

Общероссийский математический портал

Л. Г. Плотникова, А. В. Поташев, Обтекание отрывным потоком пластинки с отклоненным щитком при наличии застойной зоны,  
*Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2006, том 148, книга 2, 124–131

<https://www.mathnet.ru/uzku551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

23 апреля 2025 г., 15:13:41



УДК 532.528

## ОБТЕКАНИЕ ОТРЫВНЫМ ПОТОКОМ ПЛАСТИНКИ С ОТКЛОНЕННЫМ ЩИТКОМ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАСТОЙНОЙ ЗОНЫ

*Л.Г. Плотникова, А.В. Поташев*

### Аннотация

В работе решена задача обтекания отрывным потоком пластинки с отклоненным щитком при наличии застойной зоны за щитком, а также вблизи угловой точки между пластинкой и щитком. Давление в застойной зоне вблизи угловой точки определяется из условия гладкого отрыва Бриллюэна–Вилла. Получены зависимости аэродинамических характеристик.

### Введение

Задача обтекания плоской пластинки с застойной зоной вблизи критической точки была впервые исследована С.А. Чаплыгиным [1]. В дальнейшем его идея о замене критических точек застойными областями рассматривалась в ряде работ. Так, например, в статье [2] получено точное аналитическое решение задачи струйного обтекания плоской пластины с интерцептором при наличии застойной зоны вблизи интерцептора.

В работе [3] была рассмотрена задача безотрывного обтекания пластинки с отклоненным щитком. Представляет также интерес задача обтекания отрывным потоком плоской пластины с отклоненным щитком с обтекаемой передней кромкой пластинки. Постановка и аналитическое решение задачи об отрывном обтекании пластины со щитком путем сведения к смешанной краевой задаче для аналитической функции даны в работе [4].

В настоящей работе, как и в [4], моделирование зоны отрыва за щитком выполнено по схеме Ву [5, 6]. При этом для замыкания системы уравнений использовано предположение о нулевой циркуляции на контуре и изобарических границах отрывной области, введенное Ву и использованное в работе [7]. Вязкий отрыв потока вблизи точки стыка пластинки со щитком может быть смоделирован изобарической областью. Однако положение точки отрыва и размеры этой области зависят от значения скорости на ее границе. В настоящей работе (в отличие от [4], где скорость на границе застойной зоны задавалась произвольно) для определения величины скорости использовано условие гладкого отрыва Бриллюэна–Вилла (см., например, [2]).

### 1. Постановка задачи

В физической плоскости  $z = x + iy$  непроницаемая пластинка  $AB$  с отклоненным щитком  $BF$  обтекается установившимся потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости с отрывом потока (область течения  $G_z$  показана на рис. 1). Линии  $BCD$ ,  $FED$  схода потока образуют застойную область  $DEFBCD$ . Вблизи щитка также предполагается наличие застойной области, границей которой является свободная линия тока  $HG$ . Таким образом, область течения ограничена

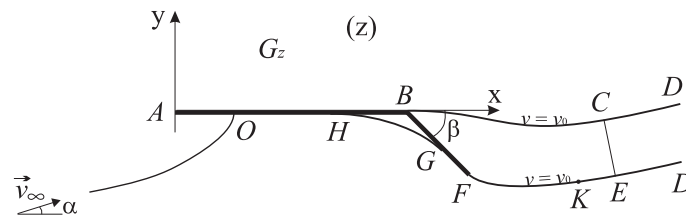


Рис. 1. Картина обтекания пластинки с отклоненным щитком в физической области

твёрдыми стенками  $AH$ ,  $GF$ ,  $AB$  и свободными поверхностями  $HG$ ,  $FE$ ,  $BC$ ; границы  $ED$  и  $CD$  являются конгруэнтными линиями тока. На линиях  $BC$  и  $FE$  давление постоянно, и следовательно, в силу закона Бернулли постоянна и скорость  $v = v_0$ , значение которой задается. На линии  $HG$  скорость  $v = v_1$  также постоянна, и ее требуется определить. Длины пластинки и щитка ( $AB = l_1$ ,  $BF = l_2$ ), угол  $\beta$  отклонения щитка заданы. Скорость  $v_\infty$  набегающего потока и угол атаки  $\alpha$  известны. Циркуляцию по контуру  $EFGHOABC$  считаем нулевой.

Требуется найти распределение скорости на поверхности пластинки со щитком, форму свободных линий тока и рассчитать аэродинамические характеристики.

## 2. Аналитическое решение

Введем функцию Леви–Чевиты

$$\chi = i \ln \left( \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} \right) = \theta + iS, \quad (1)$$

где  $S = \ln(v/v_0)$ ,  $\theta$  – аргумент вектора скорости. Рассмотрим область  $G_\chi$  (рис. 2, а) изменения этой функции. Функция  $\chi$  имеет особенности в точке  $O$  разветвления потока ( $v = 0$ , а  $\theta$  терпит скачок, равный  $-\pi$ ) и в точке  $A$  – передней кромке пластинки ( $v$  принимает бесконечное значение, а  $\theta$  терпит скачок, равный  $\pi$ ). Для выполнения условия гладкого отрыва Бриллюэна-Вилла в точке  $H$  исключим возможные разрезы в окрестности точки  $H$  в плоскости  $\chi$ .

Рассмотрим функцию комплексного потенциала  $w = \varphi + i\psi$ . При условии нулевой циркуляции область  $G_w$  в плоскости  $w$  будет иметь вид, показанный на рис. 2, б, где  $\varphi_1$  – параметр, определяемый в процессе решения. Функцией  $t = \sqrt{w/(\varphi_1 - w)}$  отобразим конформно область  $G_w$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  (рис. 2, в).

Для представления  $\chi(t)$ , отображающей полуплоскость  $\text{Im } t > 0$  на область  $G_\chi$ , воспользуемся формулой Кристоффеля–Шварца

$$\chi(t) = A \int_b^t \frac{(t-k)\sqrt{t-h}}{t(t-a)\sqrt{(t-f)(t-g)(t-b)}} dt,$$

где  $A$  – действительная постоянная.

Зная функции  $\chi(t)$  и  $w(t)$ , с учетом (1), найдем функцию

$$z(t) = \frac{2\varphi_1}{v_0} \int_a^t e^{i\chi(t)} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt,$$

позволяющую построить неизвестные границы области  $G_z$ .

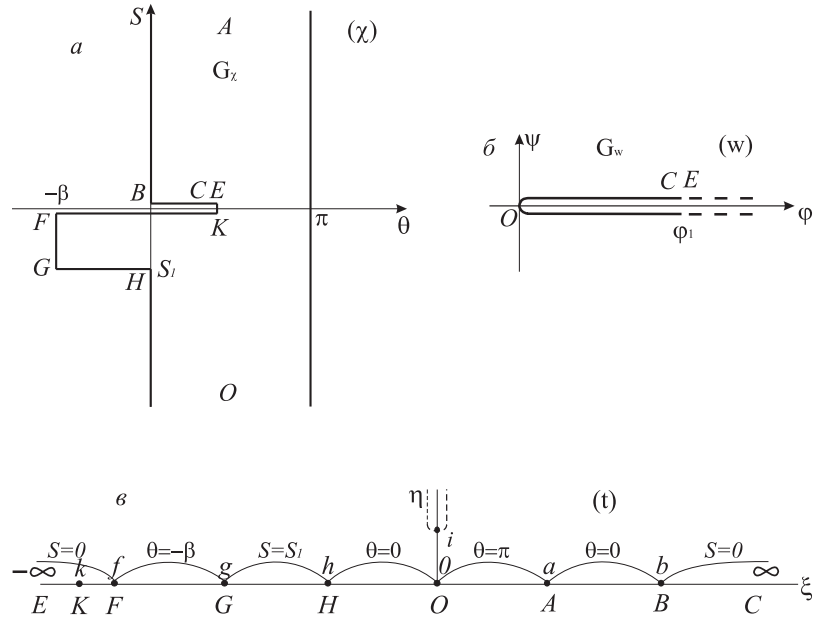


Рис. 2. Области во вспомогательных плоскостях

В полученное аналитическое решение входит девять неизвестных параметров:  $k, f, g, h, a, b$  в плоскости  $t$ ;  $\varphi_1$  в плоскости  $w$ ; постоянная  $A$  и скорость  $v_1$ . Для их определения необходимо составить девять соотношений.

Из условий скачков функции  $\chi$  в точках  $O$  и  $A$  получим

$$\operatorname{res}_{t=0} (d\chi/dt) = -\pi, \quad \operatorname{res}_{t=a} (d\chi/dt) = \pi. \tag{2}$$

Приращения функции  $\chi$  на участках  $HG$  и  $GF$  (рис. 2,  $a$ ) дают следующие уравнения:

$$\chi(h) - \chi(g) = \beta, \tag{3}$$

$$\chi(g) - \chi(f) = iS_1, \tag{4}$$

где  $S_1 = \ln(v_1/v_0)$ .

Из условия на бесконечности имеем

$$\chi(i) = \alpha + i \ln(v_\infty/v_0). \tag{5}$$

Так как длины пластинки и щитка известны, можно составить уравнения

$$z(b) = l_1, \tag{6}$$

$$z(f) = l_1 + l_2 e^{-i\beta}. \tag{7}$$

Таким образом, условия (2)–(7) представляют систему девяти уравнений для нахождения девяти неизвестных параметров. Из уравнений (2), (4), (6) четыре параметра ( $k, \varphi_1, A, v_1$ ) можно получить в явном виде

$$k = \left( \frac{a\sqrt{a-h}}{\sqrt{(a-f)(a-g)(b-a)}} \right) / \left( \frac{\sqrt{a-h}}{\sqrt{(a-f)(a-g)(b-a)}} - \frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{b(-f)(-g)}} \right),$$

$$\varphi_1 = l_1 v_0 \left( 2 \int_a^b e^{-S(t)} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \right)^{-1}, \quad A = \frac{a \sqrt{b(-f)(-g)}}{(-k) \sqrt{-h}}, \quad v_1 = v_0 e^{S_1}.$$

Остается разрешить систему пяти нелинейных уравнений (3), (5), (7) относительно параметров  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $b$ . После их отыскания можно найти все интересные характеристики течения: распределение скорости на поверхности пластинки со щитком  $v = v_0 e^{S_1}$ , формы свободных линий тока, коэффициенты аэродинамических сил

$$C_x = \frac{2R_x}{\rho v_\infty^2 l}, \quad C_y = \frac{2R_y}{\rho v_\infty^2 l}.$$

Здесь  $R_x$  и  $R_y$  – силы, действующие в направлении осей  $x$  и  $y$ ,  $\rho$  – плотность,  $l$  – характерный размер, в качестве которого можно принять  $l = l_1 + l_2$ .

Так как в окрестности передней кромки скорость принимает бесконечное значение, то в точке  $A$  возникает подсосывающая сила, которая определяется из формулы Чаплыгина для сил давления разложением в окрестности точки:

$$X_A = -\frac{\rho \varphi_1 a v_0 \pi}{(1+a^2)^2} \cdot (b-a) \cdot \exp \left[ \int_a^b \left( \frac{A(\xi-k) \sqrt{\xi-h}}{\xi \sqrt{(\xi-f)(\xi-g)(b-\xi)}} - 1 \right) \frac{d\xi}{\xi-a} \right].$$

Сила  $X_A$  направлена вдоль пластинки. Поэтому  $R_x$  можно представить в виде двух слагаемых  $R_x = R_{xp} + X_A$ , где

$$R_{xp} = \frac{\rho v_\infty^2}{2} \int_L c_p dy \quad (8)$$

находится интегрированием сил давления по контуру  $L = ABFGBA$  в плоскости  $z$ . Здесь  $c_p = 1 - (v/v_\infty)^2$  – коэффициент давления.

Аналогично для силы  $R_y$  имеем

$$R_y = -\frac{\rho v_\infty^2}{2} \int_L c_p dx. \quad (9)$$

При вычислении интегралов в формулах (8) и (9) считается, что  $c_p = 1 - (v_0/v_\infty)^2$  на участке  $BF$  со стороны застойной зоны  $BCEF$  и  $c_p = 1 - (v_1/v_\infty)^2$  на участках  $GB$  и  $BH$ .

Силы  $R_x$  и  $R_y$  можно найти также другим способом. Приводя рассуждения, аналогичные [7, с. 116–118], выводим, что

$$R_x + iR_y = \frac{\rho}{2} \varphi_1 v_\infty \pi A M \left( \frac{v_0^2}{v_\infty^2} e^{iT} - e^{-iT} \right) e^{i\alpha},$$

где

$$M = \sqrt{\frac{1+k^2}{1+a^2}} \sqrt[4]{\frac{1+h^2}{(1+f^2)(1+g^2)(1+b^2)}},$$

$$T = -\pi + \arctan k - \arctan a + \frac{1}{2} (\arctan h - \arctan f - \arctan g - \arctan b).$$

Зная  $R_x$  и  $R_y$ , можно определить силу сопротивления  $R_{xa}$  и подъемную силу  $R_{ya}$ , направленные вдоль потока и ортогонально ему. Тогда коэффициенты  $C_{xa}$  и  $C_{ya}$  определяются так

$$C_{xa} = \frac{2R_{xa}}{\rho v_\infty^2 (l_1 + l_2)}, \quad C_{ya} = \frac{2R_{ya}}{\rho v_\infty^2 (l_1 + l_2)}.$$

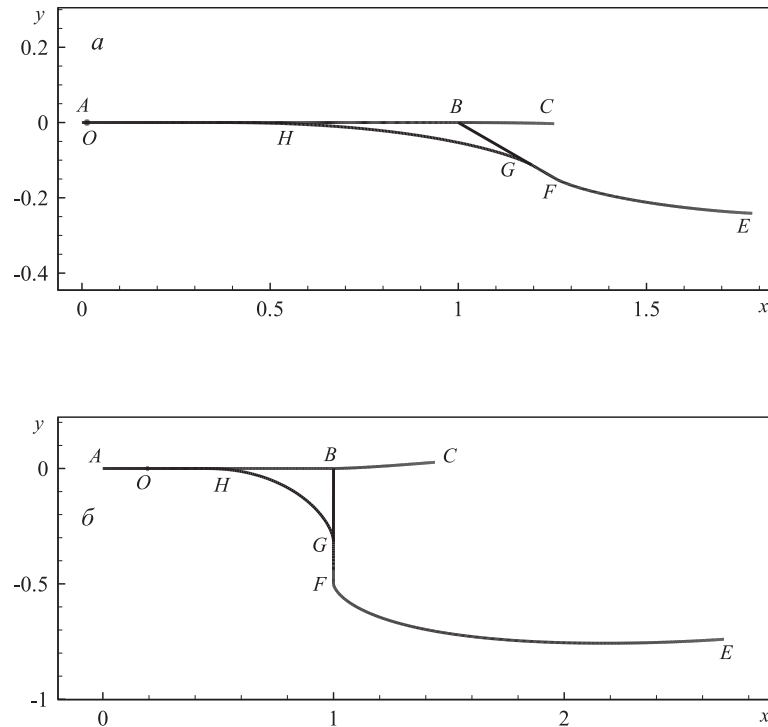


Рис. 3. Пример картины течения около пластинки со щитком при  $\alpha = 2^\circ$ ,  $l_2 = 0.3$ ,  $\beta = 30^\circ$  (а) и  $\alpha = 10^\circ$ ,  $l_2 = 0.5$ ,  $\beta = 90^\circ$  (б)

### 3. Результаты численных расчетов

Система нелинейных уравнений для определения пяти неизвестных  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $b$  решается методом Ньютона. После их определения находится распределение скорости на пластинке и щитке, строятся неизвестные границы  $HG$ ,  $FE$ ,  $BC$  области течения и вычисляются коэффициенты  $C_{xa}$  и  $C_{ya}$ .

Из условия гладкого отрыва определяется точка  $H$  и, соответственно, длина застойной зоны  $HV$ . При этом обеспечивается максимальная, физически возможная длина застойной зоны и отсекаются физически невозможные течения (см., например, [2]).

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов.

Картины течения пластинки со щитком и застойной зоной показаны на рис. 3. При этом рис. 3, а соответствует величинам  $\alpha = 2^\circ$ ,  $l_2 = 0.3$  и  $\beta = 30^\circ$ , а рис. 3, б –  $\alpha = 10^\circ$ ,  $l_2 = 0.5$  и  $\beta = 90^\circ$  (значения  $v_\infty = 1$ ,  $v_0 = 1.1$ ,  $l_1 = 1$  во всех примерах фиксировались).

На рис. 4–5 представлены зависимости различных физических величин от длины щитка  $l_2$  при разных углах отклонения щитка  $\beta$  и углах атаки  $\alpha$ . Данные, приведенные на рис. 4, соответствуют  $\alpha = 5^\circ$ , а на рис. 5 –  $\alpha = 10^\circ$ . Сплошные кривые 1 построены для  $\beta = 30^\circ$ , штриховые 2 – для  $\beta = 60^\circ$ , штрих-пунктирные 3 – для  $\beta = 90^\circ$ . При этом тонкие линии соответствуют левой шкале оси ординат ( $C_{xa}$  – на рис. 4, а и 5, а;  $v_1$  – на рис. 4, б и 5, б), а толстые – правой ( $C_{ya}$  – на рис. 4, а и 5, а;  $l_{HV}$  – на рис. 4, б и 5, б). Здесь  $l_{HV}$  – расстояние от точки  $H$  начала застойной зоны  $HG$  до угловой точки  $B$ .

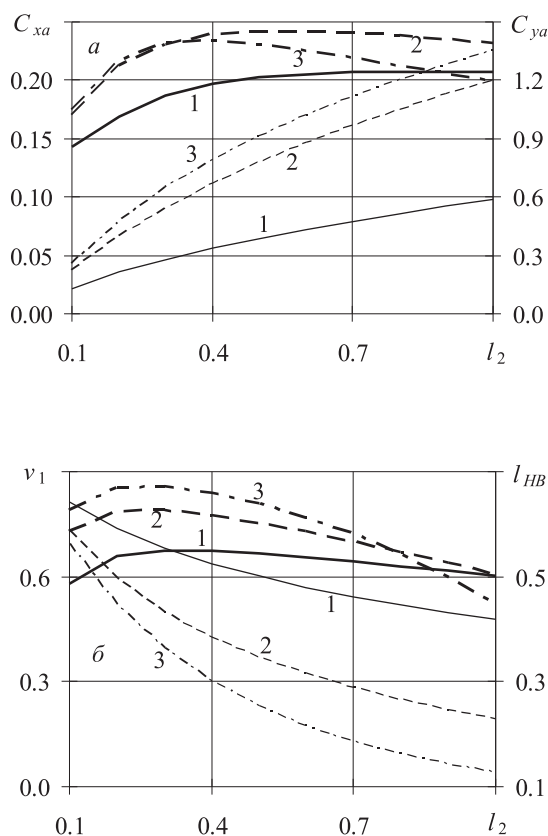


Рис. 4. Зависимости коэффициента  $C_{xa}$  (а, тонкая линия), коэффициента  $C_{ya}$  (а, толстая линия), скорости  $v_1$  (б, тонкая линия) и длины  $l_{HV}$  (б, толстая линия) от длины щитка  $l_2$  при  $\alpha = 5^\circ$ : 1-3 –  $\beta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Из анализа приведенных зависимостей видно, что увеличение длины щитка приводит к монотонному возрастанию коэффициента  $C_{xa}$ , причем это возрастание заметно больше при углах отклонения щитка  $\beta = 60^\circ$  и  $90^\circ$ , чем при  $\beta = 30^\circ$ .

В зависимостях коэффициента подъемной силы  $C_{ya}(l_2)$  имеются максимумы, положение которых с увеличением угла отклонения  $\beta$  смещается в сторону меньших длин щитка. Наибольшее значение  $C_{ya}$  достигается при  $\beta = 60^\circ$ .

С увеличением длины щитка значение скорости  $v_1$  на границе застойной зоны  $HG$  монотонно убывает, и чем больше угол отклонения щитка  $\beta$ , тем меньше  $v_1$ .

В зависимостях длины  $l_{HV}$  застойной зоны наблюдаются максимумы, положение которых с увеличением угла отклонения  $\beta$  смещается в сторону меньших длин щитка  $l_2$ .

### Заключение

Как уже было сказано во введении, задача безотрывного обтекания плоской пластинки со щитком решалась в работе [3]. В настоящей работе была сделана попытка приблизить обтекание исходного контура к реальному течению. Для этого была использована схема отрывного обтекания Ву, а также теория С.А. Чаплыгина

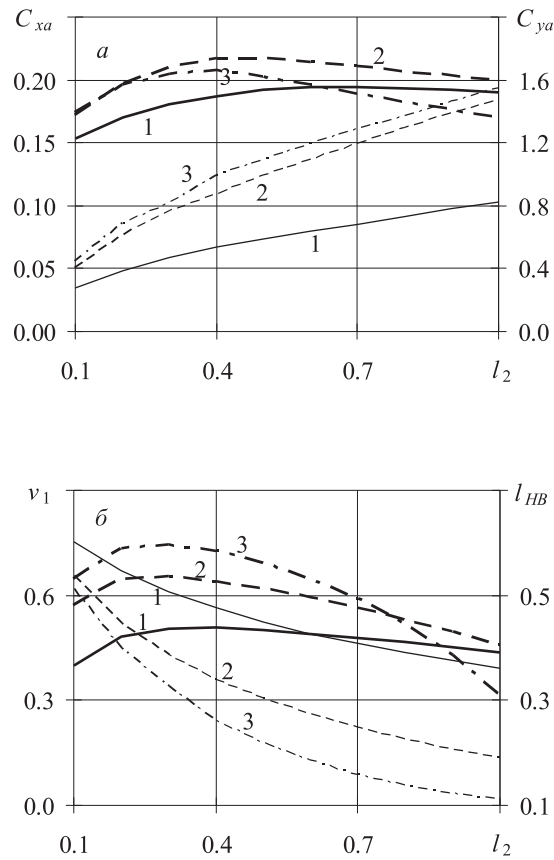


Рис. 5. Зависимости коэффициента  $C_{xa}$  (а, тонкая линия), коэффициента  $C_{y\alpha}$  (а, толстая линия), скорости  $v_1$  (б, тонкая линия) и длины  $l_{NB}$  (б, толстая линия) от длины щитка  $l_2$  при  $\alpha = 10^\circ$ : 1-3 -  $\beta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

о замене критической точки застойной зоной. Поэтому были получены зависимости не только коэффициента подъемной силы, а также коэффициента силы сопротивления.

Авторы выражают благодарность Д.В. Маклакову за полезные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦНТП (шифр РИ-112/001/465), РФФИ (проект № 05-08-01153-а).

### Summary

*L.G. Plotnikova, A.V. Potashev.* Flow with separation around a flat plate with rejected flap and a presence of a stagnation zone.

In this paper the problem of a flow with separation around a flat plate with rejected flap is solved at presence of a stagnation zone after flap, and also with presence an angular point between a flat plate and flap. Pressure in a stagnation zone near an angular point is defined from Brillouin – Villat condition of smooth separation. Dependencies of aerodynamic characteristics are received.



**Литература**

1. *Чаплыгин С.А.* К вопросу о струях в несжимаемой жидкости // Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – Т. 10, № 1. – С. 35–40.
2. *Маклаков Д.В., Фридман Г.М.* Струйное обтекание пластины с интерцептором при наличии застойной зоны. // Изв. РАН. МЖГ. – 2005. – № 4. – С. 36–44.
3. *Ильинский Н.Б., Плотникова Л.Г.* Об одном подходе к построению профиля крыла с элероном // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2003. – № 4. – С. 28–32.
4. *Плотникова Л.Г.* Задача обтекания отрывным потоком пластинки с отклоненным щитком // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2006. – № 1. – С. 61–63.
5. *Wi T.Y.* A wake model for free-streamline flow theory. Part I // J. Fluid Mech. – 1962. – V. 13, No 2. – P. 161–181.
6. *Wi T.Y.* A wake model for free-streamline flow theory. Part II // J. Fluid Mech. – 1964. – V. 18, No 1. – P. 65–93.
7. *Konhaeuser P.* Berechnung zweidimensionaler Totwasserstroemungen um vorgegebene Konturen // Institut A fuer Mechanik der Universitaet Stuttgart. – 1984. – 72 s.
8. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536 с.

Поступила в редакцию  
14.04.06

---

**Плотникова Людмила Геннадьевна** – младший научный сотрудник отдела крайних задач НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Ludmila.Plotnikova@ksu.ru*

**Поташев Андрей Валерьевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Казанского высшего артиллерийского командного училища.

E-mail: *Andrey.Potashev@ksu.ru*