

Определение типа Римана для узкого интеграла Данжуа–Бохнера*

А. П. СОЛОДОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 517.518.126

Ключевые слова: банаховозначное интегрирование, узкий интеграл Данжуа–Бохнера, HL-интеграл.

Аннотация

Рассматривается обобщение узкого интеграла Данжуа на случай функций, определённых на отрезке прямой и принимающих значения в банаховом пространстве. Доказывается эквивалентность этого интеграла и HL-интеграла, определяемого при помощи обобщённых сумм Римана.

Abstract

A. P. Solodov, Riemann-type definition for the restricted Denjoy–Bohner integral, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 7 (2001), no. 3, pp. 887–895.

The generalization of the restricted Denjoy integral is studied for the case of Banach-valued functions. The equivalence between this integral and the HL-integral defined with the use of generalized Riemann sums is proved.

В этой заметке рассматриваются интегралы для функций, определённых на отрезке прямой и принимающих значения в банаховом пространстве. Основная цель работы — дать эквивалентное определение узкого интеграла Данжуа–Бохнера при помощи обобщённых сумм Римана, а также изучить, как соотносится этот интеграл с интегралом Хенстока.

В случае действительного пространства значений узкий интеграл Данжуа эквивалентен обобщённому интегралу Римана, известному как интеграл Хенстока (см. [3]). Указанная эквивалентность является следствием так называемой леммы Сакса–Хенстока (см. [6, с. 17 и 104]). В [11] было показано, что в случае бесконечномерного банахова пространства значений утверждение, аналогичное лемме Сакса–Хенстока, не выполняется. В связи с этим возникает вопрос, сохранится ли в этом случае эквивалентность между узким интегралом Данжуа–Бохнера и интегралом Хенстока. Мы увидим в дальнейшем, что на этот вопрос следует дать отрицательный ответ. Другими словами, для бесконечномерного банахова пространства значений интеграл Хенстока оказывается существенно более общим, чем узкий интеграл Данжуа–Бохнера (см.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 99–01–00354, 00–15–96143).

теорему 3.2). Тем не менее будет показано, что узкий интеграл Данжуа–Бохнера всё-таки допускает определение типа Римана, называемое НЛ-интегралом (теорема 2.2). Этот интеграл, введённый С. С. Као (см. [2]), является сужением интеграла Хенстока, в определение которого включено требование выполнения леммы Сакса–Хенстока.

Попытка доказать эквивалентность узкого интеграла Данжуа–Бохнера и НЛ-интеграла была сделана в работе [1]. Однако приведённое в ней доказательство ошибочно. В доказательстве теоремы 8 авторы не учитывают, что разбиение на множества, на которых функция должна быть абсолютно непрерывной в узком смысле, зависит от произвольного $\varepsilon > 0$.

Для полноты изложения приведём также (см. теорему 2.1) определение интеграла Бохнера при помощи обобщённых сумм Римана, полученное Wu Congxin и Yao Xiaobo в [9], и рассмотрим, как он соотносится с интегралом Макшейна (теорема 3.2).

1. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть X — банахово пространство, \mathbb{R} — действительная прямая, $[a, b]$ — отрезок на прямой.

Введём следующие определения, хорошо известные в действительном случае (см. [10, глава VII]).

Определение 1.1. Функция $F: [a, b] \rightarrow X$ называется VB^* -функцией на множестве $E \subset [a, b]$, если существует такое число $M > 0$, что для любого набора неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$, имеющих непустое пересечение с E , выполняется неравенство $\sum_{i=1}^n \omega(F, \Delta_i) < M$. (Здесь $\omega(F, P) = \sup_{t, s \in P} \|F(t) - F(s)\|$ — колебание функции F на множестве P .)

Определение 1.2. Функция $F: [a, b] \rightarrow X$ называется AC^* -функцией на множестве $E \subset [a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого набора неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$, имеющих непустое пересечение с E и удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^n |\Delta_i| < \delta$, выполняется неравенство $\sum_{i=1}^n \omega(F, \Delta_i) < \varepsilon$. (Здесь $|P|$ обозначает меру множества P .)

Определение 1.3. Функция $F: [a, b] \rightarrow X$ называется VBG^* -функцией на множестве $E \subset [a, b]$, если E представимо в виде счётного объединения множеств, на каждом из которых F является VB^* -функцией.

Определение 1.4. Функция $F: [a, b] \rightarrow X$ называется ACG^* -функцией на множестве $E \subset [a, b]$, если E представимо в виде счётного объединения множеств, на каждом из которых F является AC^* -функцией.

Определение 1.5. Пусть $F: [a, b] \rightarrow X$. Вектор $A \in X$ называется *производной* функции F в точке t_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = A.$$

Будем обозначать через X^* пространство линейных непрерывных функционалов над X .

Определение 1.6 (см. [7, с. 11]). Функция $F: [a, b] \rightarrow X$ называется *wAC*-функцией* на множестве $E \subset [a, b]$, если для каждого $x^* \in X^*$ функция x^*F является AC*-функцией на E .

Лемма 1.7 (см. [7, с. 22] и [12, с. 102]). *Почти всюду дифференцируемая функция $F: [a, b] \rightarrow X$ является AC*-функцией на множестве $E \subset [a, b]$ тогда и только тогда, когда она одновременно VB*- и wAC*-функция на E .*

Два следующих определения представляют собой банаховозначные обобщения интеграла Лебега и узкого интеграла Данжуа (см. [10, глава VII]).

Определение 1.8 (см. [9]). Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *интегрируемой по Бохнеру*, если существует почти всюду дифференцируемая AC*-функция $F: [a, b] \rightarrow X$, удовлетворяющая условию $F'(t) = f(t)$ п. в.

Замечание. Это определение эквивалентно определению, данному в [12, с. 93].

Определение 1.9 (см. [7, с. 45]). Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *интегрируемой по Данжуа–Бохнеру в узком смысле*, если существует почти всюду дифференцируемая ACG*-функция $F: [a, b] \rightarrow X$, удовлетворяющая условию $F'(t) = f(t)$ п. в.

Введём интегралы, определяемые при помощи обобщённых сумм Римана (см. [2], [4] и [11]). Пусть \mathcal{I} — совокупность всех отрезков, содержащихся в $[a, b]$. *Разбиением T* отрезка $[a, b]$ назовём набор пар $(\xi_k, \Delta_k) \in \mathbb{R} \times \mathcal{I}$, $k = 1, \dots, n$, обладающий следующими свойствами:

- 1) отрезки Δ_i и Δ_j не перекрываются, если $i \neq j$,
- 2) $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k = [a, b]$.

Определение 1.10. Разбиение T отрезка $[a, b]$ называется *δ -согласованным по Хенстоку*, если каждая пара $(\xi, \Delta) \in T$ удовлетворяет условию

$$\xi \in \Delta \subset (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)).$$

Определение 1.11. Разбиение T отрезка $[a, b]$ называется *δ -согласованным по Макшейну*, если каждая пара $(\xi, \Delta) \in T$ удовлетворяет условию

$$\Delta \subset (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)).$$

Определение 1.12. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *интегрируемой по Хенстоку* на отрезке $[a, b]$, если существует $I \in X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся положительная функция $\delta(\xi)$, такая что для

любого δ -согласованного по Хенстоку разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_T f(\xi_k) |\Delta_k| - I \right\| < \varepsilon.$$

Вектор I называется *интегралом Хенстока* функции f по отрезку $[a, b]$, что записывается в виде $I = (H) \int_a^b f dx$.

Определение 1.13. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *интегрируемой по Макшейну* на отрезке $[a, b]$, если существует $I \in X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся положительная функция $\delta(\xi)$, такая что для любого δ -согласованного по Макшейну разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_T f(\xi_k) |\Delta_k| - I \right\| < \varepsilon.$$

Вектор I называется *интегралом Макшейна* функции f по отрезку $[a, b]$, что записывается в виде $I = (M) \int_a^b f dx$.

Определение 1.14. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *HL-интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, если существует функция $F: [a, b] \rightarrow X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся положительная функция $\delta(\xi)$, такая что для любого δ -согласованного по Хенстоку разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\sum_T \|f(\xi_k) |\Delta_k| - F(\Delta_k)\| < \varepsilon.$$

(Здесь и далее $F(\Delta)$ — приращение функции F на отрезке Δ .)

Определение 1.15. Функция $f: [a, b] \rightarrow X$ называется *ML-интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, если существует функция $F: [a, b] \rightarrow X$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся положительная функция $\delta(\xi)$, такая что для любого δ -согласованного по Макшейну разбиения T отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$\sum_T \|f(\xi_k) |\Delta_k| - F(\Delta_k)\| < \varepsilon.$$

(В [9] ML-интеграл вводился как сильный интеграл Макшейна.)

Легко видеть, что HL- и ML-интегралы являются сужениями интегралов Хенстока и Макшейна.

В дальнейшем нам понадобятся следующие очевидные утверждения.

Лемма 1.16. Пусть функция $f: [a, b] \rightarrow X$ HL-интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда её первообразная $F: [a, b] \rightarrow X$ непрерывна.

Лемма 1.17. Пусть функция $f: [a, b] \rightarrow X$ обращается в нуль почти всюду. Тогда она HL-интегрируема и $\int_a^b f dx = 0$.

Приведём также сведения, касающиеся равномерной интегрируемости (см. [5] и [8]).

Определение 1.18. Функции $f_\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называются *равномерно интегрируемыми по Хенстоку*, если существуют числа I_α со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся положительная функция $\delta(\xi)$ на $[a, b]$, такая что для любого δ -согласованного по Хенстоку разбиения T отрезка и для всех α выполняются неравенства

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_\alpha(\xi_k) |\Delta_k| - I_\alpha \right\| < \varepsilon.$$

Определение 1.19. Функции $F_\alpha: [a, b] \rightarrow X$ называются *равномерно АСG*-функциями* на множестве $E \subset [a, b]$, если E представимо в виде счётного объединения множеств, на каждом из которых все F_α являются АС*-функциями.

Лемма 1.20. Пусть семейство функций $f_\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ поточечно ограничено. Тогда если функции f_α равномерно интегрируемы по Хенстоку, то их первообразные $F_\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ являются равномерно АСG*-функциями.

Замечание. В [2] и [8] было дано несколько другое определение равномерной обобщённой абсолютной непрерывности, и в утверждениях, аналогичных лемме 1.20, требовалась поточечная сходимость функций семейства. Однако, как видно из доказательства (см. [2] и [8]), лемма 1.20 также справедлива.

2. Основной результат

В работе [9] был доказан следующий результат.

Теорема 2.1. Пусть X — банахово пространство. Тогда функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Бохнеру тогда и только тогда, когда она *ML-интегрируема*.

Наша задача — получить аналогичный результат для узкого интеграла Данжуа–Бохнера.

Теорема 2.2. Пусть X — банахово пространство. Тогда функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Данжуа–Бохнеру в узком смысле тогда и только тогда, когда она *NL-интегрируема*.

Доказательство.

\Leftarrow Пусть f является NL-интегрируемой и имеет первообразную F . Покажем, что f интегрируема по Данжуа–Бохнеру в узком смысле. Для этого необходимо доказать следующее.

1. F почти всюду дифференцируема и $F' = f$ п. в.
2. F является АСG*-функцией.

Проверим каждое из утверждений.

1. Для каждого натурального n введём множество $P_n \subset [a, b]$ следующим образом: $t \in P_n$, если существует последовательность отрезков $\{\Delta_i^{(t)}\}_{i=1}^{\infty}$, стягивающихся к t и удовлетворяющих неравенству

$$\|F(\Delta_i^{(t)}) - f(t)|\Delta_i^{(t)}|\| \geq \frac{|\Delta_i^{(t)}|}{n}. \quad (1)$$

Ясно, что множество точек, где F недифференцируема или $F'(t) \neq f(t)$, содержится в $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Предположим, $|P_n| > 0$. Выберем положительную функцию $\delta(\xi)$ из условия НЛ-интегрируемости для $\varepsilon = |P_n|/(2n)$. Семейство отрезков

$$\Delta_i^{(t)} \subset (t - \delta(t), t + \delta(t)), \quad t \in P_n,$$

покрывает множество P_n в смысле Витали. По теореме Витали о покрытиях (см. [10]) можно выделить конечный набор неперекрывающихся отрезков Δ_r , $1 \leq r \leq k$, со свойством

$$\sum_{r=1}^k |\Delta_r^{(t_r)}| \geq \frac{|P_n|}{2}. \quad (2)$$

Объединяя (1) и (2), получим

$$\sum_{r=1}^k \|F(\Delta_r^{(t_r)}) - f(t_r)|\Delta_r^{(t_r)}|\| \geq \frac{|P_n|}{2n},$$

что противоречит выбору $\delta(\xi)$. Следовательно, $|P_n| = 0$ для всех n . Поэтому $\left\| \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \right\| = 0$. Следовательно, функция F почти всюду дифференцируема и $F' = f$ п. в.

2. Доказательство проведём, следуя [3], где рассмотрен случай функций, принимающих действительные значения. Выберем положительную функцию $\delta(\xi)$ из условия НЛ-интегрируемости для $\varepsilon = 1$ (без ограничения общности можно считать $\delta(\xi) < 1$). Для каждого натурального m найдём максимальное l , такое что $a + l/(2m) \leq b$. Положим для всех m и k , $k \leq l + 1$,

$$E_m^k = \left\{ t \in \left[a + \frac{k-1}{2m}, a + \frac{k}{2m} \right) \cap [a, b] : \|f(t)\| \leq m, \delta(t) > \frac{1}{m} \right\}.$$

Очевидно, что $[a, b] = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{l+1} E_m^k$. Поэтому достаточно доказать, что F является VB*-функцией на каждом из множеств E_m^k . Фиксируем произвольные m и k , для которых множество E_m^k не пусто. Рассмотрим произвольный набор неперекрывающихся отрезков $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^n$ с концами из E_m^k . Из построения множеств E_m^k видно, что подразбиение $\{(c_i, [c_i, d_i])\}_{i=1}^n$ является δ -согласованным по Хенстоку. Так как функция F непрерывна (по лемме 1.16), существуют точки $u_i, v_i \in [c_i, d_i]$, такие что

$$\|F(v_i) - F(u_i)\| = \omega(F, [c_i, d_i]). \quad (3)$$

Принимая во внимание равенство (3), определение множества E_m^k и δ -согласованность по Хенстоку подразделения, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega(F, [c_i, d_i]) &= \sum_{i=1}^n \|F(v_i) - F(u_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|F(v_i) - F(c_i)\| + \\ &+ \sum_{i=1}^n \|F(u_i) - F(c_i)\| \leq \sum_{i=1}^n \|F(u_i) - F(c_i) - f(c_i)(u_i - c_i)\| + \\ &+ \sum_{i=1}^n \|f(c_i)\|(u_i - c_i) + \sum_{i=1}^n \|F(v_i) - F(c_i) - f(c_i)(v_i - c_i)\| + \\ &+ \sum_{i=1}^n \|f(c_i)\|(v_i - c_i) < 1 + m \cdot \frac{1}{m} + 1 + m \cdot \frac{1}{m} = 4. \end{aligned}$$

Итак, F является VB^* -функцией на E_m^k . Рассмотрим семейство функций $\{x^*f, \|x^*\| = 1\}$. Оно поточечно ограничено, так как для всех функционалов с нормой единица выполняется неравенство $|x^*f(t)| \leq \|f(t)\|$. В силу HL -интегрируемости f функции этого семейства являются равномерно интегрируемыми по Хенстоку. По лемме 1.20 их первообразные x^*F будут равномерно ACG^* -функциями. Это означает, что отрезок $[a, b]$ представим в виде счётного объединения множеств Q_n , на каждом из которых F является wAC^* -функцией.

Таким образом, на множествах $E_m^k \cap Q_n$ функция F будет одновременно VB^* - и wAC^* -функцией. Принимая во внимание лемму 1.7, получим, что F является AC^* -функцией на $E_m^k \cap Q_n$, то есть ACG^* -функцией на $[a, b]$. Следовательно, интегрируемость в узком смысле по Данжуа–Бохнеру доказана.

\Rightarrow Предположим теперь, что функция f интегрируема по Данжуа–Бохнеру в узком смысле, то есть существует почти всюду дифференцируемая ACG^* -функция F , такая что $F'(t) = f(t)$ п. в. Покажем, что f является HL -интегрируемой с первообразной F . Обозначим через D множество точек $t \in [a, b]$, в которых F дифференцируема и $F'(t) = f(t)$. Тогда $E = [a, b] \setminus D$ имеет меру нуль. В силу леммы 1.17 можно считать, что $f(t) = 0$ для всех $t \in E$. Так как F является ACG^* -функцией, E представимо в виде счётного объединения множеств E_n , на каждом из которых F является AC^* -функцией.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Положительную функцию $\delta(\xi)$ выберем следующим образом. Если $\xi \in D$, то по определению производной можно выбрать $\delta(\xi) > 0$ так, чтобы

$$\|F(\Delta) - f(\xi)|\Delta|\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|\Delta|, \text{ если } \xi \in \Delta \subset (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)). \quad (4)$$

Так как F является AC^* -функцией на E_n , найдётся такое $\delta_n > 0$, что для любого набора неперекрывающихся отрезков $\{\Delta_i\}_{i=1}^m$, имеющих непустое пересечение с E_n и удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^m |\Delta_i| < \delta_n$, выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^m \omega(F, \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \quad (5)$$

Множество E_n имеет меру нуль, поэтому можно выбрать положительную функцию $\delta(\xi)$ на E_n так, чтобы для любой совокупности непересекающихся интервалов $(\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi))$ с $\xi \in E_n$ выполнялось неравенство

$$\left| \bigcup_{\xi \in E_n} (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)) \right| < \delta_n. \quad (6)$$

Итак, $\delta(x)$ определена для всех точек отрезка. Рассмотрим произвольное δ -согласованное по Хенстоку разбиение T отрезка $[a, b]$. Объединяя соотношения (5) и (6) и учитывая, что $f(t) = 0$ при $t \in E_n$, приходим к неравенствам

$$\sum_{\xi_k \in E_n} \|f(\xi_k)|\Delta_k| - F(\Delta_k)\| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \quad (7)$$

Используя неравенство (4), получим

$$\sum_{\xi_k \in D} \|f(\xi_k)|\Delta_k| - F(\Delta_k)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

И наконец, применяя (7) и (8), можем заключить, что

$$\sum_{k=1}^n \|f(\xi_k)|\Delta_k| - F(\Delta_k)\| < \varepsilon.$$

Таким образом, функция f является НЛ-интегрируемой.

3. Связь с интегралами Макшейна и Хенстока

В работе [11] была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть X — банахово пространство. Тогда эквивалентны следующие свойства:

- 1) X — конечномерное пространство;
- 2) функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку тогда и только тогда, когда она НЛ-интегрируема;
- 3) функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Макшейну тогда и только тогда, когда она МЛ-интегрируема.

Объединяя теоремы 2.1, 2.2 и 3.1, получаем следующий результат.

Теорема 3.2. Пусть X — банахово пространство. Тогда эквивалентны следующие свойства:

- 1) X — конечномерное пространство;
- 2) функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Хенстоку тогда и только тогда, когда она интегрируема по Данжуа–Бохнеру в узком смысле;

3) функция $f: [a, b] \rightarrow X$ интегрируема по Макшейну тогда и только тогда, когда она интегрируема по Бохнеру.

Автор пользуется случаем поблагодарить профессора Скворцова В. А. за помощь в работе над статьей.

Литература

- [1] Canoy Jr. S. R., Navarro M. P. A Denjoy-type integral for Banach-valued functions // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1995. — Vol. 44, no. 2. — P. 330–336.
- [2] Cao S. S. The Henstock integral for Banach-valued functions // SEA Bull. Math. — 1992. — Vol. 16, no. 1. — P. 35–40.
- [3] Gordon R. Equivalence of the generalized Riemann and restricted Denjoy integral // Real Analysis Exchange. — 1986–1987. — Vol. 12, no. 2. — P. 551–574.
- [4] Gordon R. The McShane integration of Banach-valued functions // Illinois J. Math. — 1990. — Vol. 34. — P. 557–567.
- [5] Kurzweil J., Jarnik J. Equiintegrability and controlled convergence of Perron-type integrable functions // Real Analysis Exchange. — 1991–1992. — Vol. 17. — P. 110–139.
- [6] Pfeffer W. The Riemann approach to integration. — Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [7] Solomon D. W. Denjoy integration in abstract spaces // Memoirs of the AMS. — 1969. — No. 85.
- [8] Wang P. Equiintegrability and controlled convergence for the Henstock integral // Real Analysis Exchange. — 1993–1994. — Vol. 19. — P. 236–241.
- [9] Wu Congxin, Yao Xiaobo. A Riemann-type definition of the Bochner integral // J. Math. Study. — 1994. — Vol. 27, no. 1. — P. 32–36.
- [10] Сакс С. Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
- [11] Солодов А. П. Интегралы Хенстока и Макшейна для банаховозначных функций // Мат. заметки. — В печати.
- [12] Хилле Е., Филиппс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.

Статья поступила в редакцию в октябре 1997 г.