С. Я. Гриншпон, Вполне характеристические подгруппы сепарабельных абелевых групп, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 4, 1279–1305

Вполне характеристические подгруппы сепарабельных абелевых групп

С. Я. ГРИНШПОН
Томский государственный университет

УДК 512.541

Ключевые слова: сепарабельная группа, вполне характеристическая подгруппа, широкая подгруппа, гомоморфизм, прямой предел, решетка.

Аннотация

Получено новое описание вполне характеристических подгрупп и их решетки для абелевых p-групп без элементов бесконечной высоты, а также широких подгрупп и их решетки для произвольных абелевых p-групп. Вычислены инварианты Ульма–Капланского для таких подгрупп. Получено полное описание вполне характеристических подгрупп и их решетки для сепарабельных абелевых групп без кручения.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, Fully invariant subgroups of separable Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1279–1305.

The new description of fully invariant subgroups and their lattice for Abelian p-groups without elements of infinite height and large subgroups and their lattice for arbitrary Abelian p-groups is obtained. Ulm–Kaplansky invariants of these subgroups are calculated. The full description of fully invariant subgroups and their lattice for separable torsion free Abelian groups is obtained.

Введение

В статье изучается строение вполне характеристических подгрупп и их решетки для сепарабельных абелевых групп без кручения и p-групп.

Статья состоит из трех параграфов. В первом параграфе вводятся понятия сепарабельной и слабо сепарабельной абелевой группы относительно некоторого семейства прямых слагаемых этой группы. Здесь с использованием понятия гомоморфной оболочки дается характеризация вполне характеристических подгрупп слабо сепарабельных групп (теорема 1.4), которая будет применяться в дальнейшем. Исследование вполне характеристических и широких подгрупп абелевых p-групп проводится во втором параграфе. В этом параграфе получено новое описание вполне характеристических подгрупп и их решетки для абелевых p-групп без элементов бесконечной высоты (теорема 2.2 и следствие 2.4), а также широких подгрупп и их решеток для абелевых

Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, № 4, с. 1279–1305.

p-групп (следствие 2.3 и следствие 2.6). Из полученных результатов вытекают основные результаты работы [1]. Исходя из описания вполне характеристических и широких подгрупп абелевых p-групп, полученных в настоящей статье, можно получить значения инвариантов Ульма–Капланского таких подгрупп. Во втором параграфе установлен критерий полноты решетки широких подгрупп абелевых p-групп (следствие 2.9) и показано, что такая решетка является дистрибутивной (следствие 2.10). Показано также, что решетка вполне характеристических подгрупп абелевой p-группы без элементов бесконечной высоты является непрерывной и брауэровой (следствия 2.13 и 2.14).

Полное описание вполне характеристических подгрупп и их решетки для сепарабельных абелевых групп без кручения получено в третьем параграфе (теорема 3.7, следствие 3.8). При этом предлагается подход, при котором сепарабельная абелева группа без кручения рассматривается как некоторый прямой предел. В этом же параграфе полностью охарактеризованы сервантные вполне характеристические подгруппы и их решетки сепарабельных абелевых групп без кручения (следствия 3.9 и 3.12). Получены различные факты о свойствах решетки вполне характеристических подгрупп исследуемых групп. В частности, показано, что решетка вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения является непрерывной дистрибутивной решеткой (следствие 3.15). В статье получен также полный ответ на вопрос, когда решетка вполне характеристических подгрупп сепарабельной группы является цепью (предложение 3.17 и следствие 2.15).

1. Вполне характеристические подгруппы слабо C-сепарабельных групп

Введем вначале понятия сепарабельной и слабо сепарабельной абелевой группы относительно некоторого семейства прямых слагаемых этой группы.

Определение 1.1. Пусть C — некоторое семейство прямых слагаемых абелевой группы G (отличных от G). Группу G назовем сепарабельной относительно семейства C (или C-сепарабельной группой), если каждое конечное множество элементов этой группы можно вложить в прямое слагаемое этой группы, являющееся прямой суммой некоторых групп семейства C.

В случае, когда семейство C состоит из групп ранга 1, C-сепарабельная группа называется сепарабельной группой.

Определение 1.2. Пусть C — некоторое семейство прямых слагаемых абелевой группы G (отличных от G). Группу G назовем слабо сепарабельной относительно семейства C (или слабо C-сепарабельной группой), если каждый элемент группы G можно вложить в прямое слагаемое этой группы, являющееся прямой суммой некоторых групп семейства C.

Из определений ясно, что всякая C-сепарабельная группа является слабо C-сепарабельной.

Всякая абелева p-группа G, не содержащая ненулевых элементов бесконечной p-высоты (такие группы принято называть p-группами без элементов бесконечной высоты), является слабо C-сепарабельной группой, где в качестве C можно взять, например, семейство всех циклических прямых слагаемых группы G. Ясно, что всякая слабо C-сепарабельная p-группа, где C — некоторое семейство циклических групп, является p-группой без элементов бесконечной высоты (т. е. редуцированной сепарабельной p-группой).

Всякая сепарабельная абелева группа без кручения также является слабо C-сепарабельной, где в качестве семейства C можно взять, например, семейство всех прямых слагаемых ранга 1 группы G. Известно также, что всякая слабо C-сепарабельная абелева группа без кручения, где C — некоторое семейство групп без кручения ранга 1, является сепарабельной группой без кручения [2].

Различные свойства C-сепарабельных групп в случае, когда семейство C состоит из групп без кручения конечного ранга, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, получены в [3] и [4].

Если абелева группа G является сепарабельной, то в качестве семейства C, относительно которого группа G является C-сепарабельной (слабо C-сепарабельной), можно взять семейство всех прямых слагаемых ранга 1 группы G, хотя возможен и более «экономный»выбор такого семейства.

Перейдем к рассмотрению вполне характеристических подгрупп слабо C-сепарабельных групп.

Лемма 1.1. *Пусть G — слабо C-сепарабельная группа и S — вполне характеристическая подгруппа группы G. Тогда S — слабо C'-сепарабельная группа, где $C' = \{S \cap A \mid A \in C\}$ (некоторые из групп $S \cap A$ могут быть и нулевыми).*

Доказательство. Пусть $a \in S$. Тогда существует такое разложение $G = A_1 \oplus \dots \oplus A_k \oplus G'$, где $A_1, \dots, A_k \in C$, $a \in A_1 \oplus \dots \oplus A_k$. Имеем $S = (S \cap A_1) \oplus \dots \oplus (S \cap A_k) \oplus (S \cap G')$ и $a \in (S \cap A_1) \oplus \dots \oplus (S \cap A_k)$.

Лемма 1.2. *Пусть G — слабо C-сепарабельная группа, S_1 и S_2 — две вполне характеристические подгруппы группы G. $S_1 \subset S_2$ тогда и только тогда, когда $S_1 \cap A \subset S_2 \cap A$ для любой подгруппы A из C.*

Доказательство. а) Необходимость очевидна.

б) Достаточность. Пусть $S_1 \cap A \subset S_2 \cap A$ и $a \in S_1$. Существуют группы A_i $(i \in I)$, принадлежащие C, такие что $a \in \bigoplus_{i \in I} A_i$ и $G = \bigoplus_{i \in I} A_i \oplus G'$. Тогда $S_1 = \bigoplus_{i \in I}(S_1 \cap A_i) \oplus (S_1 \cap G')$, причем $a \in \bigoplus_{i \in I}(S_1 \cap A_i)$. Так как $S_1 \cap A_i \subset S_2 \cap A_i$ для каждого $i \in I$, то $a \in \bigoplus_{i \in I}(S_2 \cap A_i)$, и в силу того, что $S_2 = \bigoplus_{i \in I}(S_2 \cap A_i) \oplus$ $\oplus (S_2 \cap G')$, имеем $a \in S_2$.

Следствие 1.3. *Пусть G — слабо C-сепарабельная группа, S_1 и S_2 — две вполне характеристические подгруппы группы G. $S_1 = S_2$ тогда и только* *тогда, когда* $S_1 \cap A = S_2 \cap A$ *для любой подгруппы* A *из* C.

При изучении вполне характеристических подгрупп абелевых групп полезным оказывается понятие гомоморфной оболочки, введенное в [5].

Определение 1.3. Гомоморфной оболочкой подгруппы A' группы A в группе B будем называть подгруппу группы B, порожденную всеми элементами вида $\eta a'$, где $\eta \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $a' \in A'$.

Теорема 1.4. *Пусть* G *— слабо* C*-сепарабельная группа. Подгруппа* S *группы* G *является вполне характеристической подгруппой группы* G *тогда и только тогда, когда* S *— слабо* C'*-сепарабельная группа, где* $C' = \{S \cap A \mid A \in C\}$, *причем каждая подгруппа* $S \cap A$ *вполне характеристична в* A $(A \in C)$ *и для любой пары групп* (A, B), *где* $A, B \in C$, $A \neq B$, *гомоморфная оболочка подгруппы* $S \cap A$ *группы* A *в группе* B *содержится в* $S \cap B$.

Доказательство. а) Необходимость. По лемме 1.1 S — слабо C'-сепарабельная группа. Имеем для всякого $A \in C$ $G = A \oplus A'$ и $S = (S \cap A) \oplus \oplus (S \cap A')$. Если $\varphi \in E(A)$, то, рассматривая $\psi \in E(G)$, такой что $\psi|_A = \varphi$, $\psi|_{A'} = 0$, получим для всякого $s \in S \cap A$ $\psi s \in S$ и $\psi s = \varphi s \in S \cap A$. Пусть $A, B \in C$ и $s \in S \cap A$. Тогда $G = A \oplus A'$, $G = B \oplus B'$ и поэтому $S = (S \cap A) \oplus \oplus (S \cap A')$; $S = (S \cap B) \oplus (S \cap B')$. Пусть $\eta \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Рассмотрим $\psi \in E(G)$, действующий следующим образом: $\psi(a + a') = \eta a$, где $a \in A$, $a' \in A'$. Получаем $\eta s = \psi s \in S$, но так как $\eta s \in B$, то $\eta s \in S \cap B$.

б) Достаточность. Пусть $s \in S$. Тогда $s \in (S \cap A_{j_1}) \oplus \ldots \oplus (S \cap A_{j_r})$, где $S = (S \cap A_{j_1}) \oplus \ldots \oplus (S \cap A_{j_r}) \oplus H$ $(A_{j_1}, \ldots, A_{j_r} \in C)$. Имеем $s = s_1 + \cdots + s_r$, где $s_k \in (S \cap A_{j_k})$ $(k = \overline{1, r})$, и для любого $\varphi \in E(G)$ $\varphi s = \varphi s_1 + \cdots + \varphi s_r$. Покажем, что для всякого $k = \overline{1, r}$ $\varphi s_k \in S$. Имеем $\varphi s_k \in A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_m}$, $G = A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_m} \oplus G_1$ $(A_{i_1}, \ldots, A_{i_m} \in C)$. Если π_{i_n} — проекция группы G на A_{i_n}, то $\pi_{i_n}\varphi|_{A_{j_k}} \in \mathrm{Hom}(A_{j_k}, A_{i_n})$ $(n = \overline{1, m})$. По условию $(\pi_{i_n}\varphi)s_k \in S \cap A_{i_n}$, и так как $\varphi s_k = \sum\limits_{n=1}^{m} \pi_{i_n}(\varphi s_k)$, то $\varphi s_k \in S$, а тогда и $\varphi s \in S$.

2. Вполне характеристические и широкие подгруппы абелевых p-групп

Рассмотрим абелеву p-группу G без элементов бесконечной высоты. Пусть C — семейство циклических подгрупп, относительно которого группа G является слабо сепарабельной (в частности, C может быть семейством всех циклических прямых слагаемых группы G). Обозначим через $K_C(G)$ множество экспонент образующих элементов циклических групп из C.

$$C = \bigcup_{k \in K_C(G)} C_k, \quad \text{где} \quad C_k = \{\langle x\rangle \mid \langle x\rangle \in C,\ o(x) = p^k\}.$$

Для произвольной p-группы G (не обязательно без элементов бесконечной высоты) через $f_k(G)$ будем обозначать k-й инвариант Ульма–Капланского этой группы. Покажем, что множество $K_C(G)$ является инвариантом p-группы G без элементов бесконечной высоты (т. е. не зависит от выбора семейства C).

Лемма 2.1. *Пусть G — абелева p-группа без элементов бесконечной высоты; C — семейство циклических подгрупп группы G, относительно которого эта группа является слабо сепарабельной, и $K_C(G)$ — множество экспонент образующих элементов циклических групп из C. Тогда $K_C(G) = \{k \in \mathbb{N} \mid f_{k-1}(G) \neq 0\}$.*

Доказательство. Пусть $\langle x\rangle \in C$, тогда $\langle x\rangle$ содержится в некоторой базисной подгруппе B группы G. Имеем $G = \langle x\rangle \oplus G_1$, откуда $B = \langle x\rangle \oplus (G_1 \cap B)$. Значит, $K_C(G) \subset \{k \in \mathbb{N} \mid f_{k-1}(G) \neq 0\}$. Покажем обратное включение. Пусть k — такое натуральное число, что $f_{k-1}(G) \neq 0$. Если B — произвольная базисная подгруппа группы G, то среди циклических прямых слагаемых группы B есть слагаемое $\langle y\rangle$, такое что $o(y) = p^k$. $\langle y\rangle$ выделяется прямым слагаемым в G. Так как G — слабо C-сепарабельная группа, то $\langle y\rangle$ содержится в прямом слагаемом G' группы G, являющимся прямой суммой групп из C. Имеем $G = \langle y\rangle \oplus G''$, и отсюда $G' = \langle y\rangle \oplus (G' \cap G'')$. Так как G' — прямая сумма циклических групп, то $\langle y\rangle$ изоморфна некоторой циклической группе из C. Следовательно, $\{k \in \mathbb{N} \mid f_{k-1}(G) \neq 0\} \subset K_C(G)$.

Для произвольной абелевой p-группы G (не обязательно без элементов бесконечной высоты) обозначим через $K(G)$ множество $\{k \in \mathbb{N} \mid f_{k-1}(G) \neq 0\}$. Рассмотрим функции φ, отображающие множество $K(G)$ в множество всех целых неотрицательных чисел и удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\varphi(k) \leqslant k$ для всякого $k \in K(G)$;

2) $\varphi(k) \leqslant \varphi(k+r) \leqslant \varphi(k) + r$ для любых $k, k+r \in K(G)$, $r \in \mathbb{N}$.

Обозначим множество функций, удовлетворяющих свойствам 1)–2) через $F(G)$. $F(G)$ можно частично упорядочить, положив $\varphi \leqslant \psi$ тогда и только тогда, когда $\varphi(k) \leqslant \psi(k)$ для каждого $k \in K(G)$. Непосредственно проверяется, что $F(G)$ — решетка. Пусть $\Phi(G)$ — решетка всех вполне характеристических подгрупп группы G. Докажем теорему о связи между решетками $F(G)$ и $\Phi(G)$ для p-группы G без элементов бесконечной высоты.

Теорема 2.2. *Пусть G — абелева p-группа без элементов бесконечной высоты и C — семейство циклических подгрупп группы G, относительно которого эта группа является слабо сепарабельной. Подгруппа S группы G вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда S является слабо C_φ-сепарабельной группой, где $C_\varphi = \{S \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k)}x\rangle \mid \langle x\rangle \in C_k,\ k \in K(G)\}$, φ — некоторая функция из $F(G)$. Соответствие $\mu\colon \varphi \mapsto S$, где S — слабо C_φ-сепарабельная подгруппа группы G, определяет антиизоморфизм решеток $F(G)$ и $\Phi(G)$.*

Доказательство. 1. Покажем вначале, что μ отображает $F(G)$ в $\Phi(G)$. Установим, что всякая слабо C_φ-сепарабельная подгруппа S группы G, где

$C_\varphi = \{S \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k)}x\rangle \mid \langle x\rangle \in C_k,\ k \in K(G)\}$, φ — некоторая функция из $F(G)$, является вполне характеристической подгруппой группы G. Очевидно, всякая подгруппа $\langle p^{\varphi(k)}x\rangle$ вполне характеристична в $\langle x\rangle$. Имеем: если $\langle x\rangle, \langle y\rangle \in C_k$, то $S \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k)}x\rangle$, $S \cap \langle y\rangle = \langle p^{\varphi(k)}y\rangle$ и поэтому [5, с. 58] гомоморфная оболочка подгруппы $S \cap \langle x\rangle$ группы $\langle x\rangle$ в группе $\langle y\rangle$ совпадает с $S \cap \langle y\rangle$.

Пусть $\langle x\rangle \in C_k$, $\langle y\rangle \in C_{k+r}$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда $S \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k)}x\rangle$, $S \cap \langle y\rangle = \langle p^{\varphi(k+r)}y\rangle$. Если $\psi \in \mathrm{Hom}(\langle x\rangle, \langle y\rangle)$, то $\psi x = p^t y$, где $r \leqslant t \leqslant k + r$, и для всякого l $(0 < l \leqslant p^{k-\varphi(k)})$ имеем $\psi(lp^{\varphi(k)}x) = lp^{\varphi(k)+t}y$. Так как $\varphi(k) + t \geqslant \varphi(k) + r \geqslant \varphi(k + r)$, то гомоморфная оболочка подгруппы $S \cap \langle x\rangle$ группы $\langle x\rangle$ в группе $\langle y\rangle$ содержится в $S \cap \langle y\rangle$. Если $\psi' \in \mathrm{Hom}(\langle y\rangle, \langle x\rangle)$, то $\psi' y = p^s x$, где $0 \leqslant s \leqslant k$. Тогда для всякого l $(0 < l \leqslant p^{k+r-\varphi(k+r)})$ имеем $\psi'(lp^{\varphi(k+r)}y) = lp^{\varphi(k+r)+s}x$. Так как $\varphi(k + r) \geqslant \varphi(k)$, то гомоморфная оболочка подгруппы $S \cap \langle y\rangle$ группы $\langle y\rangle$ в группе $\langle x\rangle$ содержится в $S \cap \langle x\rangle$. Значит, по теореме 1.4 S — вполне характеристическая подгруппа группы G. Отметим, что теперь, применяя следствие 1.3, получим, что если $\varphi \in F(G)$, S_1 и S_2 — слабо C_φ-сепарабельные подгруппы группы G, где $C_\varphi = \{S_i \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k)}x\rangle \mid \langle x\rangle \in C_k,\ k \in K(G)\}$ $(i = 1, 2)$, то $S_1 = S_2$.

Пусть $\varphi \in F(G)$. Покажем, что существует слабо C_φ-сепарабельная подгруппа S группы G, где $C_\varphi = \{S \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k)}x\rangle \mid \langle x\rangle \in C_k,\ k \in K(G)\}$. Рассмотрим следующую вполне характеристическую подгруппу S группы G: $S = \sum\limits_{k \in K(G)} p^{\varphi(k)}G[p^{k-\varphi(k)}]$. По теореме 1.4 S — слабо C'-сепарабельная группа, где $C' = \{S \cap \langle x\rangle \mid \langle x\rangle \in C\}$. Пусть $k_0 \in K(G)$, $\langle x\rangle \in C_{k_0}$, тогда $\langle p^{\varphi(k_0)}x\rangle \subset p^{\varphi(k_0)}G[p^{k_0-\varphi(k_0)}]$ и, значит, $\langle p^{\varphi(k_0)}x\rangle \subset S \cap \langle x\rangle$. Докажем обратное включение. Пусть $y \in S \cap \langle x\rangle$, $y = y_{k_1} + \dots + y_{k_n}$, где $y_{k_i} \in p^{\varphi(k_i)}G[p^{k_i-\varphi(k_i)}]$ $(i = \overline{1, n})$. Имеем $G = \langle x\rangle \oplus G'$. Запишем каждое y_{k_i} $(i = \overline{1, n})$ в виде $y_{k_i} = x_{k_i} + g'_{k_i}$, где $x_{k_i} \in \langle x\rangle$, $g'_{k_i} \in G'$. Тогда $h(x_{k_i}) \geqslant h(y_{k_i}) \geqslant \varphi(k_i)$ для всякого $i = \overline{1, n}$ и $o(x_{k_i}) \leqslant o(y_{k_i}) \leqslant k_i - \varphi(k_i)$ для всякого $i = \overline{1, n}$. Для $k_i \geqslant k_0$ имеем с учетом условия 2) для функции φ $h(x_{k_i}) \geqslant \varphi(k_i) \geqslant \varphi(k_0)$ и, значит, $x_{k_i} \in \langle p^{\varphi(k_0)}x\rangle$. Если же $k_i < k_0$, то имеем $k_0 = k_i + r_i$, $r_i \in \mathbb{N}$, и, учитывая условие 2) для функции φ, получаем $k_0 - \varphi(k_0) = (k_i + r_i) - \varphi(k_i + r_i) \geqslant (k_i + r_i) - (\varphi(k_i) + r_i) = k_i - \varphi(k_i)$. Отсюда $o(x_{k_i}) \leqslant k_i - \varphi(k_i) \leqslant k_0 - \varphi(k_0)$, и значит, $x_{k_i} \in \langle p^{\varphi(k_0)}x\rangle$. Замечая, что $y = x_{k_1} + \dots + x_{k_n}$, получаем $y \in \langle p^{\varphi(k_0)}x\rangle$, и поэтому $S \cap \langle x\rangle \subset \langle p^{\varphi(k_0)}x\rangle$. Значит, $S \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k_0)}x\rangle$.

2. Покажем теперь, что μ — сюръективное отображение, то есть всякая вполне характеристическая подгруппа S группы G является слабо C_φ-сепарабельной группой, где $C_\varphi = \{S \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k)}x\rangle \mid \langle x\rangle \in C_k,\ k \in K(G)\}$, φ — некоторая функция из $F(G)$. Пусть S — вполне характеристическая подгруппа группы G. По теореме 1.4 подгруппа S является слабо C'-сепарабельной группой, где $C' = \{S \cap \langle x\rangle \mid \langle x\rangle \in C\}$. Рассмотрим функцию $\varphi\colon K(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, такую что $\varphi(k) = k$, если $S \cap \langle x\rangle = 0$ для некоторого $\langle x\rangle \in C_k$, и $\varphi(k) = m$, если $0 \neq S \cap \langle x\rangle = \langle p^m x\rangle$ для некоторого $\langle x\rangle \in C_k$. Из свойства г) гомоморфных оболочек [5, с. 58] вытекает, что

функция φ определена корректно, то есть если $S \cap \langle x \rangle = 0$ для некоторого $\langle x \rangle \in C_k$, то $S \cap \langle y \rangle = 0$ для любого $\langle y \rangle \in C_k$, и если $0 \neq S \cap \langle x \rangle = \langle p^m x \rangle$, то $0 \neq S \cap \langle y \rangle = \langle p^m y \rangle$ для любого $\langle y \rangle \in C_k$. Условие 1) для функции φ выполняется по построению. Покажем, что выполняется условие 2). Пусть $\langle x \rangle \in C_k$, $\langle y \rangle \in C_{k+r}$, $r \in \mathbb{N}$ и $0 \neq S \cap \langle x \rangle = \langle p^{\varphi(k)} x \rangle$; $0 \neq S \cap \langle y \rangle = \langle p^{\varphi(k+r)} x \rangle$. Если $\psi \in \mathrm{Hom}(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$, то $\psi(x) = p^t y$, где $r \leqslant t \leqslant k+r$, и значит, $\psi(p^{\varphi(k)} x) = p^{\varphi(k)+t} y$. Поэтому, чтобы гомоморфная оболочка подгруппы $\langle p^{\varphi(k)} x \rangle$ группы $\langle x \rangle$ в группе $\langle y \rangle$ содержалась в $\langle p^{\varphi(k+r)} y \rangle$, надо, чтобы выполнялось неравенство $\varphi(k+r) \leqslant \varphi(k) + r$. Если $\psi' \in \mathrm{Hom}(\langle y \rangle, \langle x \rangle)$, то $\psi' y = p^s x$, где $0 \leqslant s \leqslant k$, и значит, $\psi'(p^{\varphi(k+r)} y) = p^{s+\varphi(k+r)} x$. Поэтому, чтобы гомоморфная оболочка подгруппы $\langle p^{\varphi(k+r)} y \rangle$ группы $\langle y \rangle$ в группе $\langle x \rangle$ содержалась в $\langle p^{\varphi(k)} x \rangle$, надо, чтобы $\varphi(k) \leqslant \varphi(k+r)$. Итак, установлена выполнимость условия 2) в случае, когда $S \cap \langle x \rangle \neq 0$ и $S \cap \langle y \rangle \neq 0$.

Если $S = 0$, то $\varphi(k) = k$ для всякого $k \in K(G)$ и условие 2) выполняется тривиально. Пусть $S \neq 0$ и $S \cap \langle y \rangle = 0$. Если бы $0 \neq S \cap \langle x \rangle = \langle p^{\varphi(k)} x \rangle$, то имели бы $\varphi(k) < k$ и $\varphi(k) + r < k + r$. Рассматривая гомоморфизм $\psi_1 \in \mathrm{Hom}(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$, такой что $\psi_1(x) = p^r y$, получили бы, что гомоморфная оболочка подгруппы $\langle p^{\varphi(k)} x \rangle$ группы $\langle x \rangle$ в группе $\langle y \rangle$ должна содержать ненулевой элемент $p^{\varphi(k)+r} y$ (так как $\psi_1(p^{\varphi(k)} x) = p^{\varphi(k)+r} y \neq 0$). Отсюда $S \cap \langle y \rangle \neq 0$. Противоречие. Значит, если $S \cap \langle y \rangle = 0$, то и $S \cap \langle x \rangle = 0$. Поэтому $\varphi(k) = k$ и $\varphi(k) + r = k + r$, и условие 2) выполняется.

Пусть теперь $S \cap \langle y \rangle = \langle p^{\varphi(k+r)} y \rangle \neq 0$, а $S \cap \langle x \rangle = 0$. Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были сделаны в случае $S \cap \langle y \rangle \neq 0$, $S \cap \langle x \rangle \neq 0$, получим $\varphi(k) \leqslant \varphi(k+r)$ (так как в нашем случае $\varphi(k) = k$, то $k \leqslant \varphi(k+r)$). Используя то, что $\varphi(k+r) \leqslant k + r$ и $\varphi(k) = k$, получаем $\varphi(k+r) \leqslant \varphi(k) + r$.

3. Инъективность отображения μ вытекает из следствия 1.3. Из леммы 1.2 следует, что $f \leqslant g$ $(f, g \in F(G))$ тогда и только тогда, когда $\mu g \subset \mu f$. Поэтому биекция μ является решеточным антиизоморфизмом. Теорема доказана.

Напомним [6], что вполне характеристическая подгруппа L p-группы G называется широкой, если $L + B = G$ для любой базисной подгруппы B группы G.

Для произвольной p-группы G обозначим через $F'(G)$ подрешетку решетки $F(G)$, определяемую следующим образом:

$$F'(G) = \begin{cases} F(G), & \text{если редуцированная часть группы } G \text{ ограничена;} \\ \{\varphi \in F(G) \mid \sup\{k - \varphi(k) \mid k \in K(G)\} = \infty\}, & \text{если редуцированная часть группы } G \text{ неограничена.} \end{cases}$$

Обозначим через $\Phi'(G)$ решетку всех широких подгрупп группы G.

Учитывая, что в неограниченной p-группе без элементов бесконечной высоты вполне характеристическая подгруппа является широкой тогда и только тогда, когда она неограничена [6, с. 21], получаем такое

Следствие 2.3. *Пусть G — абелева p-группа без элементов бесконечной высоты и C — семейство циклических подгрупп группы G, относительно которого эта группа является слабо сепарабельной. Подгруппа L группы G является широкой подгруппой группы G тогда и только тогда, когда L является слабо $C_{\varphi'}$-сепарабельной подгруппой, где $C_{\varphi'} = \{L \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi'(k)}x\rangle \mid \langle x\rangle \in C_k,\ k \in K(G)\}$, φ' — некоторая функция из $F'(G)$. Соответствие $\mu\colon \varphi' \to L$, где L — слабо $C_{\varphi'}$-сепарабельная подгруппа группы G, определяет антиизоморфизм решеток $F'(G)$ и $\Phi'(G)$.*

При доказательстве теоремы 2.2 было установлено, что подгруппа $S = \sum\limits_{k\in K(G)} p^{\varphi(k)}G[p^{k-\varphi(k)}]$ является слабо C_φ-сепарабельной подгруппой, где $C_\varphi = \{S \cap \langle x\rangle = \langle p^{\varphi(k)}x\rangle \mid \langle x\rangle \in C_k,\ k \in K(G)\}$, φ — некоторая функция из $F(G)$. Поэтому справедливо такое

Следствие 2.4. *Пусть G — абелева p-группа без элементов бесконечной высоты. S является вполне характеристической (широкой) подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $S = \sum\limits_{k\in K(G)} p^{\varphi(k)}G[p^{k-\varphi(k)}]$, где φ — некоторая функция из $F(G)$ $(F'(G))$. Соответствие $\mu\colon \varphi \mapsto \sum\limits_{k\in K(G)} p^{\varphi(k)}G[p^{k-\varphi(k)}]$ определяет антиизоморфизм решеток $F(G)$ и $\Phi(G)$ $(F'(G)$ и $\Phi'(G))$.*

Для абелевых p-групп, разложимых в прямые суммы циклических подгрупп, получаем такое

Следствие 2.5. *Пусть $B = \bigoplus\limits_{k\in K} B_k$, где $B_k = \bigoplus C(p^k)$. Подгруппа S является вполне характеристической (широкой) подгруппой группы B тогда и только тогда, когда $S = \bigoplus\limits_{k\in K} p^{\varphi(k)}B_k$, где φ — некоторая функция из $F(B)$ $(F'(B))$. Соответствие $\mu\colon \varphi \mapsto \bigoplus\limits_{k\in K} p^{\varphi(k)}B_k$ определяет антиизоморфизм решеток $F(B)$ и $\Phi(B)$ $(F'(B)$ и $\Phi'(B))$.*

Это следствие вытекает непосредственно из теоремы 2.2 и следствия 2.3, если рассматривать группу B как слабо C-сепарабельную группу, где C состоит из всех циклических прямых слагаемых групп B_k $(k \in K)$, и учесть, что $S = \bigoplus\limits_{k\in K}(S \cap B_k)$. Заметим, что в нашем случае $K = K(B)$.

Из следствия 2.5 вытекает результат работы [1] (теорема 2.8) о строении вполне характеристических и широких подгрупп прямых сумм циклических p-групп.

Следствие 2.6. *Пусть G — абелева p-группа, L является широкой подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $L = \sum\limits_{k\in K(G)} p^{\varphi(k)}G[p^{k-\varphi(k)}]$, где φ — некоторая функция из $F'(G)$. Соответствие $\mu\colon \varphi \mapsto \sum\limits_{k\in K(G)} p^{\varphi(k)}G[p^{k-\varphi(k)}]$ определяет антиизоморфизм решеток $F'(G)$ и $\Phi'(G)$.*

Доказательство. Так как делимая часть группы G содержится в любой ее широкой подгруппе, то, не умаляя общности, можно считать, что G — редуцированная p-группа. Пусть $L = \sum\limits_{k \in K(G)} p^{\varphi(k)} G[p^{k-\varphi(k)}]$, где φ — некоторая функция из $F'(G)$. Так как каждая подгруппа $p^{\varphi(k)} G[p^{k-\varphi(k)}]$ — вполне характеристическая подгруппа группы G, то L — вполне характеристическая подгруппа группы G. Если G — ограниченная группа, то L — широкая подгруппа группы G. Пусть G — неограниченная группа и s — произвольное неотрицательное целое число. Обозначим через k_0 минимальное из всех таких чисел k, принадлежащих $K(G)$, что $k - \varphi(k) \geqslant s$. Тогда если $g \in G$, $e(g) \leqslant s$ и $h(g) \geqslant k_0$, то $g \in p^{\varphi(k_0)} G[p^{k_0-\varphi(k_0)}]$, и значит $g \in L$. Следовательно, подгруппа L удовлетворяет условию Пирса ([7, с. 18]) и поэтому является широкой подгруппой ([7, теорема 67.2]).

Пусть теперь L — широкая подгруппа группы G, B — базисная подгруппа группы G. Так как $L \cap B$ — широкая подгруппа группы B ([6, следствие 2.8]) и B — p-группа без элементов бесконечной высоты, то в силу следствия 2.4 $L \cap B = \sum\limits_{k \in K(G)} p^{\varphi(k)} B[p^{k-\varphi(k)}]$, где φ — некоторая функция из $F'(G)$ (понятно, что $K(B) = K(G)$). С другой стороны, если $L' = \sum\limits_{k \in K(G)} p^{\varphi(k)} G[p^{k-\varphi(k)}]$, то $L' \cap B = \sum\limits_{k \in K(G)} p^{\varphi(k)} B[p^{k-\varphi(k)}]$. Для любой подгруппы A группы G обозначим через $H(A)$ последовательность $(m_0, m_1, \ldots, m_n, \ldots)$, где $m_n = \min\{h(p^n a) \mid a \in A\}$. Учитывая [8, предложение 5.2], получаем $H(L') = H(L' \cap B) = H(L \cap B) = H(L)$. Тогда $L = L' = G(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)$, где $(r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots) = H(L) = H(L')$ ([7, теорема 67.2]).

Из следствия 2.6 вытекает основной результат работы [1] (теорема 2.11) о строении широких подгрупп абелевых p-групп.

Замечание. Исходя из описания широких подгрупп, данного в следствии 2.6, можно получить значения инвариантов Ульма–Капланского $f_n(L)$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) таких подгрупп. Пусть L — широкая подгруппа абелевой p-группы G и $\mu^{-1} L = \varphi$, где $\varphi \in F'(G)$. Если B — базисная подгруппа группы G, то $L \cap B$ — базисная подгруппа группы L ([6, лемма 2.12]), и поэтому $f_n(L) = f_n(L \cap B)$ для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Учитывая, что $L \cap B$ — широкая подгруппа группы B, получаем

$$f_n(L) = f_n(L \cap B) = r\Bigg(\bigoplus_{k \in K(G)} p^{\varphi(k)} B_k \;\Bigg|\; p^{\varphi(k)} B_k = \bigoplus C(p^{n+1}) \Bigg) =$$

$$= r\Bigg(\bigoplus_{k \in K(G)} p^{\varphi(k)} B_k \;\Bigg|\; k - \varphi(k) = n+1 \Bigg) =$$

$$= \sum_{k \in K(G)} (r(p^{\varphi(k)} B_k) \mid k - \varphi(k) = n+1) =$$

$$= \sum_{k\in K(G)} (r(B_k) \mid k-\varphi(k)-1=n) = \sum_{k\in K(G)} (f_{k-1}(B) \mid k-\varphi(k)-1=n) =$$
$$= \sum_{k\in K(G)} (f_{k-1}(G) \mid k-\varphi(k)-1=n).$$

Итак, $f_n = \sum_{k\in K(G)} (f_{k-1}(G) \mid k-\varphi(k)-1=n)$. Понятно, что аналогичным образом можно получить значения всех инвариантов Ульма–Капланского любой неограниченной вполне характеристической подгруппы абелевой p-группы без элементов бесконечной высоты. (Об инвариантах Ульма–Капланского $f_n(L)$ группы L см. также [1].)

Для абелевой p-группы G обозначим через $M(G)$ следующее множество: $\{m \in \mathbb{N}\cup\{0\} \mid f_m(G) \neq 0\}$. Из теоремы 2.2 и следствия 2.6 вытекают такие результаты.

Следствие 2.7. *Решетки вполне характеристических подгрупп абелевых p-групп без элементов бесконечной высоты G и G' изоморфны, если $M(G) = M(G')$.*

Следствие 2.8. *Решетки широких подгрупп абелевых p-групп G и G' изоморфны, если $M(G) = M(G')$.*

Рассмотрим теперь некоторые свойства решеток вполне характеристических и широких подгрупп абелевых p-групп. Хорошо известно, что решетка вполне характеристических подгрупп любой абелевой группы является полной. Выясним, в каком случае является полной решетка широких подгрупп.

Следствие 2.9. *Решетка широких подгрупп абелевой p-группы G является полной тогда и только тогда, когда редуцированная часть группы G ограничена.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть решетка широких подгрупп группы G является полной. Предположим, что редуцированная часть группы G неограничена. Занумеруем числа из $K(G)$ в естественном порядке: $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$. Построим функции φ_n $(n \in \mathbb{N})$, определенные на множестве $K(G)$ следующим образом: $\varphi_n(k_i) = k_i$, если $i < n$, и $\varphi_n(k_j) = k_n$, если $j \geqslant n$. Для каждой функции φ_n выполняются условия 1), 2) определения функций из $F(G)$. Также имеем $\sup\{k-\varphi_n(k) \mid k \in K(G)\} = \infty$. Следовательно, $\varphi_n \in F'(G)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\psi = \sup\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Имеем $\psi(k_i) = k_i$ для всякого $k_i \in K(G)$, и поэтому $\sup\{k-\psi(k) \mid k \in K(G)\} = 0$. Значит, $\psi \notin F'(G)$. Следовательно, решетка $F'(G)$ не полна, а значит, и решетка $\Phi'(G)$ не полна.

б) Достаточность. Пусть редуцированная часть группы G ограничена. Тогда $F(G) = F'(G)$ и так как $F(G)$ — полная решетка, то и решетки $F'(G)$ и $\Phi'(G)$ полны.

Легко устанавливается, что решетка $F'(G)$ является дистрибутивной, а решетка $F(G)$ (как и решетка $F'(G)$ в случае ее полноты) удовлетворяет обобщенным дистрибутивным законам. Поэтому справедливы такие следствия.

Следствие 2.10. *Решетка широких подгрупп любой абелевой p-группы G является дистрибутивной.*

Следствие 2.11. *Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ и $\{S_j\}_{j\in J}$ — семейства вполне характеристических подгрупп абелевой p-группы G без элементов бесконечной высоты. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$\Big(\sum_{i\in I} S_i\Big) \cap \Big(\sum_{j\in J} S_j\Big) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (S_i \cap S_j);$$
$$\bigcap_{i\in I} S_i + \bigcap_{j\in J} S_j = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (S_i + S_j).$$

Следствие 2.12. *Пусть $\{L_i\}_{i\in I}$ и $\{L_j\}_{j\in J}$ — семейства широких подгрупп абелевой p-группы G с ограниченной редуцированной частью. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$\Big(\sum_{i\in I} L_i\Big) \cap \Big(\sum_{j\in J} L_j\Big) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (L_i \cap L_j);$$
$$\bigcap_{i\in I} L_i + \bigcap_{j\in J} L_j = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (L_i + L_j).$$

Напомним некоторые определения из теории решеток. Полная решетка $\mathfrak{L}$ называется непрерывной, если $a \wedge \big(\bigvee \Omega\big) = \bigvee\{a \wedge \omega \mid \omega \in \Omega\}$ для любого $a \in \mathfrak{L}$ и любого направленного множества $\Omega \subset \mathfrak{L}$ ([9, с. 115]). Брауэровой решеткой называется решетка $\mathfrak{L}$, в которой для любых двух данных элементов a и b множество всех $x \in \mathfrak{L}$, таких что $a \wedge x \leqslant b$, имеет наибольший элемент (обозначается $b : a$) ([10, с. 67]).

Из следствий 2.11, 2.12 с учетом [10, теорема 24, с. 170] вытекают такие результаты.

Следствие 2.13. *Решетка вполне характеристических подгрупп абелевой p-группы без элементов бесконечной высоты (широких подгрупп абелевой p-группы с ограниченной редуцированной частью) является непрерывной решеткой.*

Следствие 2.14. *Решетка вполне характеристических подгрупп абелевой p-группы без элементов бесконечной высоты (широких подгрупп абелевой p-группы с ограниченной редуцированной частью) является брауэровой решеткой.*

Используя полученные результаты, можно установить также, когда решетка вполне характеристических подгрупп периодической абелевой группы является цепью.

Следствие 2.15. *Решетка вполне характеристических подгрупп периодической абелевой группы G является цепью тогда и только тогда, когда G либо редуцированная p-группа, имеющая не более двух ненулевых инвариантов Ульма–Капланского, и если их в точности два, то они относятся к двум последовательным неотрицательным целым числам, либо G — делимая p-группа.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть решетка вполне характеристических подгрупп периодической абелевой группы G является цепью. Ясно, что G — p-группа. Пусть $G = R \oplus V$, где R — редуцированная группа, V — делимая группа и $R \neq 0$, $V \neq 0$. Всякая вполне характеристическая подгруппа S группы G имеет вид $S = R' \oplus V[p^{k_p}]$, где R' — вполне характеристическая подгруппа группы R и $k_p \geqslant \sup\{e(r) \mid r \in R'\}$ (полагаем $V[p^\infty] = V$) ([5, теорема 1.4]). Рассмотрим две вполне характеристические подгруппы группы G: $S_1 = V[p^2]$ и $S_2 = R[p] \oplus V[p]$. Каждая из этих подгрупп не содержится в другой. Следовательно, группа G либо делимая, либо редуцированная.

Предположим, что редуцированная p-группа G имеет ненулевые элементы бесконечной высоты. Рассмотрим вполне характеристическую подгруппу $G[p]$ группы G. Имеем для всякого $n \in \mathbb{N}$ $G[p] \subset p^n G$ (так как из обратного включения вытекала бы ограниченность группы G). Значит, $G[p] \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} p^n G = G^1$. Но если все элементы порядка p группы G имеют бесконечную высоту, то группа G делимая. Противоречие.

Итак, редуцированная p-группа G, решетка вполне характеристических подгрупп которой является цепью, — группа без элементов бесконечной высоты. Предположим, что $|K(G)| \geqslant 2$ ($K(G) = \{k \in \mathbb{N} \mid f_{k-1}(G) \neq 0\}$). Занумеруем числа из $K(G)$ в естественном порядке. Покажем, что если существует хотя бы одна пара чисел $k_i, k_{i+1} \in K(G)$, такая что $k_{i+1} - k_i > 1$, то решетка $\Phi(G)$ не является цепью. Выберем две функции φ и ψ из $F(G)$ так, чтобы $\varphi(k_i) = k_i - 1$ и $\varphi(k_{i+1}) = k_{i+1} - 1$; $\psi(k_i) = k_i$ и $\psi(k_{i+1}) = k_i$ (в силу условий 1) и 2) для функций из $F(G)$ это можно сделать). Тогда $\varphi(k_i) < \psi(k_i)$, $\varphi(k_{i+1}) > \psi(k_{i+1})$, т. е. функции φ и ψ несравнимы, а значит, решетка $F(G)$ (а потому и решетка $\Phi(G)$) не является цепью.

Предположим теперь, что $|K(G)| \geqslant 3$ и $K(G)$ представляет собой отрезок натурального ряда. Пусть $k_i, k_{i+1}, k_{i+2} \in K(G)$. Тогда $k_{i+1} - k_i = k_{i+2} - k_{i+1} = 1$. Выберем две функции $\varphi, \psi \in F(G)$ так, чтобы $\varphi(k_i) = k_i - 1$, $\varphi(k_{i+1}) = k_i$, $\varphi(k_{i+2}) = k_i + 1$; $\psi(k_i) = \psi(k_{i+1}) = \psi(k_{i+2}) = k_i$. Имеем $\varphi(k_i) < \psi(k_i)$, $\varphi(k_{i+2}) > \psi(k_{i+2})$. Значит, решетка $\Phi(G)$ не является цепью.

б) Достаточность. Пусть G — делимая p-группа. Тогда всякая ее вполне характеристическая подгруппа имеет вид $G[p^k]$, где k — неотрицательное целое число или символ ∞. Если $S_1 = G[p^l]$ и $S_2 = G[p^m]$, причем $l \leqslant m$, то $S_1 \subset S_2$. Если G — редуцированная p-группа, имеющая только один ненулевой ульмовский инвариант, то очевидно, что решетка $F(G)$ является цепью, а поэтому и решетка $\Phi(G)$ — цепь. Пусть теперь G — редуцированная p-группа, имеющая в точности два ненулевых ульмовских инварианта, относящихся к двум последовательным неотрицательным целым числам k и $k+1$. Тогда $K(G) = \{k+1, k+2\}$. Пусть $\varphi, \psi \in F(G)$ и $\varphi(k+1) > \psi(k+1)$. Так как $\psi(k+2) \leqslant \psi(k+1)+1$, то $\psi(k+2) \leqslant \varphi(k+2)$, а поэтому $\psi < \varphi$. Если же $\varphi(k+1) = \psi(k+1)$, то очевидно, что функции φ и ψ сравнимы. Следовательно, $F(G)$, а значит и $\Phi(G)$, является цепью.

Следствие 2.15 представляет собой утверждение теоремы 2.4 из [11], относящееся к периодическим абелевым группам.

3. Вполне характеристические подгруппы сепарабельных абелевых групп без кручения

Пусть G — сепарабельная абелева группа без кручения и C — семейство подгрупп ранга 1 группы G, относительно которого эта группа является слабо сепарабельной. Обозначим через $T_C(G)$ множество типов подгрупп из C, а через $\Omega(G)$ — множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы G. Покажем, что $T_C(G)$ — инвариант группы G.

Лемма 3.1. *Пусть G — сепарабельная абелева группа без кручения и C — семейство подгрупп ранга 1 группы G, относительно которого эта группа слабо сепарабельна. Тогда $T_C(G) = \Omega(G)$.*

Доказательство. Пусть $t_1 \in \Omega(G)$. Тогда существует прямое слагаемое A_1 ранга 1 группы G, такое что $t(A_1) = t_1$. Пусть $a_1 \in A_1$. Тогда $a_1 \in \bigoplus\limits_{j=1}^{s} A_{k_j}$, где $\bigoplus\limits_{j=1}^{s} A_{k_j}$ — прямое слагаемое группы G, и A_{k_j} $(j = \overline{1,s})$ принадлежат C. Так как $\bigoplus\limits_{j=1}^{s} A_{k_j}$ — сервантная подгруппа группы G и $A_1 = \langle a_1 \rangle_*$, то $A_1 \subset \bigoplus\limits_{j=1}^{s} A_{k_j}$, и значит, A_1 выделяется прямым слагаемым в группе $\bigoplus\limits_{j=1}^{s} A_{k_j}$ ([12, с. 50, свойство б)]). Тогда из изоморфизма любых двух разложений вполне разложимой группы в прямую сумму групп ранга 1 получаем: существует такое A_{k_i} $(i = \overline{1,s})$, что $A_{k_i} \cong A_1$, и отсюда $t(A_{k_i}) = t_1$. Значит, $\Omega(G) \subset T_C(G)$. Обратное включение очевидно.

При описании строения вполне характеристических подгрупп и их решетки для сепарабельных абелевых групп без кручения будет существенно использоваться понятие прямого предела. Напомним, как вводится это понятие, и приведем некоторые его свойства ([12, § 11]).

Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство групп, занумерованных с помощью индексов, составляющих частично упорядоченное множество I, которое является направленным. Предположим, что для каждой пары индексов $i, j \in I$, где $i \leqslant j$, задан гомоморфизм $\pi_i^j\colon\ A_i \to A_j$ $(i \leqslant j)$, причем выполнены условия

1) π_i^i — тождественное отображение группы A_i при любом $i \in I$;

2) если $i \leqslant j \leqslant k$, то $\pi_j^k \cdot \pi_i^j = \pi_i^k$.

В этом случае система $\{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ называется прямым спектром.

Составим прямую сумму $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ и обозначим через B подгруппу группы A, порожденную всеми элементами вида $a_i - \pi_i^j a_i\ (i \leqslant j)$.

Прямым пределом, или просто пределом, прямого спектра $\{A_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ называется факторгруппа A/B:

$$\varinjlim_I A_i = A/B.$$

Отметим некоторые свойства прямых пределов.

1. Существуют такие гомоморфизмы $\pi_i\colon\ A_i \to \varinjlim_I A_i\ (i \in I)$, что коммутативны все диаграммы

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\pi_i^j"] \arrow[d, "\pi_i"'] & A_j \arrow[dl, "\pi_j"] \\ \varinjlim_I A_i & \end{tikzcd} \qquad (i \leqslant j).$$

(Этим условиям удовлетворяют гомоморфизмы $\pi_i\colon\ a_i \to a_i + B$.) Такие гомоморфизмы $\pi_i\ (i \in I)$ называются каноническими.

2. Каждый элемент $a_* \in \varinjlim_I A_i$ представим в виде $a_i + B$, где $a_i \in A_i$ для некоторого $i \in I$.

3. Группы $\operatorname{Im}\pi_i\ (i \in I)$ в совокупности покрывают $\varinjlim_I A_i$.

Докажем теперь две леммы о C-сепарабельных группах.

Пусть G — C-сепарабельная группа, где все группы из C имеют конечный ранг. Рассмотрим семейство $\{G_i\}_{i\in I}$, состоящее из всех прямых слагаемых группы G, которые являются прямой суммой конечного числа групп, принадлежащих C. Частичный порядок на множестве I зададим условием $i \leqslant j$ тогда и только тогда, когда $G_i \subset G_j$. Пусть $\pi_i^j\colon\ G_i \to G_j$ — естественное вложение подгруппы G_i в G_j при $i \leqslant j$, а σ_i — естественное вложение G_i в G.

Лемма 3.2. *Пусть G — C-сепарабельная группа, где все группы из C имеют конечный ранг. Тогда система групп и гомоморфизмов $\{G_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ является прямым спектром и $\varinjlim_I G_i \cong G$, причем существует единственный изоморфизм $\sigma\colon\ \varinjlim_I G_i \to G$, для которого все диаграммы*

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[d, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ \varinjlim_I G_i \arrow[r, "\sigma"] & G \end{tikzcd}$$

коммутативны.

Доказательство. Покажем, что множество I является направленным. Пусть $i, j \in I$. Рассмотрим группы G_i и G_j. Эти группы имеют конечный ранг. Выберем в каждой из этих групп максимальную линейно независимую систему элементов и вложим объединение этих систем в некоторое прямое слагаемое G_k группы G ($k \in I$). В силу C-сепарабельности группы G это можно сделать. Учитывая, что G_k сервантна в G, получаем $G_i \subset G_k$ и $G_j \subset G_k$, то есть $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$. Следовательно, I — направленное множество и $\{G_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ — прямой спектр.

Если $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$ — внешняя прямая сумма групп G_i; B — подгруппа группы $\bigoplus\limits_{i\in I} G_i$, порожденная всеми элементами вида $g_i - \pi_i^j g_i$, где $i \leqslant j$ (элемент g_i отождествляется с вектором $(\dots, 0, g_i, 0, \dots)$), то $\varinjlim_I G_i = \bigoplus\limits_{i\in I} G_i \Big/ B$.

Все диаграммы

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\pi_i^j"] \arrow[dr, "\sigma_i"'] & G_j \arrow[d, "\sigma_j"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad (i \leqslant j) \tag{1}$$

коммутативны. Тогда ([12, теорема 11.1]) существует единственный гомоморфизм $\sigma\colon\ \varinjlim_I G_i \to G$, что все диаграммы

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[d, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ \varinjlim_I G_i \arrow[r, "\sigma"] & G \end{tikzcd} \qquad (i \in I) \tag{2}$$

коммутативны. Гомоморфизм σ действует следующим образом: если $g_* \in \varinjlim_I G_i$, то $g_* = g_i + B$ для некоторого $i \in I$, и тогда $\sigma g_* = \sigma_i g_i = g_i$.

Рассмотрим гомоморфизм $\rho\colon\ G \to \varinjlim_I G_i$, который действует так: $\rho g = \pi_i g = g + B$, где g рассматривается как элемент некоторой подгруппы G_i $(i \in I)$ (это возможно, так как группа G C-сепарабельна). Покажем, что гомоморфизм ρ определен корректно. Действительно, если $g \in G_j$ $(j \in I)$ и $i \neq j$, то существует такой индекс $k \in I$, что $k \geqslant i$ и $k \geqslant j$, то есть $G_i \subset G_k$ и $G_j \subset G_k$. Тогда коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\pi_i^k"] \arrow[d, "\pi_i"'] & G_k \arrow[dl, "\pi_k"] \\ \varinjlim_I G_i & \end{tikzcd} \quad ; \qquad \begin{tikzcd} G_j \arrow[r, "\pi_j^k"] \arrow[d, "\pi_j"'] & G_k \arrow[dl, "\pi_k"] \\ \varinjlim_I G_i & \end{tikzcd} \quad .$$

Значит, $\pi_i g = \pi_k \pi_i^k g$, $\pi_j g = \pi_k \pi_j^k g$. Так как π_i^k и π_j^k — естественные вложения групп G_i и G_j в группу G_k, то $\pi_i g = \pi_j g$, и поэтому ρg не зависит от выбора группы G_i $(i \in I)$, которой принадлежит элемент g.

Тогда коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & G_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[d, "\pi_i"] \\ G \arrow[r, "\rho"] & \varinjlim_I G_i \end{tikzcd} \qquad (i \in I). \tag{3}$$

«Склеив» для каждого $i \in I$ диаграммы вида (2) и (3), получим диаграммы

$$\begin{tikzcd} & G_i \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[d, "\pi_i"] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ G \arrow[r, "\rho"] & \varinjlim_I G_i \arrow[r, "\sigma"] & G \end{tikzcd} \qquad (i \in I) \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd} & G_i \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[d, "\sigma_i"] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ \varinjlim_I G_i \arrow[r, "\sigma"] & G \arrow[r, "\rho"] & \varinjlim_I G_i \end{tikzcd} \qquad (i \in I). \tag{5}$$

Из коммутативности малых треугольников в диаграммах (4) и (5) получаем, что и большие треугольники коммутативны. Так как подгруппы $\operatorname{Im}\sigma_i$ покрывают группу G, а подгруппы $\operatorname{Im}\pi_i$ покрывают группу $\varinjlim_I G_i$, то ρ и σ взаимно обратны. Следовательно, $\varinjlim_I G_i \cong G$.

Лемма 3.3. *Пусть G — C-сепарабельная группа, где все группы из C имеют конечный ранг, и для всякого $i \in I$ $\bar{G}_i$ — подгруппа группы G_i, причем $\bar{G}_i \subset \bar{G}_j$, если $i \leqslant j$; $\varphi_i, \bar{\pi}_i^j$ — естественные вложения подгруппы $\bar{G}_i$ в группы G_i и $\bar{G}_j$ $(i \leqslant j)$ соответственно. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Система групп и гомоморфизмов $\{\bar{G}_i\ (i \in I);\ \bar{\pi}_i^j\}$ является прямым спектром, и существует единственный мономорфизм $\varphi_*\colon \varinjlim_I \bar{G}_i \to \varinjlim_I G_i$, для которого все диаграммы*

$$\begin{tikzcd} \bar{G}_i \arrow[r, "\bar{\pi}_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \varinjlim_I \bar{G}_i \arrow[d, "\varphi_*"] \\ G_i \arrow[r, "\pi_i"] & \varinjlim_I G_i \end{tikzcd} \qquad (i \in I)$$

коммутативны ($\bar{\pi}_i$ — канонический гомоморфизм $\bar{G}_i$ в $\varinjlim_I \bar{G}_i$).

2. *Пусть* $\bar{G} = \sigma\varphi_*(\varinjlim_I \bar{G}_i)$ *(σ — однозначно определенное изоморфное отображение* $\varinjlim_I G_i$ *на* G*, о котором говорится в лемме* 3.2*). Тогда* $\bar{G}$ *— подгруппа группы* G*, обладающая следующими свойствами:*

а) *любая группа* $\bar{G}_i$ $(i \in I)$ *является подгруппой группы* $\bar{G}$*;*

б) *для всякого элемента* $\bar{g} \in \bar{G}$ *существует такая подгруппа* $\bar{G}_i$ $(i \in I)$*, что* $\bar{g} \in \bar{G}_i$*.*

Доказательство. 1. В лемме 3.2 установлено, что система групп и гомоморфизмов $\{G_i\ (i \in I);\ \pi_i^j\}$ является прямым спектром. Поэтому прямым спектром является система групп и гомоморфизмов $\{\bar{G}_i\ (i \in I);\ \bar{\pi}_i^j\}$.

Диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bar{G}_i \arrow[r, "\bar{\pi}_i^j"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \bar{G}_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\ G_i \arrow[r, "\pi_i^j"] & G_j \end{tikzcd} \qquad (i \leqslant j)$$

коммутативны. Тогда ([12, теорема 11.2]) существует однозначно определенный мономорфизм φ_*, для которого все диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bar{G}_i \arrow[r, "\bar{\pi}_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \varinjlim_I \bar{G}_i \arrow[d, "\varphi_*"] \\ G_i \arrow[r, "\pi_i"] & \varinjlim_I G_i \end{tikzcd} \qquad (i \in I)$$

коммутативны.

Так как π_i и $\bar{\pi}_i$ — канонические гомоморфизмы, то $\pi_i g_i = g_i + B$, где B — подгруппа группы $\bigoplus_{i \in I} G_i$, порожденная всеми элементами вида $g_i - \pi_i^j g_i$ $(i \leqslant j)$; $\bar{\pi}_i \bar{g}_i = \bar{g}_i + \bar{B}$, где $\bar{B}$ — подгруппа группы $\bigoplus_{i \in I} \bar{G}_i$, порожденная всеми элементами вида $\bar{g}_i - \bar{\pi}_i^j \bar{g}_i$ $(i \leqslant j)$. φ_* действует так: если $\bar{g}_* \in \varinjlim_I \bar{G}_i$, то $\bar{g}_* = \bar{g}_i + \bar{B}$ для некоторого $i \in I$, и тогда $\varphi_*(\bar{g}_*) = \varphi_*(\bar{g}_i + \bar{B}) = \bar{g}_i + \bar{B}$.

2. Докажем а). Пусть $\bar{g}_i \in \bar{G}_i$. Тогда $\bar{g}_i + \bar{B} \in \varinjlim_I \bar{G}_i$, и мы имеем $\bar{g}_i = \sigma(\bar{g}_i + B) = \sigma\varphi_*(\bar{g}_i + \bar{B}) \in \bar{G}$. Докажем б). Пусть $\bar{g} \in \bar{G}$. Тогда $\bar{g} = \sigma\varphi_*\bar{g}_*$, где $\bar{g}_* \in \varinjlim_I \bar{G}_i$. $\bar{g}_* = \bar{g}_i + \bar{B}$ для некоторого $i \in I$. Имеем $\sigma\varphi_*\bar{g}_* = \bar{g}_i$, то есть $\bar{g} = \bar{g}_i$ и, значит, $\bar{g} \in \bar{G}_i$ для некоторого $i \in I$.

Группу $\sigma\varphi_*(\varinjlim_I \bar{G}_i)$, которая рассматривается в пункте 2 леммы 3.3, назовем каноническим образом прямого предела $\varinjlim_I \bar{G}_i$ в группе G.

При доказательстве основной теоремы о вполне характеристических подгруппах сепарабельных абелевых групп без кручения будут использованы также следующие две леммы.

Лемма 3.4. *Пусть S — вполне характеристическая подгруппа абелевой группы G и A — прямое слагаемое группы G. Тогда $S \cap A$ — вполне характеристическая подгруппа группы A и для любого прямого слагаемого B группы G гомоморфная оболочка подгруппы $S \cap A$ группы A в группе B содержится в $S \cap B$.*

Доказательство леммы аналогично доказательству необходимости в теореме 1.4.

Из леммы 3.4 и свойства г) гомоморфных оболочек ([5, с. 58]) вытекает

Следствие 3.5. *Пусть S — вполне характеристическая подгруппа абелевой группы G, φ — изоморфное отображение прямого слагаемого A группы G на прямое слагаемое B этой группы. Тогда $S \cap B = \varphi(S \cap A)$.*

Прежде чем формулировать лемму 3.6, приведем необходимые обозначения и термины, используемые в [5].

Пусть $\mathfrak{X}$ — множество, состоящее из всех последовательностей $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, где каждое $v^{(i)}$ — целое неотрицательное число или символ ∞, $i \in \mathbb{N}$. Такие последовательности называются характеристиками. Во множестве $\mathfrak{X}$ естественным образом вводится частичный порядок: $v \leqslant w$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \mathbb{N}$ $v^{(i)} \leqslant w^{(i)}$. Относительно этого частичного порядка $\mathfrak{X}$ является полной решеткой. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — последовательность всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию. Если G — абелева группа без кручения, $x \in G$, то характеристика $\chi_G(x)$ (или $\chi(x)$) — это такая характеристика $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}, \dots)$, в которой каждое $w^{(i)}$ есть p_i-высота $h^G_{p_i}(x)$ (или $h_{p_i}(x)$) элемента x в группе G.

Пусть G — абелева группа без кручения, v — некоторая характеристика. Обозначим через $G[v]$ следующую подгруппу группы G: $G[v] = \{g \in G \mid \chi(g) \geqslant v\}$.

Множество абелевых групп без кручения $\{A_i\}_{i \in I}$ называется вполне транзитивной системой групп, если для каждой пары групп (A_{i_1}, A_{i_2}), $i_1 \in I$, $i_2 \in I$ (i_1 может совпадать с i_2) выполняется условие: из того, что $a \in A_{i_1}$, $b \in A_{i_2}$ и $\chi(a) \leqslant \chi(b)$ следует, что существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_{i_1}, A_{i_2})$ со свойством $\varphi a = b$. (В [5] такие системы групп назывались транзитивными.) Вполне транзитивными системами групп являются, в частности, системы, состоящие из алгебраически компактных групп, однородных сепарабельных групп, групп ранга 1. Абелева группа без кручения G называется вполне транзитивной, если множество, состоящее из одной группы G, образует вполне транзитивную систему групп.

Заметим, что при изучении строения вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения можно ограничиться редуцированными группами ([5, с. 73]). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только редуцированные группы.

Лемма 3.6. *Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество однородных прямых слагаемых без кручения абелевой группы G, образующих вполне* *транзитивную систему групп, $t(A_i) = t_i$. Если S — вполне характеристическая подгруппа группы G, то существуют такие характеристики $f_{t_i} = (f_{t_i}^{(1)}, f_{t_i}^{(2)}, \dots, f_{t_i}^{(k)}, \dots)$ $(i \in I)$, что $S \cap A_i = A_i[f_{t_i}]$ и выполняются следующие условия:*

а) *либо $f_{t_i} \leqslant \chi_i$ для некоторой $\chi_i \in t_i$, либо $f_{t_i}^{(k)} = \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$;*

б) *$f_{t_i}^{(k)} = \infty$ для всех k, для которых $p_k A_i = A_i$;*

в) *если $t_i \geqslant t_j$ $(i, j \in I)$, то для всякого k, такого что $p_k A_i \neq A_i$, имеем $f_{t_i}^{(k)} \leqslant f_{t_j}^{(k)}$.*

Доказательство. Пусть $f_{t_i} = \inf_{\mathfrak{X}}\{\chi_{A_i}(s) \mid s \in S \cap A_i\}$, если $S \cap A_i \neq 0$, и $f_{t_i} = (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$, если $S \cap A_i = 0$. Такая характеристика f_{t_i} удовлетворяет условиям а) и б) по построению. Так как $S \cap A_i$ — вполне характеристическая подгруппа однородной вполне транзитивной группы A_i, то $S \cap A_i = A[v_i]$, где v_i — некоторая характеристика, причем v_i можно взять равной f_{t_i} ([5, следствие 3.14, лемма 3.6]).

Покажем, что выполняется условие в). Пусть $t_i \geqslant t_j$ $(i, j \in I)$, $p_k A_i \neq A_i$ и $f_{t_j}^{(k)} \neq \infty$. Так как $p_k A_j \neq A_j$, то существует элемент $a \in A_j[f_{t_j}]$, такой что $h_{p_k}^{A_j}(a) = f_{t_j}^{(k)}$. В группе A_i найдется элемент b, такой что $\chi_{A_i}(b) \geqslant \chi_{A_j}(a)$ и $h_{p_k}^{A_i}(b) = f_{t_j}^{(k)}$. Элемент b принадлежит гомоморфной оболочке подгруппы $A_j[f_{t_j}]$ группы A_j в группе A_i в силу вполне транзитивности системы групп $\{A_i\}_{i \in I}$. Тогда по лемме 3.4 $b \in S \cap A_i$. Учитывая, что $S \cap A_i = A_i[f_{t_i}]$ и $h_{p_k}^{A_i}(b) = f_{t_j}^{(k)}$, получаем $f_{t_i}^{(k)} \leqslant f_{t_j}^{(k)}$.

Замечание. Из свойств а)–в) для характеристик f_{t_i} вытекает, что если $t_i = t_j$ $(i, j \in I)$, то $f_{t_i} = f_{t_j}$.

Перейдем теперь к рассмотрению вполне характеристических подгрупп сепарабельных абелевых групп без кручения. Пусть G — сепарабельная абелева группа без кручения и C — семейство ее подгрупп ранга 1, относительно которого группа G является слабо сепарабельной. Если $T_C(G)$ — множество типов подгрупп из C, то согласно лемме 3.1 $T_C(G)$ — инвариант группы G $(T_C(G) = \Omega(G))$. $C = \bigcup\limits_{t \in \Omega(G)} C_t$, где $C_t = \{A \mid A \in C,\ t(A) = t\}$ (в качестве семейства C можно взять, в частности, семейство всех прямых слагаемых ранга 1 группы G). Тип t будем называть p_k-делимым, если для всякой характеристики $v \in t$ имеем $v^{(k)} = \infty$. Пусть $\Phi(G)$ — решетка всех вполне характеристических подгрупп группы G. Рассмотрим функции f, отображающие множество $\Omega(G)$ в множество $\mathfrak{X}$ всех характеристик и удовлетворяющие следующим условиям (чтобы сократить количество скобок, будем записывать аргумент как индекс):

1) либо $f_t = (f_t^{(1)}, f_t^{(2)}, \dots, f_t^{(k)}, \dots) \leqslant \chi$ для некоторой $\chi \in t$, либо $f_t^{(k)} = \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$;

2) $f_t^{(k)} = \infty$ для всех k, для которых тип t p_k-делим;

3) если $t_1 > t_2$ $(t_1, t_2 \in \Omega(G))$, то для всякого k, такого что тип t_1 не является p_k-делимым, имеем $f_{t_1}^{(k)} \leqslant f_{t_2}^{(k)}$.

Обозначим множество функций, удовлетворяющих свойствам 1)–3) через $\bar{F}(G)$. $\bar{F}(G)$ можно частично упорядочить, положив $f \leqslant \varphi$ тогда и только тогда, когда $f_t \leqslant \varphi_t$ для всякого $t \in \Omega(G)$. Непосредственно проверяется, что $\bar{F}(G)$ — полная решетка.

Теорема 3.7. *Пусть G — сепарабельная абелева группа без кручения и C — семейство подгрупп ранга 1 группы G, относительно которого эта группа является слабо сепарабельной. Подгруппа S группы G вполне характеристична в G тогда и только тогда, когда S является слабо C_f-сепарабельной группой, где $C_f = \{S \cap A = A[f_t] \mid A \in C_t,\ t \in \Omega(G)\}$, f — некоторая функция из $\bar{F}(G)$. Соответствие $\mu\colon f \to S$, где S — слабо C_f-сепарабельная подгруппа группы G, определяет антиизоморфизм решеток $\bar{F}(G)$ и $\Phi(G)$.*

Доказательство. 1. Покажем вначале, что μ отображает $\bar{F}(G)$ в $\Phi(G)$. Установим, что всякая слабо C_f-сепарабельная подгруппа S группы G, где $C_f = \{S \cap A = A[f_t] \mid A \in C_t,\ t \in \Omega(G)\}$, f — некоторая функция из $\bar{F}(G)$, является вполне характеристической подгруппой группы G. Очевидно, подгруппа $A[f_t]$ вполне характеристична в A. Пусть $A_1, A_2 \in C$; $t(A_1) = t_1$, $t(A_2) = t_2$. Если $t_1 = t_2 = t$, то $S \cap A_1 = A_1[f_t]$, $S \cap A_2 = A_2[f_t]$, и поэтому ([5, с. 58]) гомоморфная оболочка подгруппы $S \cap A_1$ группы A_1 в группе A_2 совпадает с $S \cap A_2$.

Пусть $t_1 \neq t_2$ и $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) \neq 0$. Покажем, что гомоморфная оболочка подгруппы $A_1[f_{t_1}]$ группы A_1 в группе A_2 содержится в $A_2[f_{t_2}]$. Пусть $0 \neq a$, $a \in A_1[f_{t_1}]$, то есть $\chi_{A_1}(a) \geqslant f_{t_1}$, и пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_1, A_2)$, $\varphi \neq 0$. Тогда $\chi(\varphi a) \geqslant f_{t_1}$, и значит, $(\chi(\varphi a))^{(k)} \geqslant f_{t_1}^{(k)}$ для всякого $k \in \mathbb{N}$. Так как $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) \neq 0$, то $t_2 > t_1$, и поэтому в силу условия 3) для функций из $\bar{F}(A)$ имеем $f_{t_2}^{(k)} \leqslant f_{t_1}^{(k)}$ для всякого k, такого что тип t_2 не является p_k-делимым. Если же тип t_2 p_l-делим, то $f_{t_2}^{(l)} = \infty$ и $(\chi(\varphi a))^{(l)} = \infty$. Итак, для всякого $k \in \mathbb{N}$ $(\chi(\varphi a))^{(k)} \geqslant f_{t_2}^{(k)}$, то есть $\chi(\varphi a) \geqslant f_{t_2}$ и $\varphi a \in A_2[f_{t_2}]$.

Значит, по теореме 1.4 S — вполне характеристическая подгруппа группы G. Из следствия 1.3 вытекает, что если для функции $f \in \bar{F}(G)$ в группе G существует слабо C_f-сепарабельная подгруппа, то она определяется функцией f однозначно.

Пусть $f \in \bar{F}(G)$. Покажем, что существует слабо C_f-сепарабельная подгруппа S группы G, где $C_f = \{S \cap A = A[f_t] \mid A \in C_t,\ t \in \Omega(G)\}$.

Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ — семейство всех вполне разложимых прямых слагаемых конечного ранга группы G. Группу G можно рассматривать как C_1-сепарабельную группу, где C_1 — семейство всех прямых слагаемых ранга 1 группы G. На множестве I можно задать частичный порядок следующим условием: $i \leqslant j$ тогда и только тогда, когда $G_i \subset G_j$. Пусть $\pi_i^j\colon G_i \to G_j$ — естественное вложение подгруппы G_i в G_j при $i \leqslant j$, а σ_i — естественное вложение G_i в G. Тогда в силу леммы 3.2 система групп и гомоморфизмов

$\{G_i\ (i \in I),\ \pi_i^j\}$ является прямым спектром и $\varinjlim_I G_i \cong G$, причем существует единственный изоморфизм $\sigma\colon \varinjlim_I G_i \to G$, для которого все диаграммы

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[d, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ \varinjlim_I G_i \arrow[r, "\sigma"] & G \end{tikzcd} \qquad (i \in I)$$

коммутативны.

Для каждого $i \in I$ построим подгруппы $\bar{G}_i$ следующим образом. Пусть $G_i = \bigoplus\limits_{s=1}^{k} A_{j_s}$, где $r(A_{j_s}) = 1$ и $t(A_{j_s}) = t_{j_s}$ $(s = \overline{1,k})$, тогда $\bar{G}_i = \bigoplus\limits_{s=1}^{k} A_{j_s}[f_{t_{j_s}}]$ (f — фиксированная функция из $\bar{F}(G)$). Покажем, что подгруппы $\bar{G}_i$ определяются однозначно, то есть не зависят от разложения группы G_i в прямую сумму групп ранга 1. Из теоремы Бэра об изоморфизме прямых разложений вполне разложимых групп ([7, предложение 86.1]) вытекает, что всякое разложение группы G_i в прямую сумму групп ранга 1 можно записать в виде $G_i = \bigoplus\limits_{s=1}^{k} A_{i_s}$, где $A_{i_s} \cong A_{j_s}$ $(s = \overline{1,k})$. В силу теоремы 1.4 $\bar{G}_i$ — вполне характеристическая подгруппа группы G_i, и поэтому $\bar{G}_i = \bigoplus\limits_{s=1}^{k} (\bar{G}_i \cap A_{i_s})$. Применяя лемму 3.6, получим $\bar{G}_i = \bigoplus\limits_{s=1}^{k} A_{i_s}[f'_{t_{i_s}}]$, где $f'_{t_{i_s}}$ — характеристики, удовлетворяющие условиям а)–в). Так как $A_{i_s} \cong A_{j_s}$ $(s = \overline{1,k})$, то по следствию 3.5 $f_{t_{j_s}} = f'_{t_{i_s}}$ для всякого $s = \overline{1,k}$.

Понятно, что если $G_i \subset G_j$ (то есть $i \leqslant j$), то $\bar{G}_i \subset \bar{G}_j$. Пусть $\varphi_i, \bar{\pi}_i^j$ — естественные вложения подгруппы $\bar{G}_i$ в группы G_i и $\bar{G}_j$ $(j \geqslant i)$ соответственно. Тогда в силу леммы 3.3 система групп и гомоморфизмов $\{\bar{G}_i\ (i \in I),\ \bar{\pi}_i^j\}$ является прямым спектром и существует единственный мономорфизм $\varphi_*\colon \varinjlim_I \bar{G}_i \to \varinjlim_I G_i$, для которого все диаграммы

$$\begin{tikzcd} \bar{G}_i \arrow[r, "\bar{\pi}_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \varinjlim_I \bar{G}_i \arrow[d, "\varphi_*"] \\ G_i \arrow[r, "\pi_i"] & \varinjlim_I G_i \end{tikzcd} \qquad (i \in I)$$

коммутативны.

Пусть $\bar{G}$ — канонический образ прямого предела $\varinjlim_I \bar{G}_i$ в группе G (то есть $\bar{G} = \sigma\varphi_*(\varinjlim_I \bar{G}_i)$). Покажем, что $\bar{G}$ — вполне характеристическая подгруппа группы G. Пусть $\bar{g} \in \bar{G}$ и $\varphi \in E(G)$. В силу леммы 3.3 существует такая подгруппа $\bar{G}_i$ $(i \in I)$, что $\bar{g} \in \bar{G}_i$. Имеем $\bar{G}_i = \bigoplus\limits_{s=1}^{k} A_{j_s}[f_{t_{j_s}}]$, где $\bigoplus\limits_{s=1}^{k} A_{j_s}$ — вполне разложимое прямое слагаемое группы G, $r(A_{j_s}) = 1$ и $t(A_{j_s}) = t_{j_s}$ $(s = \overline{1,k})$. Запишем $\bar{g}$ в виде $\bar{g} = \sum\limits_{s=1}^{k} \bar{g}_{j_s}$, где $\bar{g}_{j_s} \in A_{j_s}[f_{t_{j_s}}]$ $(s = \overline{1,k})$. Тогда $\varphi\bar{g} = \sum\limits_{s=1}^{k} \varphi\bar{g}_{j_s}$. Покажем, что для всякого $s = \overline{1,k}$ $\varphi\bar{g}_{j_s} \in \bar{G}$. Так как группа G сепарабельная, то существует такая подгруппа G_{i_0} $(i_0 \in I)$, что $\varphi\bar{g}_{j_s} \in G_{i_0}$. Имеем $G_{i_0} = \bigoplus\limits_{m=1}^{r} A_{i_m}$ и $G = G_{i_0} \oplus H$, где A_{i_m} — группы ранга 1 и $t(A_{i_m}) = t_{i_m}$ $(m = \overline{1,r})$. Пусть π'_{i_m} — проекция группы G на прямое слагаемое A_{i_m} $(m = \overline{1,r})$. Тогда $\pi'_{i_m}\varphi\bar{g}_{j_s} \in A_{i_m}[f_{t_{i_m}}]$, так как гомоморфная оболочка подгруппы $A_{j_s}[f_{t_{j_s}}]$ группы A_{j_s} в группе A_{i_m} содержится в группе $A_{i_m}[f_{t_{i_m}}]$. Имеем $\varphi\bar{g}_{j_s} = \sum\limits_{m=1}^{r} \pi'_{i_m}\varphi\bar{g}_{j_s}$, и поэтому $\varphi\bar{g}_{j_s} \in \bigoplus\limits_{m=1}^{r} A_{i_m}[f_{t_{i_m}}]$. Но $\bigoplus\limits_{m=1}^{r} A_{i_m}[f_{t_{i_m}}] = \bar{G}_{i_0}$, и по лемме 3.3 $\bar{G}_{i_0} \subset \bar{G}$. Итак, $\varphi\bar{g}_{j_s} \in \bar{G}$, и значит, $\varphi\bar{g} \in \bar{G}$. Следовательно, $\bar{G}$ — вполне характеристическая подгруппа группы G.

Покажем, что для всякого прямого слагаемого A ранга 1 типа t группы G имеем $\bar{G} \cap A = A[f_t]$. A является одним из вполне разложимых слагаемых конечного ранга группы G (то есть $A = G_{i_1}$ для некоторого $i_1 \in I$). Тогда $\bar{G}_{i_1} = A[f_t]$, и так как по лемме 3.3 $\bar{G}_{i_1} \subset \bar{G}$, то $A[f_t] \subset \bar{G} \cap A$.

Пусть теперь $a \in \bar{G} \cap A$. Тогда по лемме 3.3 существует такая подгруппа $\bar{G}_{i_2}$ $(i_2 \in I)$, что $a \in \bar{G}_{i_2}$. Соответствующая подгруппа G_{i_2} является вполне разложимым прямым слагаемым конечного ранга группы G. $a \in G_{i_2}$, и в силу сервантности подгруппы G_{i_2} в группе G $\langle a\rangle_* \subset G_{i_2}$, но $A = \langle a\rangle_*$ и поэтому $A \subset G_{i_2}$. Значит, G_{i_2} можно представить в виде $G_{i_2} = A \oplus A_{l_1} \oplus \cdots \oplus A_{l_n}$, $r(A_{l_m}) = 1$, $t(A_{l_m}) = t_{l_m}$ $(m = \overline{1,n})$. Тогда $\bar{G}_{i_2} = A[f_t] \oplus A_{l_1}[f_{t_{l_1}}] \oplus \cdots \oplus A_{l_n}[f_{t_{l_n}}]$. Если $a = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, где $a_0 \in A[f_t]$, $a_m \in A_{l_m}[f_{t_{l_m}}]$ $(m = \overline{1,n})$ и хотя бы одно a_m $(m = \overline{1,n})$ отлично от нулевого элемента, то имели бы два различных способа записи элемента a в виде суммы элементов из подгрупп $A, A_{l_1}, \ldots A_{l_n}$ группы G (второй способ записи $a = a_0$). Учитывая, что $G = A \oplus A_{l_1} \oplus \cdots \oplus A_{l_n} \oplus H$, получаем $a = a_0$, и поэтому $\bar{G} \cap A \subset A[f_t]$. Итак, $\bar{G} \cap A = A[f_t]$.

Полагая $S = \bar{G}$ и применяя теорему 1.4, получаем, что S — слабо C_f-сепарабельная подгруппа группы G, где $C_f = \{S \cap A = A[f_t] \mid A \in C_t,\ t \in \Omega(G)\}$.

2. Покажем, что μ — сюръективное отображение, то есть всякая вполне характеристическая подгруппа S группы G является слабо C_f-сепарабельной группой, где $C_f = \{S \cap A = A[f_t] \mid A \in C_t,\ t \in \Omega(G)\}$, f — некоторая функция из $\bar{F}(G)$.

Пусть S — вполне характеристическая подгруппа группы G. По теореме 1.4 подгруппа S является слабо C'-сепарабельной группой, где $C' = \{S \cap A \mid A \in C\}$. Рассмотрим функцию $f\colon \Omega(G) \to \mathfrak{X}$, такую что для всякого $t \in \Omega(G)$ f_t определяется из равенства $S \cap A = A[f_t]$, где A — произвольная группа из C, имеющая тип t, а f_t — характеристика, удовлетворяющая свойствам а)–в) леммы 3.6. Отметим, что C является вполне транзитивной системой групп, так как состоит из групп без кручения ранга 1. Из свойств б) и в) вытекает, что если $A_1, A_2 \in C_t$ (то есть $t(A_1) = t(A_2) = t$), то $S \cap A_1 = A_1[f_t]$, $S \cap A_2 = A_2[f_t]$, и значит, функция f определена корректно. Из леммы 3.6 следует, что $f \in \bar{F}(G)$.

3. Покажем, что μ — инъективное отображение. Пусть $f, f' \in \bar{F}(G)$ и $\mu f = \mu f' = S$. Если $A \in C_t$, то $S \cap A = A[f_t] = A[f'_t]$, и в силу условий 1), 2) для функций из $\bar{F}(G)$ $f_t = f'_t$ для всякого t из $\Omega(G)$. Значит, $f = f'$.

Из леммы 1.2 следует, что $f \leqslant f'$ ($f, f' \in \bar{F}(G)$) тогда и только тогда, когда $\mu f' \subset \mu f$. Поэтому биекция μ является решеточным антиизоморфизмом. Теорема доказана.

Пусть G — сепарабельная абелева группа без кручения, B — произвольное ее вполне разложимое прямое слагаемое конечного ранга, $f \in \bar{F}(G)$. $B = \bigoplus_{i=1}^{k} B_i$, где $r(B_i) = 1$, $t(B_i) = t_i$ ($i = \overline{1,k}$). Обозначим через $B(f)$ следующую подгруппу группы B: $B(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} B_i[f_{t_i}]$. Как показано при доказательстве теоремы 3.7, $B(f)$ не зависит от разложения группы B в прямую сумму групп ранга 1. Из доказательства теоремы 3.7 вытекает такое

Следствие 3.8. *Пусть G — сепарабельная абелева группа без кручения, $\{G_i\}_{i\in I}$ — множество всех ее вполне разложимых прямых слагаемых конечного ранга. S является вполне характеристической подгруппой группы G тогда и только тогда, когда S — канонический образ прямого предела $\varinjlim_I G_i(f)$ в группе G, где f — некоторая функция из $\bar{F}(G)$. Соответствие $\mu\colon f \to \sigma\varphi_*(\varinjlim_I G_i(f))$ определяет антиизоморфизм решеток $\bar{F}(G)$ и $\Phi(G)$.*

С помощью теоремы 3.7 можно получить описание сервантных вполне характеристических подгрупп сепарабельных абелевых групп без кручения.

Следствие 3.9. *Пусть G — сепарабельная абелева группа без кручения и C — семейство ее подгрупп ранга 1, относительно которого эта группа является слабо сепарабельной. Подгруппа S группы G является сервантной вполне характеристической подгруппой группы G тогда и только тогда, когда S является слабо C'-сепарабельной группой, где $C' \subset C$ и выполняется условие: если $A \in C'$, $B \in C$ и $t(B) \geqslant t(A)$, то $B \in C'$, причем $S \cap A = A$ для всякой $A \in C'$.*

Следствие 3.9 непосредственно вытекает из теоремы 3.7, если учесть, что любая ненулевая сервантная подгруппа группы ранга 1 совпадает с этой группой.

Для подгруппы S сепарабельной абелевой группы без кручения G через $\Omega(S, G)$ обозначим множество типов прямых слагаемых ранга 1 группы G, имеющих ненулевое пересечение с S. Используя следствие 3.9 и следствие 1.3, получаем такой результат.

Следствие 3.10 ([13, теорема 2]). *Пусть S_1, S_2 — сервантные вполне характеристические подгруппы сепарабельной абелевой группы без кручения G. Эквивалентны следующие условия: 1) $S_1 = S_2$; 2) $S_1 \cong S_2$; 3) $\Omega(S_1, G) = \Omega(S_2, G)$.*

Используя понятие фильтра частично упорядоченного множества ([14, с.42]), с помощью следствия 3.9 получаем характеризацию множества $\Omega(S, G)$ и описание решетки сервантных вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения.

Следствие 3.11. *Пусть S — сервантная вполне характеристическая подгруппа сепарабельной абелевой группы без кручения G. Тогда $\Omega(S, G)$ является фильтром в частично упорядоченном множестве $\Omega(G)$.*

Следствие 3.12. *Решетка сервантных вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения G изоморфна решетке фильтров множества $\Omega(G)$.*

Заметим, что формулировки результатов о множестве $\Omega(S, G)$ и решетке сервантных вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения, приведенные в [13, теорема 1 и следствие 3], ошибочны.

Рассмотрим теперь некоторые свойства решеток вполне характеристических подгрупп сепарабельных абелевых групп без кручения. Из теоремы 3.7 вытекают такие результаты.

Следствие 3.13. *Решетки вполне характеристических подгрупп сепарабельных абелевых групп без кручения G и G' изоморфны, если $\Omega(G) = \Omega(G')$.*

Следствие 3.14. *Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ и $\{S_j\}_{j \in J}$ — семейства вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения G. Тогда имеют место следующие равенства:*

$$\left(\sum_{i \in I} S_i\right) \cap \left(\sum_{j \in J} S_j\right) = \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (S_i \cap S_j);$$

$$\bigcap_{i \in I} S_i + \bigcap_{j \in J} S_j = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (S_i + S_j).$$

Доказательство. Достаточно показать, что если S и S_j $(j \in J)$ — вполне характеристические подгруппы группы G, то $S \cap \sum_{j \in J} S_j = \sum_{j \in J} S \cap S_j$ и $S + \bigcap_{j \in J} S_j = \bigcap_{j \in J} (S + S_j)$. Учитывая антиизоморфизм решеток $\Phi(G)$ и $\bar{F}(G)$, установленный в теореме 3.7, перейдем к решетке $\bar{F}(G)$ и покажем, что если

$f \in \bar{F}(G)$ и $\bar{F}_1$ — некоторое множество функций из $\bar{F}(G)$, то $f \vee \left(\bigwedge \bar{F}_1\right) = \bigwedge(f \vee \bar{F}_1)$; $f \wedge \left(\bigvee \bar{F}_1\right) = \bigvee(f \wedge \bar{F}_1)$, где $f \vee \bar{F}_1 = \{f \vee \varphi \mid \varphi \in \bar{F}_1\}$; $f \wedge \bar{F}_1 = \{f \wedge \varphi \mid \varphi \in \bar{F}_1\}$.

Рассмотрим множество $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ с естественным порядком на $\mathbb{N}$ и полагаем $\infty > n$ для всякого натурального числа n. Пусть m, m_i $(i \in I)$ — произвольные элементы из $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Имеют место следующие равенства:

$$\sup\{m, \inf\{m_i \mid i \in I\}\} = \inf\{\sup\{m, m_i\} \mid i \in I\};$$
$$\inf\{m, \sup\{m_i \mid i \in I\}\} = \sup\{\inf\{m, m_i\} \mid i \in I\}.$$

Из этих равенств вытекает, что для любого типа t из $\Omega(G)$ и любого натурального числа k имеем

$$f_t^{(k)} \vee \left(\bigwedge \bar{F}_{1_t}^{(k)}\right) = \bigwedge(f_t^{(k)} \vee \bar{F}_{1_t}^{(k)});$$
$$f_t^{(k)} \wedge \left(\bigvee \bar{F}_{1_t}^{(k)}\right) = \bigvee(f_t^{(k)} \wedge \bar{F}_{1_t}^{(k)}),$$

где $\bar{F}_{1_t}^{(k)} = \{\varphi_t^{(k)} \mid \varphi \in \bar{F}_1\}$. Поэтому имеют место равенства

$$f \vee \left(\bigwedge \bar{F}_1\right) = \bigwedge(f \vee \bar{F}_1) \quad \text{и} \quad f \wedge \left(\bigvee \bar{F}_1\right) = \bigvee(f \wedge \bar{F}_1),$$

из которых и вытекает утверждение следствия.

Следствие 3.15. *Решетка вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения является дистрибутивной непрерывной решеткой.*

Применяя [10, теорема 24, с. 170], получаем такой результат.

Следствие 3.16. *Решетка вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения является брауэровой решеткой.*

В заключение выясним, когда решетка вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения является цепью.

Предложение 3.17. *Решетка вполне характеристических подгрупп сепарабельной абелевой группы без кручения G является цепью тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: если группа G не является делимой, то существует такое простое число p, что $pG \neq G$ и $qG = G$ для любого простого числа q, отличного от p.*

Доказательство. а) Необходимость вытекает из того факта, что если A — произвольная абелева группа, p и q — различные простые числа и $pA \neq A$, $qA \neq A$, то ни одна из подгрупп pA и qA не содержится в другой.

б) Достаточность. Если группа G не является делимой, то ее редуцированная часть R является однородной сепарабельной группой и поэтому любая вполне характеристическая подгруппа группы R имеет вид $R[f_t] = \{r \in R \mid \chi(r) \geqslant f_t\}$, где $t(R) = t$, $f \in \bar{F}(R)$ (учитываем, что в нашем случае $\Omega(R) = \{t\}$). Так как $qR = R$ для всех q, отличных от p, то любая ненулевая вполне характеристическая подгруппа группы R имеет вид $p^n R$, где

n — неотрицательное целое число. Следовательно, решетка вполне характеристических подгрупп группы R (а значит, и группы G) является цепью. Если же G — делимая группа, то она имеет всего две вполне характеристические подгруппы 0 и G, которые, конечно, образуют цепь.

Замечание. Если A — сепарабельная абелева группа без кручения, то существует минимальное семейство C ее подгрупп ранга 1, относительно которого группа A является C-сепарабельной. Построим это семейство с помощью трансфинитной индукции. Вполне упорядочим множество всех элементов группы A. Для элемента $a_1 \in A$ имеем $a_1 \in A^{(1)} \oplus \dots \oplus A^{(1)}_{m(1)} = B_1$, где $A = B_1 \oplus B'_1$, ранг групп $A^{(1)}_1, \dots, A^{(1)}_{m(1)}$ равен 1 и элемент a_1 имеет ненулевую координату в каждой из групп $A^{(1)}_j$ $(j = \overline{1, m(1)})$. Пусть $C_1 = \{A^{(1)}_1, \dots, A^{(1)}_{m(1)}\}$. Рассмотрим элемент $a_2 = b_1 + b'_1$, где $b_1 \in B_1$, $b'_1 \in B'_1$. Если $b'_1 = 0$, то полагаем $C_2 = C_1$. Если же $b'_1 \neq 0$, то, учитывая, что всякое прямое слагаемое сепарабельной группы без кручения сепарабельно, имеем $b'_1 \in A^{(2)}_1 \oplus \dots \oplus A^{(2)}_{m(2)}$, где $A^{(2)}_1 \oplus \dots \oplus A^{(2)}_{m(2)}$ — прямое слагаемое группы B'_1, ранг групп $A^{(2)}_1, \dots, A^{(2)}_{m(2)}$ равен 1 и элемент b'_1 имеет ненулевую координату в каждой из групп $A^{(2)}_j$ $(j = \overline{1, m(2)})$. Тогда полагаем $C_2 = \{A^{(1)}_1, \dots, A^{(1)}_{m(1)}, A^{(2)}_1, \dots, A^{(2)}_{m(2)}\}$.

Пусть λ — ординал, с помощью которого занумерован некоторый элемент из A, и пусть для всех $\gamma < \lambda$ уже построены семейства C_γ. Рассмотрим для каждого $\gamma < \lambda$ разложения группы A, такие что $A = B_\gamma \oplus B'_\gamma$, где $a_\gamma \in B_\gamma$, B_γ разлагается в прямую сумму групп ранга 1, принадлежащих C_γ. Имеем $a_\lambda = b_\gamma + b'_\gamma$, где $b_\gamma \in B_\gamma$, $b'_\gamma \in B'_\gamma$. Если $b'_\gamma = 0$ для любого $\gamma < \lambda$, то полагаем $C_\lambda = \bigcup\limits_{\gamma<\lambda} C_\gamma$. Если же не все $b'_\gamma = 0$, то выберем наименьшее γ (обозначим его через γ_0), для которого $b'_\gamma \neq 0$. Имеем $b'_{\gamma_0} \in A^{(\gamma_0)}_1 \oplus \dots \oplus A^{(\gamma_0)}_{m(\gamma_0)}$, где $A^{(\gamma_0)}_1 \oplus \dots \oplus A^{(\gamma_0)}_{m(\gamma_0)}$ — прямое слагаемое группы B'_{γ_0}, $r(A^{(\gamma_0)}_j) = 1$ для всякого $j = \overline{1, m(\gamma_0)}$ и элемент b'_{γ_0} имеет ненулевую координату в каждой из групп $A^{(\gamma_0)}_j$ $(j = \overline{1, m(\gamma_0)})$. Пусть $C'_{\gamma_0} = \{A^{(\gamma_0)}_1, \dots, A^{(\gamma_0)}_{m(\gamma_0)}\}$. Тогда полагаем $C_\lambda = \Big(\bigcup\limits_{\gamma<\lambda} C_\gamma\Big) \cup C'_{\gamma_0}$. Беря затем объединение всех семейств C_λ (по всем ординалам λ, с помощью которых занумерованы все элементы из группы A), получим семейство C, относительно которого группа A является C-сепарабельной. Из построения вытекает, что всякое семейство C_λ является минимальным семейством прямых слагаемых ранга 1 группы A, таким что для всякого $\tau \leqslant \lambda$ A_τ принадлежит прямой сумме некоторых групп из C_λ. Поэтому C — минимальное семейство подгрупп ранга 1 группы A, относительно которого эта группа является C-сепарабельной.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что если A — сепарабельная p-группа, то существует минимальное семейство C ее циклических подгрупп, относительно которого группа A является C-сепарабельной.

Литература

[1] Benabdallah K. M., Eisenstadt B. J., Irvin J. M., Poluianov E. W. The structure of large subgroups of primary Abelian groups // Acta Math. — 1970. — No. 3–4. — P. 421–435.

[2] Cornelius E. F. A sufficient condition for separability // J. Algebra. — 1980. — No. 2. — P. 476–478.

[3] Fuchs L., Viljonen G. A generalization of separable torsion-free Abelian groups // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. — 1985. — V. 73. — P. 15–21.

[4] Rangaswamy K. M. On C-separable Abelian groups // Comm. Algebra. — 1985. — V. 13. — P. 1219–1227.

[5] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1981. — С. 56–92.

[6] Pierce R. S. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups. — 1963. — P. 215–310.

[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[8] Moore D. J., Hewett E. J. On fully invariant subgroups of Abelian p-groups // Comment. Math. Univ. St. Pauli. — 1972. — No. 2. — P. 97–106.

[9] Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1970.

[10] Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: Наука, 1984.

[11] Hausen J. Abelian groups which are uniserial as modules over their endomorphism rings // Lect. Notes Math. — 1983. — V. 1006. — P. 204–209.

[12] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[13] Шапошников А. И. Решетки сервантных вполне характеристических подгрупп сепарабельных абелевых групп без кручения // Симпозиум «Абелевы группы». Сборник тезисов. — Бийск, 1994. — С. 37–38.

[14] Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А., Скорняков Л. А., Шестаков И. М. Общая алгебра. Т. 1. — М.: Наука, 1990.

Статья поступила в редакцию в июне 1996 г.