Функциональный закон повторного логарифма для ассоциированных случайных полей*

А. В. БУЛИНСКИЙ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 519.21

Ключевые слова: ассоциированность (FKG-неравенства), случайные поля, функциональный закон повторного логарифма.

Аннотация

В математической статистике, теории надежности и статистической физике имеется много интересных моделей, описываемых семействами ассоциированных случайных величин. В частности, любая совокупность независимых действительных величин автоматически является ассоциированной. Цель работы — получить просто проверяемые условия, обеспечивающие выполнение функционального закона повторного логарифма для ассоциированного случайного поля $\left\{X_j,\, j \in \mathbb{Z}^d\right\}$ с действительными значениями, заданного на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$. Если это поле стационарно в широком смысле, то упомянутые условия таковы: $\sup_j E|X_j|^s < \infty$ при некотором $s \in (2,3]$ и коэффициент Кокса–Гриммета $u(n)$, элементарно выражающийся через ковариационную функцию поля, допускает оценку вида $u(n) = O(n^{-\lambda})$ при $n \to \infty$, где $\lambda > d/(s-1)$. Доказательство основано на новом максимальном неравенстве, установленном А. В. Булинским и М. С. Кином, на методах известных работ В. Штрассена, Дж. Чоувера, И. Беркеша. Существенную роль при этом играет оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для ассоциированных случайных полей, полученная в недавних статьях автора.

Работа построена следующим образом: § 1 — это введение, дающее представление об ассоциированности и исследованиях в области предельных теорем для семейств ассоциированных величин, в § 2 вводятся необходимые обозначения и формулируется основной результат, в § 3 с помощью 6 лемм проводится доказательство функционального закона повторного логарифма.

Abstract

A. V. Bulinski, The functional law of the iterated logarithm for associated random fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 623–639.

There are a number of interesting models in mathematical statistics, reliability theory and statistical physics described by means of families of associated random variables. In particular, any collection of independent real-valued random variables is automatically associated. The goal of the paper is to provide simply verifiable conditions to guarantee the validity of the functional law of the iterated logarithm for real-valued associated random field $\left\{X_j,\, j \in \mathbb{Z}^d\right\}$ defined on the lattice $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 1$. If this field is wide-sense stationary, the mentioned conditions read: $\sup_j E|X_j|^s < \infty$ for some $s \in (2,3]$ and the estimate $u(n) = O(n^{-\lambda})$ as $n \to \infty$ for some $\lambda > d/(s-1)$

*Исследование поддержано РФФИ, грант № 93–01–01454.

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 623–639.

is admitted by the Cox – Grimmett coefficient $u(n)$ having an elementary expression in terms of the covariance function of the field. Being based on the new maximal inequality established by A. V. Bulinski and M. S. Keane, the proof employs the methods of the known papers by V. Strassen, J. Chover and I. Berkes. An essential role is played also by the estimates of the convergence rates in the central limit theorem for associated random fields obtained in the author's recent publications.

The paper is organized as follows: § 1 is the introduction describing the association concept and indicating the investigations in the domain of limit theorems for families of associated variables. Some necessary notations and the formulation of the main result are contained in § 2. The functional law of the iterated logarithm is proved in § 3 with the help of 6 lemmas.

§ 1 Введение

В течение почти 30 лет понятие ассоциированности, предложенное в работе [18], и его различные модификации привлекают большое внимание исследователей. В математической статистике, теории надежности, статистической физике имеется много интересных моделей, описываемых семействами случайных величин, обладающих свойством ассоциированности, см., например, [20], [21], [19], [7], [23], [25], [27] и там же ссылки.

Напомним, что конечный набор действительных случайных величин (д.с.в.) $Y_1, \dots, Y_n$ называется *ассоциированным*, если

$$\operatorname{cov}(f(Y_1, \dots, Y_n), g(Y_1, \dots, Y_n)) \geqslant 0$$

для любых неубывающих по каждой координате функций $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, в предположении, что данная ковариация определена (достаточно рассматривать лишь ограниченные покоординатно неубывающие функции f и g). Бесконечное семейство д.с.в. *ассоциировано*, если этим свойством обладает любой конечный набор величин этого семейства.

Известно, что любая совокупность независимых д.с.в. ассоциирована и что введенная концепция охватывает широкий класс зависимых величин. Основное преимущество исследования этого класса в отличие от класса процессов и полей с перемешиванием (см., например, [1], [17]) состоит в следующем. Естественное условие ослабления зависимости рассматриваемых величин с ростом их "удаленности" друг от друга на параметрическом множестве, которое используется для индексации семейства, формулируется в терминах лишь ковариационной функции.

За последние 15 лет были получены просто проверяемые условия, обеспечивающие для процессов и полей со свойством ассоциированности выполнение основных предельных теорем теории вероятностей, таких как усиленный закон больших чисел, центральная предельная теорема (ЦПТ), слабый принцип инвариантности и др., см., например, [22], [14], [23], [9], [10], [11], [24], [16], [4], [12] и там же библиографию.

Функциональный закон повторного логарифма (ФЗПЛ) был установлен только для процессов, в том числе векторно-значных, обладающих свойством ассоциированности или некоторым его обобщением, см. [15]. Цель данной работы — дать простые и широкие условия применимости ФЗПЛ к ассоциированным случайным полям. Для этого используется новое максимальное неравенство, полученное в статье [12], а также методы известных работ [26], [13], [8]. Существенную роль играет идея о выполнении ФЗПЛ при наличии определенной скорости сходимости в ЦПТ. Такая идея возникла еще при получении обычного закона повторного логарифма для сумм независимых слагаемых, см., например, [5]. В данной работе мы опираемся на оценки скорости сходимости в ЦПТ для ассоциированных случайных полей, содержащиеся в недавних статьях [3], [10], [11].

§ 2 Обозначения и основной результат

Пусть $\{X_j,\, j\in\mathbb{Z}^d\}$ — ассоциированное случайное поле, т. е. семейство ассоциированных д.с.в., заданных на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d\geqslant 1$, и некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$. При наличии конечного второго момента у величин X_j определим *коэффициент Кокса – Гриммета* [14]:

$$u(n):=\sup_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{q:\,\|q-j\|\geqslant n}\operatorname{cov}(X_j,X_q),$$

где $n\geqslant 0$, а $\|x\|=\max\limits_{k=1,\dots,d}|x_k|$ для $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$.

Введем в пространстве Скорохода $D([0,1]^d)$ семейство случайных функций

$$H_n(t):=\frac{S(n[0,t])}{(2n^d\,\mathrm{LL}\,n)^{1/2}},\quad t=(t_1,\dots,t_d)\in[0,1]^d,\ n\in\mathbb{N},$$

здесь $Lx:=\max\{1,\log x\}$ при $x>0$, $\mathrm{LL}\,x=L(Lx)$, $[0,t]=[0,t_1]\times\ldots\times[0,t_d]$, а для $V\subset\mathbb{R}^d$

$$S(V):=\sum_{j\in V}X_j,\quad nV:=\{y=nz,\ z\in V\}.$$

Сумма по пустому множеству считается равной нулю. Разумеется, $S(V)=S(V,\omega)$ и $H_n(t)=H_n(t,\omega)$, так как $X_j=X_j(\omega)$, $\omega\in\Omega$.

Определим ([26], [28]) *шар Штрассена* $\mathbb{K}_R$ радиуса $R\geqslant 0$ следующим образом:

$$\mathbb{K}_R=\left\{x(t),\,t\in[0,1]^d\colon x(t)=\int_0^{t_1}\!\!\ldots\int_0^{t_d}h(z)\,dz,\ \int_0^1\!\!\ldots\int_0^1(h(z))^2\,dz\leqslant R^2\right\}.$$

Теорема. *Пусть $\{X_j,\, j\in\mathbb{Z}^d\}$, $d\geqslant 1$, — ассоциированное случайное поле, центрированное и стационарное в широком смысле. Пусть для некоторого $s\in(2,3]$*

$$M_s:=\sup_{j\in\mathbb{Z}^d}E|X_j|^s<\infty, \tag{1}$$

и пусть для некоторых $c_0 > 0$, $\lambda > d/(s-1)$

$$u(n) \leqslant c_0 n^{-\lambda} \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Тогда справедлив ФЗЛП, т. е. с вероятностью 1 множество предельных точек семейства $\{H_n,\, n \geqslant 1\}$ в пространстве $D([0,1]^d)$, снабженном равномерной метрикой, совпадает с $\mathbb{K}_{\sigma_0}$, где

$$\sigma_0^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \operatorname{cov}(X_0, X_j). \tag{3}$$

Замечание 1. Условия теоремы влекут сходимость ряда (3). Тривиальный случай $\sigma_0 = 0$ означает, что $X_j = 0$ почти наверное для всех $j \in \mathbb{Z}^d$. Поэтому далее считаем $\sigma_0 > 0$.

§ 3 Доказательство

Обозначим $\mathcal{A}$ совокупность параллелепипедов вида

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R}^d\colon 0 \leqslant a_i < x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, d\}.$$

Для $Q \subset \mathbb{R}^d$ положим $\widetilde{Q} = Q \cap \mathbb{Z}^d$. Очевидно, $S(Q) = S(\widetilde{Q})$. Пусть $|Q|$ — мера Лебега измеримого множества $Q \subset \mathbb{R}^d$, имеющего положительную меру, и пусть $|Q|$ — число элементов Q, когда Q — конечное множество. Для $V = (a,b] \in \mathcal{A}$ введем

$$M(V) := \max\{|S(Q)|\colon Q = (a,q] \subset V\}.$$

Нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1 ([12]). *Пусть центрированное ассоциированное случайное поле $\{X_j,\, j \in \mathbb{Z}^d\}$ удовлетворяет условию (1) для некоторого $s \in (2,3]$ и условию (2) для некоторых $c_0 > 0$, $\lambda > 0$. Тогда для всех $V \in \mathcal{A}$, любого $x \geqslant x_0$, где x_0 зависит от d, s, M_s, c_0, λ и не зависит от V,*

$$P\left(M(V) \geqslant x|\widetilde{V}|^{1/2}\right) \leqslant 2P\left(|S(V)| \geqslant x|\widetilde{V}|^{1/2}/2\right). \tag{4}$$

Заметим, что, взяв любое $\varepsilon > 0$ и $x \geqslant x_0(\varepsilon, d, s, M_s, c_0, \lambda)$, вместо правой части (4) можно записать оценку $(1+\varepsilon)P\left(|S(V)| \geqslant (1-\varepsilon)x|\widetilde{V}|^{1/2}\right)$.

Если $V = (a,b] \subset \mathbb{R}^d$ и $b_i - a_i \geqslant 2$ для всех $i = 1, \ldots, d$, то

$$2^{-d}|V| \leqslant |\widetilde{V}| \leqslant 2^d|V|. \tag{5}$$

Кроме того, если $V_l = (a^{(l)}, b^{(l)}] \to \infty$, т. е. $\min\limits_{i=1,\ldots,d}(b_i^{(l)} - a_i^{(l)}) \to \infty$ при $l \to \infty$, то

$$|\widetilde{V}_l|/|V_l| \to 1, \quad \text{когда} \quad l \to \infty. \tag{6}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и каждого* $c > 1$ *найдется такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что с вероятностью* 1

$$\sup_{\substack{t,t'\in[0,1]^d,\\ \|t-t'\|\leqslant\delta}} |H_{[c^l]}(t) - H_{[c^l]}(t')| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad l > N(\varepsilon, c, \omega), \tag{7}$$

где $[\cdot]$ — *целая часть числа.*

Доказательство. Для $Q \subset \mathbb{R}^d$ положим $H_n(Q) := S(nQ)/(2n^d\,\mathrm{LL}\,n)^{1/2}$. Тогда $H_n(t) \equiv H_n([0,t])$ при $t \in [0,1]^d$. По лемме Бореля – Кантелли достаточно показать, что для некоторого $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=1}^{\infty} P\big(\sup_{Q\in\mathcal{A}_N} |H_{[c^l]}(Q)| \geqslant \varepsilon 2^{-d}\big) < \infty, \tag{8}$$

здесь $\mathcal{A}_N$ — подмножество $\mathcal{A}$, состоящее из $V = (a,b] \subset [0,1]^d$, таких, что $\Delta_0(V) := \min\limits_{i=1,\ldots,d}(b_i - a_i) \leqslant 1/N$.

Обозначим $P_l = P_l(\varepsilon, d, c, N)$ члены ряда (8). Тогда для $l \in \mathbb{N}$

$$P_l \leqslant P(\max|S(V)| \geqslant x_l) \leqslant 2\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{N} P(M(T_l(i,k)) \geqslant x_l 2^{-d-1}), \tag{9}$$

где максимум в (9) берется по $V \in \mathcal{A}$, $V \subset \big[0,[c^l]\big]^d$, имеющим $\Delta_0(V) \leqslant [c^l]/N$, а $x_l = \varepsilon 2^{-d}(2[c^l]\,\mathrm{LL}[c^l])^{1/2}$ и $T_l(i,k) := [c^l]\big\{[0,1]^d \cap \{x\in\mathbb{R}^d\colon (k-1)/N < x_i \leqslant k/N\}\big\}$.

Согласно лемме 1 для всех достаточно больших (в.д.б.) l

$$P_l \leqslant 4\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{N} P\big(|S(T_l(i,k))| \geqslant x_l 2^{-d-2}\big), \tag{10}$$

поскольку в силу (6)

$$x_l 2^{-d-1}|\widetilde{T}_l(i,k)| \sim \varepsilon N^{\frac{1}{2}} 2^{-2d-\frac{1}{2}}(\log l), \quad \text{когда} \quad l \to \infty. \tag{11}$$

При условиях леммы 1 по теореме 1 из [10] для любого конечного множества $V \subset \mathbb{Z}^d$ имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |P(S(V) \leqslant x\sigma(V)) - \Phi(x)| \leqslant A|V|\sigma(V)^{-s+\gamma}, \tag{12}$$

где $\sigma(V) = \big(ES(V)^2\big)^{1/2}$, Φ — функция распределения стандартной нормальной величины, а в качестве γ можно взять любое число, такое, что $\gamma > \gamma^* = \big((s-1)^{-1} + (\lambda+d)(ds(s-2))^{-1}\big)^{-1}$; величина A зависит от выбора γ, от s, d, M_s, c_0, λ, но не зависит от V.

Теперь заметим, что для V_l, фигурирующих в (6),

$$\sigma(V_l)^2/|V_l| \to \sigma_0^2 \ \text{ при } \ l \to \infty, \tag{13}$$

где σ_0^2 определяется формулой (3). Соотношение (13) — частный случай общих результатов о поведении дисперсий сумм, берущихся по растущим множествам, см., например, [2].

Применив (13) для $V_l = T_l(i,k)$, $i = 1,\ldots,d$, $k = 1,\ldots,N$, из (12) получаем, что при $\lambda > d/(s-1)$ и $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| P\left(|S(T_l(i,k))| \geqslant x_l 2^{-d-2}\right) - P\left(|\xi| \geqslant x_l 2^{-d-2} \sigma(T_l(i,k))^{-1}\right)\right| \leqslant \\ \leqslant A_1 |T_l(i,k)|^{-\tau_1} = A_1\left(N^{-1}[c^l]\right)^{-\tau_1}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $\tau_1, A_1 > 0$ не зависят от l. Всюду далее A_i, c_i, $i = 1, 2\ldots$ — некоторые оценочные множители, вообще говоря, зависящие от ряда параметров, но не зависящие от переменной, по которой совершается предельный переход.

Из (11) и (13) видим, что если выбрать $N \geqslant \alpha\sigma_0^2\varepsilon^{-2}2^{4d+3}$, где $\alpha > 2$, то при $i = 1,\ldots,d$, $k = 1,\ldots,N$ и в.д.б. l получим

$$y_l = x_l 2^{-d-2}\sigma(T_l(i,k))^{-1} \geqslant (\alpha \log l)^{1/2}.$$

Применяя известное неравенство

$$P(|\xi| \geqslant x) \leqslant x^{-1}(2/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0,$$

приходим к оценке

$$P(|\xi| \geqslant y_l) \leqslant A_2 l^{-\alpha/2}. \tag{15}$$

Учитывая (10), (14), (15), заключаем, что выполнено (8). Лемма доказана.

Обозначим $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^r$, характеристическую функцию (х.ф.) вектора $Z = (S(V_1)/\sigma(V_1),\ldots,S(V_r)/\sigma(V_r))$, где $V_1,\ldots,V_r \subset \mathbb{R}^r$, $r > 1$, и $\sigma(V_i) > 0$, $i = 1,\ldots,r$. Положим $f_0(t) = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{r} t_i^2}$, где $t = (t_1,\ldots,t_r) \in \mathbb{R}^r$. Для $V, W \subset \mathbb{R}^d$ определим

$$\rho(V,W) := \inf\{\|y - z\| \colon y \in V,\ z \in W\}.$$

Лемма 3. *Пусть $V_1,\ldots,V_r \in \mathcal{A}$ таковы, что*

$$\min_{\substack{i,\,p=1,\ldots,r,\\ i\neq p}} \rho(V_i, V_p) \geqslant c_1 v^{\mu_1}, \tag{16}$$

где $c_1, \mu_1 > 0$, а $v = \min\limits_{i=1,\ldots,r} |V_i|$. Пусть также

$$\sigma(V_i)^2 \geqslant c_2 |V_i|, \quad i = 1,\ldots,r. \tag{17}$$

Тогда при выполнении условий леммы 1 *можно указать* $\delta, \gamma, c_3, c_4 > 0$, *зависящие от* $V_1, \ldots, V_r$ *лишь через* r, c_1, c_2, *такие, что*

$$|f(t) - f_0(t)| \leqslant c_3 v^{-\delta} \quad \textit{при} \quad \|t\| \leqslant c_4 v^{\gamma}. \tag{18}$$

Доказательство. Если $v \leqslant 1$, то (18), очевидно, справедливо при любых $\delta, \gamma > 0$ и $c_3 = 2$. Пусть далее $v > 1$. Обозначим $f_i(x)$, $x \in \mathbb{R}$, х.ф. случайной величины $S(V_i)/\sigma(V_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда для всех $t \in \mathbb{R}^r$ имеем

$$|f(t) - f_0(t)| \leqslant \left| f(t) - \prod_{i=1}^{r} f_i(t_i) \right| + \sum_{i=1}^{r} \left| f_i(t_i) - e^{-\frac{t_i^2}{2}} \right|. \tag{19}$$

Заметим, что для любых $V, W \subset \mathbb{Z}^d$

$$\operatorname{cov}(S(V), S(W)) \leqslant u(\rho(V, W)) \min\{|V|, |W|\}. \tag{20}$$

Применяя неравенство Ньюмена ([22]) для х.ф. вектора, составленного из ассоциированных д.с.в., и учитывая (2), (20), имеем для t с $\|t\| \leqslant c_4 v^{\gamma}$ оценку

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \prod_{i=1}^{r} f_i(t_i) \right| &\leqslant 2 \sum_{i \neq p} |t_i|\, |t_p|\, (\sigma(V_i)\sigma(V_p))^{-1} \operatorname{cov}(S(V), S(W)) \leqslant \\ &\leqslant r^2 c_4^2 c_2^{-1} c_0^{-\lambda} v^{2\gamma - \lambda\mu_1} < A_3 v^{-\frac{\lambda\mu_1}{2}}, \end{aligned} \tag{21}$$

если выбрать $\gamma \leqslant \lambda\mu_1/2$.

Согласно [1] и [10] при условиях леммы 1 для $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — х.ф. случайной величины $S(V)/\sigma(V)$ (берется любое $V \subset \mathbb{Z}^d$, для которого $\sigma(V) > 0$) — справедливо неравенство

$$\left| \varphi(x) - e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leqslant e^{-\frac{x^2}{4}} \sum_{l=1}^{4} a_l \frac{|x|^{\beta_l + 1}}{\beta_l + 1} + \sum_{n=1}^{11} b_n \min\left\{ |x|^{\gamma_n - 1}, |x|^{\gamma_n + 1} \right\}$$

при

$$|x| \leqslant \min\left\{ \frac{c_5 \sigma(V)}{m^d k^{d-1}}, \min_{1 \leqslant l \leqslant 4} \left(\frac{1}{8 a_l} \right)^{\frac{1}{\beta_l - 1}} \right\},$$

где $k, m \in \mathbb{N}$ таковы, что $k \leqslant c_6 m$, $k \leqslant c_7 |V|^{1/2}$, а β_l, a_l, $l = 1, \ldots, 4$, и γ_n, b_n, $n = 1, \ldots, 11$, явно указаны (см. [10], с. 16, 17) как функции от s, d, $|V|$, $\sigma(V)$, m, k. Выберем $m = [|V|^{\varepsilon}] + 1$, $k = [\varkappa \log |V|]$, где $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$ достаточно малы. Тогда, если $\sigma(V)^2 \geqslant c_8 |V|$ ($\sigma(V)^2 \leqslant u(0)|V| = |V| \sigma_0^2$ в силу (20)), то найдутся $A_4, A_5, \delta_1, \gamma_1 > 0$, зависящие от V лишь через c_8, такие, что

$$\left| \varphi(x) - e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leqslant A_4 |V|^{-\delta_1} \quad \text{при} \quad |x| \leqslant A_5 |V|^{\gamma_1}.$$

Следовательно, при $i = 1, \ldots, r$

$$\left| f_i(t_i) - e^{-\frac{t_i^2}{2}} \right| \leqslant A_4 |V_i|^{-\delta_1} \leqslant A_4 v^{-\delta_1}, \quad \text{если} \quad |t_i| \leqslant A_5 v^{\gamma_1}. \tag{22}$$

Из (19), (21) и (22) вытекает (18), где $\gamma = \min\{\gamma_1, \lambda\mu_1/2\}$, $\delta = \min\{\delta_1, \lambda\mu_1/2\}$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для любого выпуклого ограниченного множества $B \subset \mathbb{R}^r$*

$$|P(Z \in B) - \Phi_r(B)| \leqslant c_9 \left(1 + \mu(B^{(1)})\right) v^{-\beta}, \tag{23}$$

где Z и v те же, что в лемме 3, μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^r$, Φ_r — распределение стандартного гауссовского вектора в $\mathbb{R}^r$, $B^{(\varepsilon)}$ — это ε-окрестность множества B в метрике, отвечающей норме $\|\cdot\|$, а $c_9, \beta > 0$ не зависят от B и могут зависеть от r и c_1, c_2 (см. (16), (17)).

Эта лемма является аналогом леммы 3 из [8], ее доказательство немедленно вытекает из (18) и неравенства Бара ([6]):

$$|P(Z \in B) - \Phi_r(B)| \leqslant E_1 T^{-1} + E_2 \mu(B^{(E_3 T^{-1})}) \int\limits_{\|t\| \leqslant T} |f(t) - f_0(t)|\, dt,$$

справедливого для любого $T > 0$ и $E_1, E_2, E_3 > 0$, зависящих лишь от r.

Замечание 2. Леммы 3 и 4 верны не только для $V_1, \dots, V_r \in \mathcal{A}$. В условиях этих лемм можно рассматривать произвольные $V_1, \dots, V_r \subset \mathbb{Z}^d$.

Перейдем к доказательству теоремы. Вначале покажем, что $\mathcal{C}(\{H_n\}) \subset \mathbb{K}^{\varepsilon}_{\sigma_0}$ с вероятностью 1 для каждого $\varepsilon > 0$, где $\mathcal{C}(\{H_n\})$ — множество предельных точек семейства $\{H_n,\ n \geqslant 1\}$ в пространстве $D([0,1]^d)$ с равномерной метрикой, а $\mathbb{K}^{\varepsilon}_{\sigma_0}$ — это ε-окрестность $\mathbb{K}_{\sigma_0}$ в этой метрике.

Для $m \in \mathbb{N}$ и $j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d$ обозначим

$$B_{j,m} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon (j_i - 1)/m < x_i \leqslant j_i/m,\ i = 1, \dots, d\}.$$

Для $t \in [0,1]^d$ и $m \in \mathbb{N}$ определим функции

$$\Pi_m H_n(t) := \int\limits_0^{t_1} \dots \int\limits_0^{t_d} m^d \sum_{j \in J} H_n(B_{j,m}) \mathbb{1}_{B_{j,m}}(z_1, \dots, z_d)\, dz_1 \dots dz_d,$$

где $J = J_m = \{j \in \mathbb{N}^d \colon \|j\| \leqslant m\}$, $\mathbb{1}_V(\cdot)$ — индикатор множества V.

При любом $\varepsilon > 0$, выбрав $r = r(\varepsilon) > 1$ достаточно близким к 1, получим аналогично [26], что

$$P(H_n \notin \mathbb{K}^{\varepsilon}_{\sigma_0}) \leqslant P\left(\frac{1}{r}\Pi_m H_n \notin \mathbb{K}_{\sigma_0}\right) + P\left(\sup_{t \in [0,1]^d} |H_n(t) - \Pi_m H_n(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{24}$$

Введем кубы $B'_{j,m} \subset B_{j,m}$, такие, что $B'_{j,m} = B'_{j,m}(n) \in \mathcal{A}$, центры $B'_{j,m}$ и $B_{j,m}$ совпадают, причем для всех $j \in J$, $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $\nu > 0$

$$\rho(\partial B'_{j,m}(n), \partial B_{j,m}) = n^{-\nu} m^{-1}, \tag{25}$$

∂B — это граница множества B. Положим $R_{j,m} = R_{j,m}(n) = B_{j,m} \setminus B'_{j,m}$. Тогда

$$P\left(\frac{1}{r}\Pi_m H_n \notin \mathbb{K}_{\sigma_0}\right) = P\left(\sum_{j\in J} H_n(B_{j,m})^2 > r^2\sigma_0^2\right) = \\ = P\left(|\eta| > \left(\frac{n}{m}\right)^d \varepsilon'\sigma_0^2 \operatorname{LL} n\right) + P\left(\zeta > \left(\frac{n}{m}\right)^d \left(1+\frac{\varepsilon'}{2}\right) 2\sigma_0^2 \operatorname{LL} n\right), \tag{26}$$

где $1+\varepsilon' = r^2$, $\eta = \sum\limits_{j\in J}(S(nR_{j,m})^2 + 2S(nR_{j,m})S(nB'_{j,m}))$, $\zeta = \sum\limits_{j\in J} S(nB'_{j,m})^2$. Применяя неравенства Маркова, Коши – Буняковского – Шварца, а также учитывая (5), при в.д.б. n получаем

$$P\left(|\eta| > \left(\frac{n}{m}\right)^d \varepsilon'\sigma_0^2 \operatorname{LL} n\right) \leqslant 5d2^d(\varepsilon' \operatorname{LL} n)^{-1} n^{-\nu/2}. \tag{27}$$

В силу (13) при всех $j \in J$ и каждом $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma(nB'_{j,m})^2 \sim |\widetilde{nB}'_{j,m}|\sigma_0^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{28}$$

причем $\sigma(nB'_{j,m})^2 \leqslant |\widetilde{nB}'_{j,m}|\sigma_0^2$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая (6), при в.д.б. n имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n}{m}\right)^d \leqslant |\widetilde{nB}'_{j,m}| \leqslant \left(\frac{n}{m}\right)^d. \tag{29}$$

Следовательно,

$$P\left(\zeta > \left(\frac{n}{m}\right)^d \left(1+\frac{\varepsilon'}{2}\right) 2\sigma_0^2 \operatorname{LL} n\right) \leqslant P\left(\sum_{j\in J} Z_j^2 > \left(1+\frac{\varepsilon'}{2}\right) 2 \operatorname{LL} n\right),$$

где $Z_j = Z_j(n,m) = S(nB'_{j,m})/\sigma(B'_{j,m})$.

Заметим, что

$$\rho(nB'_{j,m}, nB'_{q,m}) \geqslant n^{1-\nu}m^{-1} \quad \text{при} \quad j,q \in J,\ j \neq q. \tag{30}$$

По лемме 4, учитывая (28)–(30), приходим к оценке

$$|P(Z \in B_R) - \Phi_r(B_R)| \leqslant c_9 2^{-\beta}(1+\mu((B_R)^{(1)}))\left(\frac{n}{m}\right)^{-d\beta}, \tag{31}$$

где $Z \in \mathbb{R}^r$, $r = m^d$, — вектор с компонентами $Z_j(n,m)$, $j \in J$ (индекс j упорядочен, например, лексикографическим способом), а шар $B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^r \colon \sum\limits_{i=1}^r x_i^2 \leqslant R^2\right\}$.

Таким образом, для $R(n) = \left(1+\frac{\varepsilon'}{2}\right) 2 \operatorname{LL} n$, $r = m^d$ в силу (31)

$$\left|P\left(\sum_{j\in J} Z_j^2 > R(n)^2\right) - \Phi_r(\mathbb{R}^r \setminus B_{R(n)})\right| \leqslant A_6(\operatorname{LL} n)^{r/2} n^{-d\beta}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Поскольку для хи-квадрат распределения χ_p^2 с фиксированным числом степеней свободы p

$$P(\chi_p^2 > x) \sim \frac{x^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)2^{\frac{p}{2}-1}} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{33}$$

то

$$1 - \Phi_r(B_{R(n)}) \leqslant A_7(Ln)^{-\left(1+\frac{\varepsilon'}{4}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Из (26), (27), (32) и (34) вытекает оценка

$$P\left(\frac{1}{r}\Pi_m H_n \notin \mathbb{K}_{\sigma_0}^{\varepsilon}\right) \leqslant A_8(Ln)^{-\left(1+\frac{\varepsilon'}{4}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Для $B_{j,m}$ ($j \in J$, $m \in \mathbb{N}$) обозначим $t_j^* = t_j^*(m) = \left(\frac{j_1-1}{m}, \ldots, \frac{j_d-1}{m}\right)$. Тогда

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]^d}|H_n(t) - \Pi_m H_n(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant P\left(\max_{j\in J}\sup_{t\in B_{j,m}}|H_n(t) - H_n(t_j^*)| > \frac{\varepsilon}{4}\right) + \\ + P\left(\max_{j\in J}\sup_{t\in B_{j,m}}|\Pi_m H_n(t) - H_n(t_j^*)| > \frac{\varepsilon}{4}\right) := P_1 + P_2.$$

Очевидно,

$$P_1 \leqslant P\left(\sup_{\substack{t,t'\in[0,1]^d,\\ \|t-t'\|\leqslant 1/m}}|H_n(t) - H_n(t')| > \frac{\varepsilon}{4}\right). \tag{36}$$

Теперь заметим, что $H_n(t_j^*) = \Pi_m H_n(t_j^*)$ для всех $j \in J$. Поэтому, обозначая $V(t, t_j^*) = [0,t]\,\Delta\,[0,t_j^*]$, где Δ — симметрическая разность множеств, для любого $j \in J$ и всех $t \in B_{j,m}$ получаем

$$|\Pi_m H_n(t) - H_n(t_j^*)| \leqslant \int\limits_{V(t,t_j^*)}\!\!\ldots\!\int m^d \sum_{j\in J}|H_n(B_{j,m})|\mathbb{1}_{B_{j,m}}(z_1,\ldots,z_d)\,dz_1\ldots dz_d \leqslant \\ \leqslant \left(|V(t,t_j^*)|\sum_{j\in J}m^d H_n(B_{j,m})^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{d}{m}\sum_{j\in J}m^d H_n(B_{j,m})^2\right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$P_2 \leqslant P\left(\sum_{j\in J}m^d H_n(B_{j,m})^2 > \frac{m\varepsilon^2}{16d}\right).$$

Выберем m столь большим, чтобы $m\varepsilon^2(16d)^{-1} > r^2\sigma_0^2$. Тогда, учитывая (26), видим, что P_2 допускает оценку вида (35). Таким образом, применив также (36), (8), для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty} P\left(\sup_{t\in[0,1]^d}|H_{[c^l]}(t) - \Pi_m H_{[c^l]}(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right) < \infty, \tag{37}$$

а следовательно, в силу (24), (35) и (37) при почти всех $\omega \in \Omega$

$$H_{[c^l]}(\cdot, \omega) \in \mathbb{K}^{\varepsilon}_{\sigma_0} \quad \text{для} \quad l > N_1(\varepsilon, c, \omega). \tag{38}$$

Поэтому для тех же ω и l имеем

$$\sup_{t \in [0,1]^d} |H_{[c^l]}(t, \omega)| \leqslant \sigma_0 + \varepsilon. \tag{39}$$

Теперь легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $c = c(\varepsilon) > 1$, что с вероятностью 1 при всех $l > N_2(\varepsilon, \omega)$

$$\delta_l := \max_{k \in I_l} \sup_{t \in [0,1]^d} |H_k(t) - H_{[c^l]}(t)| < \varepsilon, \tag{40}$$

где $I_l = \{k \in \mathbb{N} \colon [c^{l-1}] < k \leqslant [c^l]\}$. Действительно,

$$\delta_l \leqslant \max_{k \in I_l} \sup_{t \in [0,1]^d} \left| H_{[c^l]}(t) - H_{[c^l]}\left(\frac{k}{[c^l]} t\right) \right| + \\ + \max_{k \in I_l} \left| \left(\frac{[c^l]^d \, \mathrm{LL}[c^l]}{k^d \, \mathrm{LL}\, k} \right)^{1/2} - 1 \right| \sup_{t \in [0,1]^d} \left| H_{[c^l]}\left(\frac{k}{[c^l]} t\right) \right| := \delta_l^{(1)} + \delta_l^{(2)}.$$

Для любого $t \in [0,1]^d$ и $k \in I_l$

$$\left| t - \frac{k}{[c^l]} t \right| \leqslant 1 - \frac{[c^{l-1}]}{[c^l]} \to 1 - \frac{1}{c} \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Поэтому, выбрав $c(\varepsilon) > 1$ достаточно близким к 1, согласно (7) получим $\delta_l^{(1)} < \varepsilon/2$ при почти всех $\omega \in \Omega$ и $l > N_3(\varepsilon, \omega)$.

Заметив, что

$$\max_{k \in I_l} \left| \left(\frac{[c^l]^d \, \mathrm{LL}[c^l]}{k^d \, \mathrm{LL}\, k} \right)^{1/2} - 1 \right| \to c^{1/2} - 1 \quad \text{при} \quad l \to \infty,$$

видим, что для $c(\varepsilon)$, достаточного близкого к 1, согласно (39) почти наверное справедливо неравенство $\delta_l^{(2)} < \varepsilon/2$ при в.д.б. l. В силу (38) и (40) для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 имеем $\mathcal{C}(\{H_n\}) \subset \mathbb{K}^{2\varepsilon}_{\sigma_0}$.

Докажем теперь, что любая точка шара $\mathbb{K}_{\sigma_0}$ с вероятностью 1 является предельной (в равномерной метрике) для некоторой подпоследовательности последовательности $\{H_n,\, n \geqslant 1\}$.

Возьмем любую функцию $g \in \mathbb{K}_{\sigma_0}$, такую, что

$$\int \!\! \underset{[0,1]^d}{\dots} \!\! \int (\dot{g}(t))^2 \, dt = \sigma_0^2 (1 - \delta), \tag{41}$$

где $\delta \in (0,1)$, и покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех $\omega \in \Omega$ найдется такая подпоследовательность $n_k = n_k(\varepsilon, g, \omega)$ последовательности $\{m^n\}_{n=1}^{\infty}$ (где m выбрано достаточно большим), что

$$\sup_{t \in [0,1]^d} |H_{n_k}(t,\omega) - g(t)| < \varepsilon. \tag{42}$$

Определим $g(B)$ для $B \in \mathcal{A}$ и $B \subset [0,1]^d$ как смешанную разность значений функции g в вершинах параллелепипеда B. Рассмотрим события

$$E_n = \{|H_n(B_{j,m}) - g(B_{j,m})| < \varepsilon m^{-d},\ j \in J'\},$$

где $J' = J'(m) = J(m) \setminus \{(1,\dots,1)\}$. Для доказательства (42) достаточно убедиться, что с вероятностью 1 произойдет бесконечное число событий $E'_k := E_{m^k}$, если m выбрано достаточно большим. Действительно, в силу (7) для любого $\varepsilon > 0$, каждого достаточно большого m и $k > N(\varepsilon, m, g, \omega)$

$$|H_{m^k}(t) - g(t)| \leqslant |H_{m^k}(t) - H_{m^k}(0)| + \\ + \left| \int\limits_{[0,t]} \!\!\dots\! \int \dot g(z)\,dz \right| \leqslant \varepsilon + \sigma_0 m^{-d/2} \quad \text{при} \quad t \in [0,\, 1/m]^d,$$

а для $j \in J'$ и $t \in B_{j,m}$

$$|H_{m^k}(t) - g(t)| \leqslant |H_{m^k}(t) - H_{m^k}(t_j^*)| + |H_{m^k}(t_j^*) - g(t_j^*)| + \\ + |g(t_j^*) - g(t)| \leqslant |H_{m^k}(t_j^*) - g(t_j^*)| + \varepsilon + (d/m)^{1/2}\sigma_0 \leqslant \\ \leqslant \sum_{j \in J'} |H_{m^k}(B_{j,m}) - g(B_{j,m})| + 2\varepsilon + \sigma_0 m^{-d/2} + (d/m)^{1/2}\sigma_0.$$

Вывод соотношения $P(\limsup\limits_k E'_k = 1)$ является многомерным аналогом рассуждений из [8], которые основаны на следующей лемме.

Лемма 5 ([8]). *Если для некоторых констант $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2 > 0$ и $\nu_0 < 1$ справедливы неравенства*

$$P(D_k) \geqslant \alpha_1 K^{-\nu_0} \quad \textit{при в.д.б. } k, \tag{43}$$

$$|P(D_k D_l) - P(D_k)P(D_l)| \leqslant \alpha_2 l^{\rho_1} e^{-\rho_2 k}, \quad 1 \leqslant k < l < \infty, \tag{44}$$

то с вероятностью 1 происходит бесконечное число событий D_k.

Для полноты доказательства мы проверим выполнение условий (43) и (44). Заметим, что

$$P(E_n) = P(Z \in B), \tag{45}$$

где случайный вектор $Z = Z_n(m) \in \mathbb{R}^{m^d-1}$ имеет компонентами $S(nB_{j,m})/\sigma(nB_{j,m})$ (индекс j упорядочивается лексикографическим способом), а $B = B(n,m) = \left\{x \in \mathbb{R}^{m^d-1}\colon a_j < x_j < b_j,\ j \in J'\right\}$, здесь $a_j = a(n,m,g) := := \delta_j (2\operatorname{LL} n)^{1/2}(g(B_{j,m}) - \varepsilon m^{-d})$, $b_j = b_j(n,m,g) = \delta_j(2\operatorname{LL} n)^{1/2}(g(B_{j,m}) + \varepsilon m^{-d})$, $\delta_j = \delta_j(n,m) = n^{d/2}/\sigma(nB_{j,m})$, $j \in J'$.

Воспользуемся элементарной леммой.

Лемма 6. *Пусть случайные векторы $X, Y \in \mathbb{R}^r$. Тогда для любого $B = = \{a_i < x_i < b_i,\ i = 1,\dots,r\}$, каждого неслучайного $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_r)$, имеющего $\tau_i \in (0,(b_i - a_i)/2)$, $i = 1,\dots,r$, справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} P(X \in B_{(\tau)}) - \sum_{i=1}^r P(|Y_i| > \tau_i) \leqslant P(X + Y \in B) \leqslant \\ \leqslant P(X \in B^{(\tau)}) + \sum_{i=1}^r P(|Y_i| > \tau_i), \end{aligned} \tag{46}$$

здесь $B_{(\tau)} = \{a_i + \tau_i < x_i < b_i - \tau_i,\ i = 1,\dots,r\}$, $B^{(\tau)} = \{a_i - \tau_i < x_i < b_i + \tau_i,\ i = 1,\dots,r\}$.

Определим X и Y как векторы соответственно с компонентами $S(nB'_{j,m})/\sigma(nB_{j,m})$ и $S(nR_{j,m})/\sigma(nB_{j,m})$, где $j \in J'$, а множества $B'_{j,m}(n)$ и $R_{j,m}(n)$ введены после формулы (24). Возьмем $\tau_j = n^{-\nu/4}$ для $j \in J'$, где ν фигурирует в (25). Тогда по неравенству Чебышева при в.д.б. n имеем

$$P(|Y_j| > \tau_j) \leqslant \tau_j^{-2}\sigma(nR_{j,m})^2\sigma(nB_{j,m})^{-2} \leqslant A_9 n^{-\nu/2}. \tag{47}$$

Положим

$$G = G(\tau,n,m) = \{\delta'_j(a_j - \tau_j) < x_j < \delta'_j(b_j + \tau_j),\ j \in J'\}, \tag{48}$$

где $\delta'_j = \delta'_j(n,m) = \sigma(nB_{j,m})/\sigma(nB'_{j,m})$. В силу леммы 4, в которой $r = m^d - 1$ и множество B берется из соотношения (45), получим, применив (28)–(30), что при в.д.б. n

$$\begin{aligned} |P(X \in B^{(\tau)}) - \Phi_r(G)| \leqslant A_{10}\biggl(1 + \prod_{j\in J'}(2 + \delta'_j(b_j - a_j + 2\tau_j))\biggr)(n/m)^\beta \leqslant \\ \leqslant A_{11}(\operatorname{LL} n)^{r/2} n^{-\beta}, \end{aligned} \tag{49}$$

поскольку для всех $j \in J$ и каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\delta_j(n,m) \to m^{d/2}\sigma_0^{-1} \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{50}$$

а также

$$\delta'_j(n,m) = 1 + O(n^{-\lambda_1}) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{51}$$

где $\lambda_1 > 0$. Формула (51) легко устанавливается с учетом (20) и (28). Принимая во внимание (51), видим, что

$$|\Phi_r(G) - \Phi_r(B)| \leqslant A_{12} n^{-\lambda_1}. \tag{52}$$

Аналогично оценивая $|P(X \in B_{(\tau)}) - \Phi_r(B)|$, из (46), (47), (49) и (52) имеем для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$P(E_n) = \Phi_r(B(n,m)) + O(n^{-\lambda_2}), \quad \text{где} \quad \lambda_2 > 0. \tag{53}$$

Для $0 \leqslant \alpha < \beta < \infty$ справедливо неравенство ([26])

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \geqslant \beta^{-1} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (1 - e^{-\frac{(\beta^2-\alpha^2)}{2}}). \tag{54}$$

Кроме того, $P(\alpha - \gamma < \xi < \alpha + \gamma) \geqslant P(|\alpha| < \xi < |\alpha| + \gamma)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \geqslant 0$, если $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Учитывая, что $0 \leqslant |g(B_{j,m})| \leqslant \sigma_0 m^{-d/2}$ для $j \in J$ и $m \in \mathbb{N}$, применив (54), получим

$$\Phi_r(B) \geqslant \Big((4\pi \operatorname{LL} n)^{1/2} (\sigma_0 m^{-d/2} + \varepsilon m^{-d})\Big)^{-r} e^{-\operatorname{LL} n \sum\limits_{j \in J} g(B_{j,m})^2 \delta_j^2} \times$$
$$\times \prod_{j \in J'} \Big(1 - e^{-2\delta_j^2 \varepsilon^2 m^{-2d} \operatorname{LL} n}\Big) \delta_j^{-1}, \quad r = m^d - 1.$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{j \in J} m^d g(B_{j,m})^2 \to \int\limits_{[0,1]^d}\!\!\dots\!\int (\dot g(t))^2\, dt \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Выбрав достаточно большое m и принимая во внимание (50), (41), видим, что для в.д.б. n

$$\Phi_r(B) \geqslant A_{13} (Ln)^{-1+\frac{\delta}{2}}. \tag{55}$$

Из (53) и (55) вытекает (43) при $D_k = E_k'$, $k \in \mathbb{N}$.

Для проверки условия (44) оценим $P(E_k' E_l')$, т. е. $P(Z_{m^k}(m) \in B(m^k, m)$, $Z_{m^l}(m) \in B(m^l, m))$, где $Z_n(m)$ и $B(n,m)$ фигурируют в (45). Применим вначале лемму 6, взяв вектор $X \in \mathbb{R}^r$, $r = 2(m^d - 1)$, имеющий компонентами $S(m^k B_{j,m}'(m^k))/\sigma(m^k B_{j,m})$, $j \in J'$, и $S(m^l B_{q,m}'(m^l))/\sigma(m^l B_{q,m})$, $q \in J'$. При этом положим $\tau_j = m^{-\nu k/4}$, $j \in J'$, и $\tau_q' = m^{-\nu l/4}$, $q \in J'$, где ν то же, что в (25). Если m выбрано достаточно большим, то

$$\sigma(m^k B_{j,m}'(m^k))^2 \geqslant \frac{\sigma_0^2}{2} m^{d(k-1)} \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{N}$$

и при $1 \leqslant k < l$

$$\min_{j,q\in J'}\{|m^k B'_{j,m}(m^k)|, |m^l B'_{q,m}(m^l)|\} \geqslant \frac{1}{2} m^{d(k-1)},$$

$$\rho(m^k B'_{j,m}(m^k), m^l B'_{q,m}(m^l)) \geqslant m^{k(1-\nu)-1} \quad \text{для} \quad j, q \in J'.$$

Воспользуемся леммой 4, в которой $B = B(m^k, m) \times B(m^l, m)$ и $r = 2(m^d - 1)$. Тогда для введенного выше $\tau = (\tau_j,\ j \in J';\ \tau'_q,\ q \in J')$ аналогично (48) получим при всех $1 \leqslant k < l$ (если m достаточно велико)

$$|P(X \in B^{(\tau)}) - \Phi_{r/2}(G_1)\Phi_{r/2}(G_2)| \leqslant A_{14}(\mathrm{LL}\, m^l)^r m^{-\lambda_3 k}, \tag{56}$$

где $\lambda_3, A_{14} > 0$ не зависят от k и l, а G_1 и G_2 определяются согласно (48) соответственно при выборе $n = m^k$, $\tau_j = m^{-\nu k/4}$, $j \in J'$, и $n = m^l$, $\tau'_q = m^{-\nu l/4}$, $q \in J'$. Аналогично оценивая $P(X \in B_{(\tau)})$, учитывая (50)–(53) и (56), получаем для всех $1 \leqslant k < l$ (если m выбрано достаточно большим)

$$P(E'_k E'_l) = \Phi_{r/2}(B(m^k, m))\Phi_{r/2}(B(m^l, m)) + f_m(k, l), \tag{57}$$

где $|f_m(k,l)| \leqslant A_{15}(\log l)^r m^{-\lambda_4 k}$, $\lambda_4 > 0$. Из (57) и (53) вытекает неравенство (44), в котором $\rho_1 = m^d - 1$ и $\rho_2 = \lambda_4 \log m$. Остается учесть, что множество функций g, удовлетворяющих условию (41) с $\delta \in (0, 1)$, плотно заполняет в равномерной метрике шар Штрассена $\mathbb{K}_{\sigma_0}$. Теорема полностью доказана.

Автор признателен за гостеприимство лаборатории статистики и вероятности университета Лилль-1, где в феврале 1995 г. была выполнена данная работа.

Литература

[1] А. В. Булинский. Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. — М.: изд-во МГУ, 1989.

[2] А. В. Булинский. Центральная предельная теорема для полей дробового шума // Проблемы теории вероятностных распределений, XI под ред. В. Н. Судакова. Записки научн. семинаров ЛОМИ, 177. — 1989. — С. 28–36.

[3] А. В. Булинский. Аналоги оценки Берри– Эссеена для полей с FKG-неравенствами // Теория вероятн. и ее примен. — 1992. — Т. 37. — № 4. — С. 768–769.

[4] А. В. Булинский. Скорость сходимости в центральной предельной теореме для полей ассоциированных величин // Теория вероятн. и ее примен. — 1995. — Т. 40. — № 1. — С. 165–174.

[5] В. В. Петров. Суммы независимых случайных величин. — М.: Наука, 1972.

[6] B. von Bar. Multi-dimensional integral limit theorem // Ark. Math. — 1967. — V. 7. — P. 71–88.

[7] R. E. Barlow, F. Proschan. Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models. — Holt Rinehart and Winston, 1975.

[8] I. Berkes. The functional law of the iterated logarithm for dependent random variables. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. — 1973. — B. 26. — S. 245–258.

[9] T. Birkel. A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variables // Statist. Probab. Lett. — 1987. — V. 7. — P. 17–20.

[10] A. V. Bulinski. On Berry – Esseen estimate analogues for associated random fields // Stability Problems for Stoch. Models (V. M. Zolotarev et al eds.). — New Trends in Probab. and Statist. — TVP, Moscow, 1994. — P. 9–20.

[11] A. V. Bulinski. On the convergence rates in the CLT for positively and negatively dependent random fields // Proc. Kolmogorov Semester (March 1993), Int. Euler Math. Inst., St. Petersburg. — Gordon and Breach, 1994. — P. 1–12.

[12] A. V. Bulinski, M. S. Keane. Invariance principle for associated random fields // Stability Problems for Stoch. Models (V. M. Zolotarev et al eds.) (to appear).

[13] J. Chover. On Strassen version of the loglog law. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. — 1967. — B. 8. — S. 83–90.

[14] J. T. Cox, G. Grimmett. Central limit theorem for associated random variables and the percolation model // Ann. Probab. — 1984. — V. 12. — P. 514–528.

[15] A. R. Dabrowski, H. Dehling. A Berry – Esseen theorem and a functional law of the iterated logarithm for weakly associated random vectors // Stoch. Proc. Appl. — 1988. — V. 30. — P. 277–289.

[16] A. R. Dabrowski, A. Jakubovski. Stable limits for associated random variables // Ann. Probab. — 1994. — V. 22. — P. 514–531.

[17] P. Doukhan. Mixing: properties and examples. — Lecture Notes in Statistics, 85. — Springer Verlag, 1995.

[18] J. Esary, F. Proschan, D. Walkup. Association of random variables with applications // Ann. Math. Statist. — 1967. — V. 38. — P. 1466–1474.

[19] C. Fortuin, P. Kasteleyn, J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets // Commun. Math. Phys. — 1971. — V. 22. — P. 89–103.

[20] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1960. — V. 159. — P. 13–20.

[21] E. L. Lehmann. Some concepts of dependence // Ann. Math. Statist. — 1966. — V. 37. — P. 1137–1153.

[22] C. M. Newman. A general central limit theorem for FKG systems // Commun. Math. Phys. — 1983. — V. 91. — P. 75–80.

[23] C. M. Newman. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables // Inequalities in Statist. and Probab. (Y. L. Tong ed.) — Hayward, 1984. — P. 127–140.

[24] M. Peligrad, Qi-Man Shao. Self-normalized central limit theorem for sums of weakly dependent random variables // J. Theor. Probab. — 1994. — V. 7. — P. 309–338.

[25] S. T. Rachev, Huang Xin. Test for association of random variables in the domain of attraction of multivariate law // Probab. and Math. Statist. — 1993. — V. 14. — P. 125–141.

[26] V. Strassen. An invariance principle for the law of the iterated logarithm // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. — 1964. — B. 3. — S. 211–228.

[27] Ch. Suquet. Introduction a association // Pub. IRMA. Lille. — 1994. — 34. — XIII. — 1–20.

[28] M. J. Wichura. Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments // Ann. Probab. — 1973. — V. 1. — P. 273–296.

Статья поступила в редакцию в июле 1995 г.