_n'=-\frac{1}{y_0\operatorname{ch}(\lambda_n x_0)}\int_0^{y_0}\left(\frac{P^*}{\rho}-\frac{e^{-\lambda_n x_0}}{\lambda_n}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\cos\lambda_n y\,dy, \qquad (5.4)$$

$$\Psi_n'=-\frac{1}{y_0\operatorname{ch}(\lambda_n x_0)}\int_0^{y_0}\left(\frac{P^*}{\rho}-\frac{e^{\lambda_n x_0}}{\lambda_n}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\cos\lambda_n y\,dy. \qquad (5.5)$$

Подставляя (5.4), (5.5) в (1.15), получим уравнение для $w(t, y)$

$$L(w)=p\xi'(t)-\frac{2\rho}{y_0}\sum_{n=1}^{N_0}\frac{\cos\lambda_n y}{\operatorname{ch}(\lambda_n x_0)}\int_0^{y_0}\left(\frac{P^*}{\rho}+\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{sh}(\lambda_n x_0)}{\lambda_n}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\cos\lambda_n y\,dy. \qquad (5.6)$$

В соответствии с граничными условиями (1.8) зададим $w(t, y)$ в виде (2.10), а функцию $P^*(t, y)$ также представим аналогичным отрезком ряда

$$P^*(t, y)=\sum_{n=0}^{N_0}P_n(t)\cos\lambda_n y.$$

Тогда для коэффициентов $a_n(t)$, $n=\overline{1, N_0}$, разложения (2.10) получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left(m+\frac{\rho}{\lambda_n}\operatorname{th}\lambda_0 x_0\right)a_n''+(\beta_1+\beta_2\lambda_n^4)a_n'+(D\lambda_n^4-N\lambda_n^2+\beta_0)a_n-$$

$$-D\lambda_n^4\int_0^t R(t,\tau)a_n(\tau)\,d\tau=-\frac{P_n(t)}{\operatorname{ch}\lambda_n x_0},\quad n=\overline{1, N_0}. \tag{5.7}$$

Коэффициенты $a_0$, $P_0$ связаны соотношением

$$(m+\rho x_0)a_0''+\beta_1 a_0'+\beta_0 a_0=-P_0(t). \tag{5.8}$$

Теперь, подобно теореме 1, убеждаемся в справедливости теоремы 3.

Теорема 3. *Решение задачи (5.6) асимптотически устойчиво, если* $\beta_0>0$, $\beta_1>0$ *и выполнены неравенства (3.5), (3.6).*

Замечание. Решение задач 1 и 2 также можно искать в виде (5.2). Тогда система определяющих уравнений задачи 2 запишется в следующем виде:

$$L(w)=\rho\xi'(t)+\frac{2\rho}{y_0}\sum_{n=1}^{N_0}\frac{\cos\lambda_n y}{\lambda_n}\int_0^{y_0}\left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2}\,\frac{1}{\operatorname{sh}\lambda_n x_0}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{cth}\lambda_n x_0\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\cos\lambda_n y\,dy, \tag{5.9}$$

$$L^*(w^*)=-\rho\left[\xi'(t)+x_0\eta'(t)\right]-$$

$$-\frac{2\rho}{y_0}\sum_{n=1}^{N_0}\frac{\cos\lambda_n y}{\lambda_n}\int_0^{y_0}\left[\operatorname{cth}\lambda_n x_0\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2}-\frac{1}{\operatorname{sh}\lambda_n x_0}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\cos\lambda_n y\,dy, \tag{5.10}$$

где $\xi(t)$ — произвольная функция,

$$\eta(t)=\frac{1}{y_0}\int_0^{y_0}\frac{\partial w}{\partial t}\,dy=\frac{1}{y_0}\int_0^{y_0}\frac{\partial w^*}{\partial t}\,dy. \tag{5.11}$$

Если закон движения пластины, ограничивающей область $G$ спра́ва, задан, то уравнение (5.10) следует опустить, а в уравнении (5.9) функцию $w^*(t, y)$ считать известной. Уравнения (5.9), (5.10) так же, как и (5.6), справедливы при любых способах закрепления пластин.

**6. Устойчивость уравнений взаимодействия с неразностным ядром.** Получим достаточные условия устойчивости в предположении, что ядро релаксации $R(t,\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant t$ удовлетворяет условиям

$$R(t,\tau)=\frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial\tau},\quad \frac{\partial Q(t,0)}{\partial t}\leqslant 0,\quad \frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial\tau}\geqslant 0,$$

$$\frac{\partial^2 Q(t,\tau)}{\partial t\,\partial\tau}\leqslant 0,\quad Q(t,t)=0, \tag{6.1}$$

где $Q(t,\tau)$ — мера релаксации напряжений. Все рассуждения проведем для уравнения (2.9), устойчивость решений задач 2 и 3 исследуется аналогично.

Сначала найдем условия устойчивости решений системы (2.14). Для этого достаточно исследовать устойчивость тривиального решения соответствующей однородной системы. Введем функционал ($n\geqslant 1$)

$$V_n(t)=a_n'^2(t)+(cQ(t,0)+b)a_n^2(t)+$$

$$+c\int_0^t\frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial\tau}(a_n(t)-a_n(\tau))^2\,d\tau,\quad c=D\lambda_n^4\gamma_n^{-1},$$

$$b=(D\lambda_n^4-N\lambda_n^2+\beta_0)\gamma_n^{-1},\quad \gamma_n=m+\rho\lambda_n^{-1}\operatorname{cth}\lambda_n x_0, \tag{6.2}$$

и найдем производную $V_n'(t)$:

$$V_n'(t)=2a_n'(t)a_n''(t)+c\Big(\frac{\partial Q(t,0)}{\partial t}a_n^2(t)+$$

$$+\int_0^t\frac{\partial^2 Q(t,\tau)}{\partial t\partial\tau}(a_n(t)-a_n(\tau))^2d\tau\Big)+2(cQ(t,0)+b)a_n(t)a_n'(t)+$$

$$+2ca_n'(t)\int_0^t\frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial\tau}(a_n(t)-a_n(\tau))d\tau.$$

Отсюда в силу условий (6.1) и уравнений (2.14) имеем

$$V_n'(t)\leqslant 2a_n'(t)a_n''(t)+2ba_n(t)a_n'(t)-$$

$$-2ca_n'(t)\int_0^t\frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial\tau}a_n(\tau)d\tau=-2aa_n'^2(t),\quad a=(\beta_1+\beta_2\lambda_n^4)\gamma_n^{-1}.$$

Если $\beta_1+\beta_2\lambda_n^4\geqslant 0$, то $V_n'(t)\leqslant 0$, следовательно,

$$V_n(t)\leqslant V_n(0)=a_n'^2(0)+ba_n^2(0). \tag{6.3}$$

С другой стороны, из (6.1), (6.2) следует, что

$$V_n(t)\geqslant(cQ(\infty,0)+b)a_n^2(t). \tag{6.4}$$

Пусть $cQ(\infty,0)+b=[D\lambda_n^4(1+Q(\infty,0))-N\lambda_n^2+\beta_0]\gamma_n^{-1}>0$, тогда из (6.3), (6.4) получаем

$$a_n^2(t)\leqslant c[a_n^2(0)+a_n'^2(0)], \tag{6.5}$$

где $c$ — некоторая положительная постоянная, $n=\overline{1,N_0}$.

Теорема 4. *Решение уравнения (2.9) устойчиво при выполнении соотношений (6.1) и неравенств*

$$\beta_1+\beta_2\lambda_n^4\geqslant 0,\quad D\lambda_n^4(1+Q(\infty,0))-N\lambda_n^2+\beta_0>0,\quad n=\overline{1,\infty}. \tag{6.6}$$

Доказательство. Представим решение уравнения (2.9) в виде ряда

$$w(t,y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t)\cos\lambda_n y,\quad \lambda_n=n\pi/y_0, \tag{6.7}$$

и пусть

$$\hat w(t,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat a_n(t)\cos\lambda_n y \tag{6.8}$$

— решение соответствующего однородного уравнения возмущенного движения. Коэффициенты $\hat a_n(t)$ разложения (6.8) удовлетворяют системе уравнений (2.14), в которой правые части уравнений нужно отбросить. При этом поскольку $\hat a_0'(t)=0$, то $\hat a_0(t)\equiv\hat a_0(0)$. Применяя сначала неравенство Коши—Буняковского, а затем (6.5), будем иметь

$$\Big|\sum_{n=0}^{N_0}\hat a_n(t)\cos\lambda_n y\Big|\leqslant|\hat a_n(0)|+\Big(\sum_{n=1}^{N_0}\lambda_n^2\hat a_n^2(t)\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{N_0}\frac{\cos^2\lambda_n y}{\lambda_n^2}\Big)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant|\hat a_0(0)|+\Big[c\sum_{n=1}^{N_0}\lambda_n^2(\hat a_n^2(0)+\hat a_n'^2(0))\Big]^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{\lambda_n^2}\Big)^{1/2}.$$

В пределе при $N_0\to\infty$ получим

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n(t)\cos\lambda_n y\Big|\leqslant|\hat{a}_0(0)|+y_0\sqrt{\frac{c}{6}}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2(\hat{a}_n^2(0)+\hat{a}_n'^2(0))\Big]^{1/2}. \tag{6.9}$$

В силу ортогональности системы $\{\sin\lambda_n y\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[0,y_0]$ имеем

$$\frac{2}{y_0}\int_0^{y_0}\hat{w}_y^2(0,y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\hat{a}_n^2(0),\ \frac{2}{y_0}\int_0^{y_0}\hat{w}_{yt}^2(0,y)\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\hat{a}_n'^2(0).$$

Учитывая также, что $\frac{1}{y_0}\int_0^{y_0}\hat{w}(0,y)\,dy=\hat{a}_0(0)$, запишем (6.9) в виде

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n(t)\cos\lambda_n y\Big|\leqslant\frac{1}{y_0}\Big|\int_0^{y_0}\hat{w}(0,y)\,dy\Big|+\sqrt{\frac{cy_0}{3}}\Big(\int_0^{y_0}\hat{w}_y^2(0,y)\,dy+$$
$$+\int_0^{y_0}\hat{w}_{yt}^2(0,y)\,dy\Big)^{1/2}.$$

Из полученного неравенства следует устойчивость решений уравнения (2.9) при малых отклонениях начального прогиба $w(0,y)$, начальных углов поворота $w_y(0,y)$ и начальных скоростей изменения этих углов $w_{yt}(0,y)$, если выполняются наложенные ранее ограничения (6.1) на ядро релаксации и условия (6.6) при $n=\overline{1,\infty}$.

Замечание. В отличие от задачи 1 в задачах 2 и 3 коэффициент $a_0(t)$ в представлении исследуемого решения в виде (6.7) удовлетворяет дифференциальным уравнениям не первого, а второго порядка (4.4), (5.8). Тогда для решений соответствующих однородных уравнений можно получить оценку вида (6.5). Это приводит к дополнительному требованию о малости отклонений начальных скоростей $w_t(0,y)$.

**7. Один из способов учета гидродинамической нелинейности.** Предполагая, что для $\varphi$, $W$, $W^*$ выполнены соотношения (1.10), рассмотрим задачу 1 в нелинейной постановке

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}=0,\ (x,y)\in G, \tag{7.1}$$

$$\Phi_y(t,x,0)=0,\ \Phi_y(t,x,y_0)=0,\ x\in(0,x_0), \tag{7.2}$$

$$\Big(\Phi_x-\frac{\partial w}{\partial t}\Big)_{x=0}+\varepsilon\Big(\Phi_{xx}w-\Phi_y\frac{\partial w}{\partial y}\Big)_{x=0}=0,\ y\in(0,y_0), \tag{7.3}$$

$$\Big(\Phi_x-\frac{\partial w^*}{\partial t}\Big)_{x=x_0}+\varepsilon\Big(\Phi_{xx}w^*-\Phi_y\frac{\partial w^*}{\partial y}\Big)_{x=x_0}=0,\ y\in(0,y_0), \tag{7.4}$$

$$L(w)=\rho\,[\Phi_t+\varepsilon(\Phi_{xt}w+(1/2)\Phi_x^2+(1/2)\Phi_y^2)]_{x=0},\ y\in(0,y_0). \tag{7.5}$$

Условия (1.8), (1.9) своего вида не меняют.

Здесь и в последующих преобразованиях учет нелинейностей производится путем разложения соответствующих функций в ряды по степеням $\varepsilon$ с последующим отбрасыванием членов порядка выше второго.

Будем искать решение в виде

$$\Phi=\xi(t)+\eta(t)x+[\Phi_1(t)e^{\lambda x}+\Psi_1(t)e^{-\lambda x}]\cos\lambda y, \tag{7.6}$$

$$w=a_0(t)+a_1(t)\cos\lambda y,\ w^*=b_0(t)+b_1(t)\cos\lambda y,\ \lambda=\pi/y_0, \tag{7.7}$$

где $\xi$, $\eta$, $\Phi_1$, $\Psi_1$, $a_0$, $a_1$ — искомые, а $b_0$, $b_1$ — заданные функции. Если $b_1(t)\equiv 0$, то имеем задачу с прямолинейным поршнем. Подставляя (7.6), (7.7) в (7.3)—(7.5) и записывая условия ортогональности невязок этих уравнений к функциям 1, $\cos\lambda y$, получим следующую систему уравнений для определения неизвестных функций:

$$\eta = a_0' = b_0', \tag{7.8}$$

$$\Phi_1 = (b_1' - e^{-\lambda x_0} a_1') \frac{1 - b_0 \lambda \varepsilon}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda x_0}, \quad \Psi_1 = (b_1' - e^{\lambda x_0} a_1') \frac{1 + b_0 \lambda \varepsilon}{2\lambda \operatorname{sh} \lambda x_0}, \tag{7.9}$$

$$m b_0'' + \beta_1 b_0' + \beta_0 a_0 = \rho \xi' + (1/4) \rho \varepsilon [2 b_0'^2 + 4 b_0 b_0'' + a_1'^2 + 2 a_1 a_1'' +$$
$$+ (b_1' / \operatorname{sh} \lambda x_0 - \operatorname{cth} (\lambda x_0) \cdot a_1')^2], \tag{7.10}$$

$$\left(m + \frac{1}{\lambda} \rho \operatorname{cth} \lambda x_0\right) a_1'' + (\beta_1 + \beta_2 \lambda^4) a_1' + (D\lambda^4 - N\lambda^2 + \beta_0 - \rho \varepsilon b_0''(t)) a_1 -$$
$$- D\lambda^4 \int_0^t R(t, \tau) a_1(\tau) d\tau = \frac{\rho b_1''}{\lambda \operatorname{sh} \lambda x_0}. \tag{7.11}$$

Уравнение (7.11) служит для определения $a_1(t)$; функции $\xi$, $\eta$, $\Phi_1$, $\Psi_1$ находятся из уравнений (7.8)—(7.10). Заметим, что уравнение для $a_1(t)$ оказалось линейным, но в отличие от соответствующего уравнения (2.14) линейной задачи 1 один из его коэффициентов содержит переменное слагаемое $\rho \varepsilon b_0''(t)$. Если $R \equiv 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $b_0(t) = -q \sin 2t$, то (7.11) представляет собой уравнение Матье. При $b_1(t) \equiv 0$ функция $b_0(t)$ определяет закон движения прямолинейного поршня.

Используя функционал (где $Q(t, \tau)$ — мера релаксации, $R = \partial Q / \partial \tau$)

$$V = a_1'^2(t) + \frac{D\lambda^4}{\gamma} \left[ 1 + Q(t, 0) - \frac{N}{D\lambda^2} + \frac{\beta_0 - \varepsilon \rho b_0''(t)}{D\lambda^4} \right] a_1^2(t) +$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial Q(t, \tau)}{\partial \tau} (a_1(t) - a_1(\tau))^2 d\tau, \quad \gamma = m + \frac{1}{\lambda} \rho \operatorname{cth} \lambda x_0, \tag{7.12}$$

аналогично доказательству теоремы 1 обосновывается

Теорема 5. *Решение уравнения (7.11) устойчиво, если*

$$\frac{\partial Q(t, \tau)}{\partial \tau} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^2 Q(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} \leqslant 0, \quad Q(t, t) = 0, \quad \beta_1 + \beta_2 \lambda^4 \geqslant 0, \tag{7.13}$$

$$N < D\lambda^2 \left[ 1 + Q(t, 0) + \frac{\beta_0 - \rho \varepsilon b_0''(t)}{D\lambda^4} \right], \tag{7.14}$$

$$b_0'''(t) > \frac{D\lambda^4}{\rho} \frac{\partial Q(t, 0)}{\partial t}. \tag{7.15}$$

Условия (7.14), (7.15) учитывают влияние жидкости.

Задача 2. Постановка задачи 2 содержит, кроме уравнений и условий (7.1)—(7.5), дополнительное уравнение

$$L(w^*) = -\rho [\Phi_t + \varepsilon (\Phi_{xt} w^* + (1/2) \Phi_x^2 + (1/2) \Phi_y^2)]_{x = x_0}, \quad y \in (0, y_0). \tag{7.16}$$

Отыскивая $\Phi$, $w$, $w^*$ в виде (7.6), (7.7), из условий ортогональности невязок уравнений (7.3), (7.4) к функциям 1, $\cos \lambda y$ получим соотношения (7.8), (7.9).

Аналогичная процедура для уравнений (7.5), (7.16) приводит с учетом (7.8), (7.9) к следующей системе уравнений для $b_0$, $a_1$, $b_1$:

$$L_0(a_1) = \frac{\rho b_1''}{\lambda \operatorname{sh} \lambda x_0} + \rho \varepsilon b_0'' a_1, \tag{7.17}$$

$$L_0^*(b_1) = \frac{\rho a_1''}{\lambda \operatorname{sh} \lambda x_0} - \rho \varepsilon b_0'' b_1, \tag{7.18}$$

где $L_0(a_1)$, $L_0^*(b_1)$ — левые части уравнений (4.2), (4.3) при $n=1$;

$$N_0^*(b_0) \equiv (m+m^*+\rho x_0) b_0'' + (\beta_1+\beta_1^*) b_0' + (\beta_0+\beta_0^*) b_0 = \\ = 4^{-1}\rho\varepsilon(a_1'^2 - b_1'^2). \qquad (7.19)$$

Функция $\xi(t)$ определяется из уравнения

$$m a_0'' + \beta_1 a_0' + \beta_0 a_0 = \rho\xi' + 4^{-1}\rho\varepsilon\,[2b_0'^2 + 4b_0 b_0'' + a_1'^2 + \\ + 2a_1 a_1'' + (b_1'/\operatorname{sh}\lambda x_0 - a_1' \operatorname{cth}\lambda x_0)^2]. \qquad (7.20)$$

Таким образом, решение задачи сводится к исследованию нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений (7.17)—(7.19) для функций $b_0$, $a_1$, $b_1$.

Предположим, что обе пластины имеют одинаковые массовые и прочностные характеристики, в том числе $R \equiv R^*$. Складывая и вычитая эти уравнения и учитывая, что $L_0 = L_0^*$, получим

$$L_0(H) = -\frac{\rho H''}{\lambda \operatorname{ch}\lambda x_0} - \rho\varepsilon b_0'' G, \quad L_0(r) = \frac{\rho r''}{\lambda \operatorname{sh}\lambda x_0} - \rho\varepsilon b_0'' h, \qquad (7.21)$$

где $h = b_1 - a_1$, $r = b_1 + a_1$. Уравнение (7.19) принимает вид

$$N_0^*(b_0) = -\rho\varepsilon r h/4. \qquad (7.22)$$

Теперь имеем систему уравнений для неизвестных $r$, $h$, $b_0$.

Математическая постановка задачи 3 содержит уравнения и условия (7.1)—(7.3), (7.5), а также условие $P(t, x_0+\varepsilon w, y) = P_0 + \varepsilon P^*(t, y)$, которое с точностью до членов порядка $\varepsilon^2$ после деления на $\varepsilon$, принимает вид

$$-\rho\,[\Phi_t + \varepsilon(\Phi_{xt} w + 2^{-1}\Phi_x^2 + 2^{-1}\Phi_y^2)]_{x=x_0} = P^*(t, y). \qquad (7.23)$$

Отыскивая $\Phi$, $w$ в виде (7.6), (7.7), из условий ортогональности невязок уравнений (7.3), (7.23) к функциям 1, $\cos\lambda y$ получим

$$\eta = a_0', \quad \Phi_1 = A(t) + B(t)\varepsilon, \quad \Psi_1 = C(t) + D(t)\varepsilon, \qquad (7.24)$$

$$C' = -\frac{a_1'' e^{\lambda x_0}}{2\lambda \operatorname{ch}\lambda x_0} - \frac{1}{\rho y_0 \operatorname{ch}\lambda x_0}\int_0^{y_0} P^* \cos\lambda y\, dy, \quad A - C = a_1'/\lambda,$$

$$B' = -\lambda(a_0 A)' - a_0'' a_1/(2\operatorname{ch}\lambda x_0), \quad D' = \lambda(a_0 C)' - a_0'' a_1/(2\operatorname{ch}\lambda x_0). \qquad (7.25)$$

Аналогичным образом из уравнения (7.5) с учетом (7.24), (7.25) получим систему уравнений для определения $a_0(t)$, $a_1(t)$:

$$(m+\rho x_0) a_0'' + \beta_1 a_0' + \beta_0 a_0 = -\frac{1}{y_0}\int_0^{y_0} P^* dy + \\ + \left[\frac{2}{\rho y_0} \operatorname{th}\lambda x_0 \int_0^{y_0} P^* \cos\lambda y\, dy + \frac{a_1''}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda x_0}\right)\right]\frac{\rho\varepsilon\lambda a_1}{2} + \\ + (1/2)\rho\lambda^2\varepsilon\,[A^2 + C^2 - (A^2 e^{2\lambda x_0} + C^2 e^{-2\lambda x_0})],$$

$$L_0(a_1) = -\frac{2}{y_0 \operatorname{ch}\lambda x_0}\int_0^{y_0} P^* \cos\lambda y\, dy + \rho\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\lambda x_0}\right) a_0'' a_1,$$

где $A$, $C$ определены формулами (7.25), а $L_0(a_1)$ — левая часть уравнения (5.7) при $n=1$. Функция $\xi(t)$ определяется из уравнения $m a_0'' + \beta_1 a_0' + \beta_0 a_0 = \rho\xi' + \rho\varepsilon\,[a_0 a_0'' + 2^{-1} a_0'^2 + 2^{-1} a_1 a_1'' + 2^{-1}\lambda^2(A^2 + C^2)]$.

Устойчивость полученных уравнений также может быть изучена с помощью второго метода Ляпунова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94—01—01131.

## Литература

1. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Колмановский В. Б. // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. 1987. Т. 19. С. 3.—77.

2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., 1961.

3. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М., 1976.

4. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М., 1979.

5. Ильгамов М. А. Введение в нелинейную гидроупругость. М., 1991.

6. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.

7. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М., 1983.

8. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., 1960.

9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.

10. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.

*Ульяновский политехнический институт,*
*Московский институт электроники*
*и математики*

*Поступила в редакцию*
*12 апреля 1994 г.*