



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

O. M. Fomenko, The representation of integers by positive quaternary quadratic forms, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2001, Volume 276, 291–299

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.91

March 17, 2025, 18:39:04



О. М. Фоменко

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ
ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КВАТЕРНАРНЫМИ
КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ**

1. Пусть n – натуральное число, $k \geq 4$ – фиксированное натуральное число, $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = X^T A X$ – положительно определенная целочисленная примитивная квадратичная форма от k переменных, A – матрица формы f , $D = \det A$ – детерминант формы f , $r_f(n)$ – количество представлений n квадратичной формой f .

В. А. Тартаковский [1] доказал, что если $k \geq 5$ и n представимо родом формы f , то существует положительная постоянная C_f , зависящая только от f и такая, что при $n > C_f$ n представляется самой формой f . Ниже C означает положительное постоянное число, не всегда одно и то же. Ватсон [2] определил явную зависимость C_f от D . Он доказал, что

$$\begin{aligned} C_f &= CD^{5.2}, & \text{если } k &= 5; \\ C_f &= CD^{2.67}, & \text{если } k &= 6; \\ C_f &= CD, & \text{если } k &\geq 7. \end{aligned}$$

Недавно в случае $k = 5$ была получена более точная граница (см. [3]):

$$C_f = CD^4.$$

А. В. Малышев [4] доказал при $k \geq 4$ асимптотическую формулу

$$r_f(n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1} \mathfrak{S}_f(n) + O\left(D^{\frac{k}{4}+\frac{3}{2}} n^{\frac{k}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right), \quad (1)$$

где O -константа зависит от ε (и от k , если брать переменное k , но в данной работе мы предположили, что k – постоянное число),

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 99-01-00099).

$\mathfrak{S}_f(n)$ – сингулярный ряд. Если сочетать формулу (1) с оценкой снизу сингулярного ряда (см. [4, с. 73]), то можно доказать, что при $k \geq 5$ и выполнении родовых условий асимптотическая формула (1) действует при $n > C_\varepsilon D^{3(k+2)/(k-3)+\varepsilon}$. При $k = 4$ теорема Тартаковского не всегда верна, поэтому сделаем предположение $(n, 2^3 D) = 1$. Тогда из результатов А. В. Малышева следует, что при выполнении родовых условий асимптотическая формула (1) действует, если $n > C_\varepsilon D^{22+\varepsilon}$. Применяя теорию модулярных форм, автор [5] довел последний результат до $n > C_\varepsilon D^{14+\varepsilon}$. (В работе [5] имеются неточности, которые без труда устраняются.)

Для диагональных форм границу действия асимптотических формул можно уточнить. Ради простоты положим

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = [a, b, c, d].$$

Хорошо известно, что при $(n, 2D) = 1$ сингулярный ряд принимает простой вид

$$\mathfrak{S}_{[a,b,c,d]} = \sum_{t|n} \left(\frac{D}{t}\right) t^{-1}, \quad D = abcd.$$

Имеем

$$\mathfrak{S}_{[a,b,c,d]} \gg \frac{1}{\log \log n}, \quad \text{если } (n, 2D) = 1.$$

Этот факт в сочетании с оценками собственных чисел операторов Гекке, принадлежащих Айхлеру и Делиню, позволяет получить довольно точные результаты. В работе [6] (исправления в [7]) рассматривались простейшие формы

$$F_1 = [1, p, p, p],$$

$$F_2 = [1, 1, p, p],$$

$$F_3 = [1, 1, 1, p],$$

где $p > 2$ – простое число. Были доказаны следующие результаты.

1) Для формы F_1 имеем

$$r_{[1,p,p,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{p^{3/2}} \mathfrak{S}_{[1,p,p,p]}(n) + O_\varepsilon \left(p^\varepsilon n^{1/2} d(n) \right), \quad (2)$$

$(n, 2p) = 1$; $d(n)$ – количество делителей n .

2) Для формы F_2 имеем

$$r_{[1,1,p,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{p} \mathfrak{S}_{[1,1,p,p]}(n) + O_\varepsilon \left(p^\varepsilon n^{1/2} d(n) \right), \quad (n, 2p) = 1. \quad (3)$$

3) Для формы F_3 имеем

$$r_{[1,1,1,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{\sqrt{p}} \mathfrak{S}_{[1,1,1,p]}(n) + O_\varepsilon \left(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon} n^{1/2} d(n) \right), \quad (n, 2p) = 1. \quad (4)$$

Асимптотические формулы (2), (3) действуют при

$$n \gg_\varepsilon D_i^{1+\varepsilon} \quad (i = 1, 2), \quad (5)$$

где D_i – детерминант F_i , а асимптотическая формула (4) действует при

$$n \gg_\varepsilon D_3^{2+\varepsilon}. \quad (6)$$

Одновременно для каждой из величин $r_{[1,p,p,p]}(n)$, $r_{[1,1,p,p]}(n)$, $r_{[1,1,1,p]}(n)$ при выполнении соответствующих условий (5), (6) имеет место оценка снизу

$$\gg_\varepsilon \frac{n}{\sqrt{D_i} \log \log n} \quad (i = 1, 2, 3).$$

В настоящей работе доказана асимптотическая формула для $r_f(n)$, где $f = [1, 1, 1, D]$, отличного от (4) вида. Эта формула действует при $n \gg_\varepsilon D^{1+\varepsilon}$, причем граница является наилучшей. Для доказательства мы используем метод Е. П. Голубевой [8], основанный на большом решетке (по поводу других применений метода Е. П. Голубевой см. [9, 10]). Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $f = f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + Dw^2$, где $D > 1$, $D \neq d^2$; $\sqrt{n}/\sqrt{D} = n^\theta$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Пусть $(n, 2D) = 1$. Тогда

$$r_f(n) = \pi^2 \frac{n}{\sqrt{D}} \mathfrak{S}_f(n) + O \left(\frac{n^{1+\varepsilon-c(\theta)}}{\sqrt{D}} \right), \quad (7)$$

где $c(\theta) > 0$, ε – сколь угодно малое положительное число, $O(\dots) = O_\varepsilon(\dots)$. Выражение для $c(\theta)$ даётся в конце работы.

Замечание. Как легко видеть, числа $\{n \mid n \leq D - 1, n \equiv 7 \pmod{8}, (n, 2D) = 1\}$ представимы родом формы $[1, 1, 1, D]$, но не представимы самой этой формой. Отсюда следует, что границу действия нашей асимптотической формулы нельзя довести до $n \gg D^\alpha$, где $\alpha < 1$.

2. В этом пункте дается доказательство теоремы. Пусть $E_3 = E_3(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^2$, $r_3(n)$ – количество представлений n формой E_3 . Имеем

$$r_f(n) = \sum_{-\sqrt{\frac{n}{D}} \leq w \leq \sqrt{\frac{n}{D}}} r_3(n - Dw^2).$$

Будем рассматривать сумму

$$\sum_{0 \leq w \leq \sqrt{\frac{n}{D}}} r_3(n - Dw^3).$$

Введем обозначение для гауссовой суммы:

$$S(E_3, a, q) = \sum_{x, y, z \pmod{q}} e^{\frac{2\pi i a E_3(x, y, z)}{q}}.$$

Известно (см. [11]), что

$$r_3(n) = 2\pi\sqrt{n} \mathfrak{S}_3(n),$$

где

$$\mathfrak{S}_3(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3} \sum'_{a \pmod{q}} S(E_3, a, q) e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3} R(n, q)$$

– сингулярный ряд; $\sum'_{a \pmod{q}}$ означает суммирование по приведенной системе вычетов.

Опишем суть метода Е. П. Голубевой [8]. Пусть $0 < A < 1$ – постоянное число,

$$Q(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2,$$

$a_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) – целые числа, $D = a_1 a_2 a_3$. Е. П. Голубева вычислила асимптотику суммы ($2k \geq 2$ – четное число)

$$\sum_{\substack{m=n-w^{2k} \\ 0 \leq w \leq An^{\frac{1}{2k}}}} \sqrt{m} \mathfrak{S}_Q(m), \quad (8)$$

где $\mathfrak{S}_Q(m)$ – сингулярный ряд задачи

$$m = Q(x, y, z).$$

Пусть

$$L\left(s, \left(\frac{-m}{\cdot}\right)\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{-m}{r}\right) r^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

– L -ряд Дирихле с квадратичным характером $\left(\frac{-m}{\cdot}\right)$. Рассмотрим прямоугольник

$$\sigma \leq \operatorname{Re} s \leq 1, \quad |\operatorname{Im} s| < T \quad \left(\sigma > \frac{1}{2}, T > 1\right). \quad (9)$$

Пусть $S(Q, a, q)$ – гауссова сумма, ассоциированная с тернарной формой $Q(x, y, z)$,

$$R(m, q) = \sum'_{a \pmod{q}} S(Q, a, q) e^{-\frac{2\pi i a m}{q}}.$$

Е. П. Голубева заметила, что при отсутствии у $L\left(s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)$, $d^2|m$, $(d, 2) = 1$, нулей в прямоугольнике (9) сингулярный ряд

$$\mathfrak{S}_Q(m) = \sum_{q=1}^{\infty} R(m, q)/q^3$$

хорошо приближается коротким отрезком

$$\sum_{q \leq M} R(m, q)/q^3.$$

Связь $\mathfrak{S}_Q(m)$ с L -рядами задается соотношением ($\operatorname{Re} s > 0$)

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R(m, q)}{q^{3+s}} = C(m, s) \sum_{\substack{d^2|m \\ (d, 2)=1}} \frac{L\left(1+s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)}{d^{1+2s}},$$

где $C(m, s)$ – несущественный множитель.

Вклад тех $m = n - w^{2k}$, $0 \leq w \leq n^{\frac{1}{2k}}$, в (8), для которых $L\left(s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)$, $d^2|m$, $(d, 2) = 1$, возможно, имеют нули в (9), оценивается сверху посредством большого решета (см. плотностные теоремы Монтгомери в [12]). Эти соображения позволяют быстро получить асимптотику суммы (8).

Будем применять результаты Е. П. Голубевой в форме, предложенной В. А. Быковским (см. [9, лемма 3]). Пусть

$$I = \sum_{0 \leq w \leq \sqrt{\frac{n}{D}}} \sqrt{n - Dw^2} \mathfrak{S}_3(n - Dw^2).$$

По [8, 9] имеем

$$I = \sum_{0 \leq w \leq n^\theta} \sqrt{n - Dw^2} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R(n - Dw^2, q)}{q^3} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) \right) + O_\varepsilon(R),$$

где

$$R = n^{1/2+\varepsilon} \left(n^{\frac{4(1-\sigma)}{\sigma}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D}} M^{-(1-\sigma)} \right), \quad 1/2 < \sigma < 1, \quad M \geq 1.$$

Меняем порядок суммирований:

$$I = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^3} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) \sum'_{a(\bmod q)} S(E_3, a, q) \times \\ \times e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} \sum_{0 \leq w \leq n^\theta} \sqrt{n - Dw^2} e^{\frac{2\pi i a Dw^2}{q}} + O_\varepsilon(R). \quad (10)$$

Рассмотрим сумму

$$I_1 = \sum_{0 \leq w \leq n^\theta} \sqrt{n - Dw^2} e^{\frac{2\pi i a Dw^2}{q}}.$$

Пусть $w = w_2 q + w_1$. Тогда

$$I_1 = \sum_{w_1(\bmod q)} \left(\frac{n}{q\sqrt{D}} \int_0^1 \sqrt{1 - X^2} dX + O_\varepsilon\left(\frac{n^{1/2+\varepsilon}}{\sqrt{D}}\right) \right) e^{\frac{2\pi i a Dw_1^2}{q}}. \quad (11)$$

Очевидно,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - X^2} dX = \frac{\pi}{4}.$$

Соединяя (10) и (11), имеем

$$I = \frac{\pi n}{4\sqrt{D}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \exp\left(\frac{-q}{M}\right).$$

$$\cdot \sum'_{a \pmod{q}} S(f, a, q) e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} + O_\varepsilon(\mathcal{L}),$$

где $S(f, a, q)$ – гауссова сумма, ассоциированная с формой $f = x^2 + y^2 + z^2 + Dw^2$,

$$\mathcal{L} = n^{1/2+\varepsilon} \left(\frac{M}{\sqrt{D}} + n^{\frac{4(1-\sigma)}{\sigma}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D}} M^{-(1-\sigma)} \right). \quad (12)$$

Пусть

$$\mathfrak{S}_f(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum'_{a \pmod{q}} S(f, a, q) e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} R_1(n, q)$$

– сингулярный ряд задачи

$$n = [1, 1, 1, D].$$

Имеем ($c > 0$)

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) R_1(n, q) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } s=c} \Gamma(s) M^s \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n, q)}{q^{4+s}} \right) ds. \end{aligned}$$

Известно (см., например, [13, 14]), что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n, q)}{q^{4+s}} = \prod_{p|2nD} X_p(n, s) \cdot L^{-1}(s+2, \chi),$$

где χ – характер $(\text{mod } D)$, $X_p(n, s)$ – всюду голоморфный множитель, выражение для которого даётся в [13, 14]. По теореме о вычетах получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathfrak{S}_f(n) + \int_{\text{Re } s=-1+\varepsilon} \Gamma(s) M^s \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n, q)}{q^{4+s}} \right) ds = \\ &= \mathfrak{S}_f(n) + O_\varepsilon(n^\varepsilon/M), \end{aligned}$$

поскольку

$$\prod_{p|2nD} X_p(n, -1+\varepsilon) \ll n^\varepsilon.$$

Имеем теперь

$$I = \frac{\pi n}{4\sqrt{D}} \mathfrak{S}_f(n) + O_\varepsilon(\mathcal{L}) + O_\varepsilon\left(\frac{n^{1+\varepsilon}}{\sqrt{DM}}\right).$$

Последний член можно отбросить, поскольку

$$\mathcal{L} \gg_\varepsilon \frac{n^{1+\varepsilon}}{\sqrt{DM}}.$$

Остается оптимально выбрать параметры в (12). Приравнявая первый и третий члены суммы в (12), получим

$$M = n^{\frac{1}{2(2-\sigma)}}.$$

Приравнявая далее первый и второй члены, получаем

$$\theta = \frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)} \cdot \frac{7(16/7-\sigma)}{\sigma}.$$

При $0 < \theta < \frac{1}{2}$ $\sigma = \sigma(\theta)$ изменяется в пределах $c_0 < \sigma(\theta) < 1$, где $c_0 \approx \frac{9}{10}$. Положим

$$c(\theta) = \frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)}.$$

Имеем

$$\mathcal{L} = \frac{n^{1+\varepsilon-c(\theta)}}{\sqrt{D}},$$

и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. A. Tartakowsky, *Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1, x_2, \dots, x_s)$ ($s \geq 4$) darstellbar sind*, Изв. АН СССР. Отд. физ.-мат. наук **7** (1929), 111–122, 165–196.
2. G. L. Watson, *Quadratic diophantine equations*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **253** (1960), 227–254.
3. J. S. Hsia and M. I. Icaza, *Effective version of Tartakowsky's theorem*, Acta Arith. **89**, No. 3 (1999), 235–253.
4. А. В. Малышев, *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **65** (1962), 212 с.
5. О. М. Фоменко, *Оценки внутреннего произведения Петерсона с приложением к теории кватернарных квадратичных форм*, Докл. АН СССР **152**, No. 3 (1963), 559–562.

6. О. М. Фоменко, *Оценки скалярных произведений Петерсона параболических форм и арифметические приложения*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 158–179.
7. О. М. Фоменко, *Применения формулы Петерсона для билинейной формы от коэффициентов Фурье параболических форм*, Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 143–166.
8. Е. П. Голубева, *О проблеме Варинга для тернарной квадратичной формы и произвольной четной степени*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 27–37.
9. В. А. Быковский, *Плотностные теоремы и среднее значение арифметических функций на коротких интервалах*, Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 56–70.
10. О. М. Фоменко, *Распределение целых точек на четырехмерной сфере*, Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 226–236.
11. Р. Т. Bateman, *On the representations of a number as the sum of three squares*, Trans. Amer. Math. Soc. **71**, No. 1 (1951), 70–101.
12. Г. Монгмери, *Мультипликативная теория чисел*, М., 1974.
13. Г. А. Ломадзе, *О числе представлений чисел квадратичными формами с четырьмя переменными*, Труды Тбилисского мат. ин-та **40** (1971), 106–139.
14. Т. В. Вепхвадзе, *К аналитической теории квадратичных форм*, Труды Тбилисского мат. ин-та **72** (1983), 12–31.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 12 февраля 2001 г.