S. Zh. Nabiev, Automorphisms of some 2-generator Lie algebras with an abelian ideal, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 49–55

Рассмотрим все четыре случая.

1. B — точка кратности m:

$$e=-3m^2DB+m^3E^3=m^3.$$

2. B — кривая кратности m и степени d:

$$e=3m^2DB+m^3E^3=m^2(3nd-mc_1(N_B))=m^2(3nd-md(d+1)).$$

3. Пересечение двух кривых B_α и B_β:

$$e=\sigma^*D^3-(\sigma^*D-m_\alpha\sigma_\beta^*E_\alpha-m_\beta E_\beta)^3=-m_\alpha^3d_\alpha(d_\alpha+1)-$$

$$-m_\beta^3d_\beta(d_\beta+1)+3m_\alpha^2nd_\alpha+3m_\beta^2nd_\beta+m_\beta^3D_{\alpha\beta}-3m_\alpha m_\beta^2D_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, e для двух пересекающихся кривых уменьшается на $\Sigma(3m_\alpha m_\beta^2-m_\beta^3)D_{\alpha\beta}=\Sigma m_\beta^2(3m_\alpha-m_\beta)D_{\alpha\beta}$.

4. Соответствие точка—кривая:

$$e=m^3-m_\alpha^3d_\alpha(d_\alpha+1)+3m_\alpha^2d_\alpha n-3mm_\alpha^2D_{\alpha o}+2m_\alpha^3D_{\alpha o}.$$

Здесь e изменяется на

$$-\Sigma(3mm_\alpha^2-2m_\alpha^3)D_{\alpha o}=-\Sigma m_\alpha^2(3m-2m_\alpha)D_{\alpha o}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hudson H. Cremona transformations. Cambridge, 1927.
2. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота//Матем. сб. 1981. **86**, № 1. 140—146.
3. Kawamata Y. A generalization of Kodaira-Ramanujam's wanishing theorem//Math. Ann. 1982. **261**, И 1. 43—46.
4. Фултон У. Теория пересечений. М., 1989.

Поступила в редакцию
04.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 512.554.37

С. Ж. Набиев

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ НЕКОТОРЫХ 2-ПОРОЖДЕННЫХ АЛГЕБР ЛИ С АБЕЛЕВЫМ ИДЕАЛОМ

Пусть L — абсолютно свободная алгебра Ли. Свободной метабелевой алгеброй Ли называется алгебра $L/(L^2)^2$. Известно, что любой автоморфизм свободной метабелевой алгебры Ли ранга 2, тождественный по модулю коммутанта, является внутренним (см. [1, 2]). Основной результат данной статьи — обобщение этого утверждения на случай алгебр Ли ранга 2 L/R^2, где R — некоторый идеал L.

Теорема 1. *Пусть $L=L(x,y)$ — свободная алгебра Ли ранга 2 над целостным коммутативным кольцом F и R — ее идеал, такой, что L/R — свободный F-модуль и R конечно порожден. Тогда все автоморфизмы алгебры Ли L/R^2, тождественные по модулю идеала R/R^2, являются внутренними, т. е. имеют вид* $\exp(\mathrm{ad}\,r)$, *где r принадлежит R/R^2.*

Прежде чем доказывать теорему 1, вспомним некоторые определения и теоремы из работ [1—3], а также докажем ряд вспомогательных утверждений.

Алгебра W называется абелевым сплетением алгебр Ли A и B, где A — абелева алгебра Ли, B — произвольная алгебра Ли, если

1) $W=\mathrm{alg}(A, B)$;

2) $K=\mathrm{id}_W A$ является абелевой алгеброй;

3) если $f: A\to C$, $g: B\to C$ — гомоморфизмы из A и B в алгебру Ли C, такие, что $C=\mathrm{alg}(f(A), g(B))$, $S=\mathrm{id}_C(f(A))$ — абелева алгебра Ли, то существует единственный гомоморфизм $h: W\to C$, такой, что $h|_A=f$ и $h|_B=g$. Абелево сплетение алгебр A и B обозначается символом $AwrB$. Абелево сплетение имеет форму полупрямой суммы $W=B+K$, где $K=\mathrm{id}_W A$. Идеал K является свободным B-модулем с множеством свободных порождающих $\{a_i\}_{i\in I}$, если $\{a_i\}_{i\in I}$ — множество свободных порождающих алгебры A.

Пусть $L=L(X)$, $X=\{x_i\}_{i\in I}$ — свободная алгебра Ли над ассоциативным коммутативным кольцом F с единицей, со свободным порождающим множеством X, R — ее идеал, такой, что алгебра L/R является свободным F-модулем. Тогда верна

Теорема 2. *Отображение* $\bar{\bar{x}}_i \mapsto \bar{x}_i+a_i$, *где* $\bar{\bar{x}}_i=x_i+R^2$, $\bar{x}_i=x_i+R$, *продолжается до мономорфизма* $\mu: L/R^2\to W=AwrL/R$, *где* A*—свободная абелева алгебра Ли с порождающими* $\{a_i\}_{i\in I}$, *причем элемент сплетения* $u=b+\sum\limits_i f^i * a_i$, $b\in L/R$, $f^i\in U(L/R)$, *лежит в* $\mu(L/R^2)$ *тогда и только тогда, когда* $b=\sum\limits_i f^i\bar{x}_i$ *(*$U(L/R)$*—универсальная обертывающая алгебра алгебры* L/R, $*$*—модульное действие).*

Если множество X конечно, то верна

Теорема 3. *Пусть* R *— идеал свободной алгебры Ли* $L=L(x_1, \ldots, x_n)$, *такой, что алгебра* L/R *конечно определена соотношениями* $r_1=0, \ldots, r_m=0$ *и является свободным* F*-модулем. Тогда группа автоморфизмов алгебры* L/R^2, *тождественных модулю идеала* R/R^2, *изоморфна группе всех обратимых матриц вида* $E+QA_n$, где A_n *— фиксированная матрица порядка* $m\times n$, Q *— произвольная* $n\times m$*-матрица и обе имеют компоненты из* $U(L/R)$.

В силу того что алгебра L/R определена соотношениями $r_1=0, \ldots$ $\ldots, r_m$, идеал R/R^2 порождается как $U(L/R)$-модуль элементами $\bar{\bar{r}}_i=r_i+R^2$. Применим отображение из теоремы 2 к этим элементам, тогда $\mu(\bar{\bar{r}}_i)=$ $=\sum\limits_j a_{ij}*a_j$, $a_{ij}\in U(L/R)$. Эти коэффициенты и являются компонентами матрицы A_n, т. е. $A_n=(a_{ij})$. Если α—автоморфизм алгебры L/R^2, тождественный по модулю идеала R/R^2, то $\alpha(\bar{\bar{x}}_i)=\bar{\bar{x}}_i+\Sigma q_i^j * \bar{\bar{r}}_j$, $q_i^j\in U(L/R)$ и изоморфизм теоремы 3 сопоставляет ему матрицу $E+QA_n$, где $Q=(q_i^j)_{i=1,n}^{j=1,m}$.

Пусть теперь F — поле, $F[X]$ — кольцо многочленов от переменных $X=\{x_i\}_{i\in I}$, $F(X)$ — поле рациональных дробей, M — алгебра Ли над полем F, $U(M)$ — ее универсальная обертывающая, D — тело, в которое погружается алгебра $U(M)$ (возможность такого погруженния доказана в работе [4]).

Пусть $U_n(M)$ — векторное пространство, порожденное произведениями вида $y_1\ldots y_p$, где $y_i\in M$, $p\leqslant n$. Фильтрация элемента $u\in U(M)$ определяется как наименьшее k, такое, что $u\in U_k(M)$; обозначим ее через $\mathrm{fl}(u)$. В работах [4, 5] фильтрация fl поднимается на D следующим образом:

введем эквивалентность в полугруппе $S=U(M)\backslash 0$: $a=b \bmod T_n$, если $\mathrm{fl}(b-a)-\mathrm{fl}(a)\leqslant n$. Тогда факторполугруппа S/T_n является областью Оре и, следовательно, вкладывается в группу. Обозначим эту группу через G_n. Так как $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_n \subset \ldots$, то существуют гомоморфизмы $S/T_n \to S/T_m$, $n \leqslant m$, которые продолжаются до гомоморфизмов $G_n \to G_m$. Поэтому можно рассмотреть проективный предел групп G_n, обозначим его через G. Полугруппа S при этом вкладывается в G. Множество $G \cup 0$ с операцией сложения, индуцированной с $U(M)$, является телом D. Функция fl продолжается на G следующим образом:

$$x \in G \text{ и } x = x_1 x_2^{-1} \operatorname{mod} (\operatorname{Ker} G \to G_n), \text{ то } \operatorname{fl}(x) = \operatorname{fl}(x_1) - \operatorname{fl}(x_2).$$

Приведем некоторые свойства fl:

1) $\operatorname{fl}(st) = \operatorname{fl}(s) + \operatorname{fl}(t)$, $s, t \in D$.

2) $\operatorname{fl}(s+t) \leqslant \max\{\operatorname{fl}(s), \operatorname{fl}(t)\}$, $s, t \in D$.

3) $\operatorname{fl}(s+t) = \operatorname{fl}(s)$, если $\operatorname{fl}(s) > \operatorname{fl}(t)$, $s, t \in D$.

4) $\operatorname{fl}(st - ts) < \operatorname{fl}(s) + \operatorname{fl}(t)$, $s, t \in D$.

Рассмотрим теперь градуированные алгебры

$$\operatorname{gr} U(M) = \sum_n (U_n(M)/U_{n-1}(M)) \text{ и } \operatorname{gr} D = \sum_n D_n/D_{n-1},$$

где $D_n = \{s \in D \mid \operatorname{fl}(s) \leqslant n\}$. Данные пространства являются алгебрами с умножением

$$(s + U_{n-1}(M))(t + U_{m-1}(M)) = st + U_{n+m-1}(M), \quad s \in U_n(M), \quad t \in U_m(M);$$

для $\operatorname{gr} D$ умножение определяется аналогично.

Напомним, что для алгебры $\operatorname{gr} U(M)$ верна

Лемма 1. *Пусть M — алгебра Ли, $E = \{e_i\}$ — ее базис. Тогда* $\operatorname{gr} U(M) \cong F[E]$.

Обозначим данный изоморфизм через ω.

Для алгебры $\operatorname{gr} D$ докажем аналогичную лемму.

Лемма 2. $\operatorname{gr} D \cong F(E)$ *— изоморфизм алгебр.*

Доказательство. Произвольный элемент D_n/D_{n-1} имеет вид $ab^{-1} + D_{n-1}$; $a, b \in U(M)$.

Определим отображение $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega}(ab^{-1} + D_{n-1}) = \omega(a + U_{m-1}(M))/\omega(b + U_{m-n-1}(M)),$$

если $a \in U_m(M)$, $b \in U_{m-n}(M)$. По линейности продолжаем $\bar{\omega}$ на всю алгебру $\operatorname{gr} D$. Покажем корректность этого отображения. Пусть $a_1 b_1^{-1} \equiv a_2 b_2^{-1} \operatorname{mod} U_{n-1}(M)$ (далее не будем указывать, по какому модулю мы берем сравнения, это не должно привести к недоразумению):

$$a_1 \in U_m(M), \ b_1 \in U_{n-m}(M), \ a_2 \in U_k(M), \ b_2 \in U_{n-k}(M),$$

тогда $a_1 b_1^{-1} b_2 \equiv a_2$, $a_1 b_2 b_1^{-1} \equiv a_2$, $a_1 b_2 \equiv a_2 b_1$, т. е. $a_1 b_2 + U_{m+k-n-1}(M) = a_2 b_1 + U_{m+k-n-1}(M)$, откуда

$$(a_1 + U_{m-1}(M))(b_2 + U_{k-n-1}(M)) = (a_2 + U_{k-1}(M))(b_1 + U_{m-n-1}(M)).$$

Используя лемму 1, получим необходимую корректность.

Биективность отображения $\bar{\omega}$ следует из биективности ω. В силу того что

$$\bar{\omega}((a_1b_1^{-1}+D_{n-1})(a_2b_2^{-1}+D_{m-1}))=\bar{\omega}(a_1a_2b_1^{-1}b_2^{-1}+D_{m+n-1})=$$
$$=\omega(a_1a_2+U_{k-1}(M))/\omega(b_1b_2+U_{k-n-m-1}(M))=$$
$$=\bar{\omega}(a_1b_1^{-1}+D_{n-1})\,\bar{\omega}(a_2b_2^{-1}+D_{m-1}),$$

$\bar{\omega}$ является изоморфизмом алгебр.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть M—алгебра Ли над полем F и $U(M)$—ее универсальная обертывающая. Тогда если* $\mathrm{fl}(yx^{-1}u+v)=0$, *где* y, $x\in M$ *и* u, $v\in U(M)$, *то либо* $u=xw+s$, $v=-yw+t$, *где* $w\in U(M)$ *и* s, $t\in F$, *либо* $y=kx$, $k\in F$.

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{fl}(u)=\mathrm{fl}(v)$. Действительно, если $\mathrm{fl}(u)=0$, то согласно свойству 2

$$\mathrm{fl}(v)=\mathrm{fl}(yx^{-1}u+v-yx^{-1}u)\leqslant\max\{\mathrm{fl}(yx^{-1}u+v),\ \mathrm{fl}(u)\}=0,$$

но $v\in U(M)$, т. е. $\mathrm{fl}(v)\geqslant 0$, значит, $\mathrm{fl}(v)=0$. Если $\mathrm{fl}(u)>0$, то согласно свойству 3 $\mathrm{fl}(v)=\mathrm{fl}(v+yx^{-1}u-yx^{-1}u)=\mathrm{fl}(yx^{-1}u)=\mathrm{fl}(u)$.

Будем доказывать индукцией по $\mathrm{fl}(u)=\mathrm{fl}(v)=n$. Если $\mathrm{fl}(u)=\mathrm{fl}(v)=0$, то $u=s$, $v=t$ и доказывать нечего. Пусть $\mathrm{fl}(u)=\mathrm{fl}(v)=n>0$, тогда $yx^{-1}u+D_{n-1}=-v+D_{n-1}$. Применим к этому равенству отображение $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega}(yx^{-1}u+D_{n-1})=\omega(y+U_0(M))\,\omega(u+U_{n-1}(M))/\omega(x+U_0(M)),$$

а с другой стороны,

$$\bar{\omega}(yx^{-1}u+D_{n-1})=\bar{\omega}(-v+D_{n-1})=-\omega(v+U_{n-1}(M)).$$

Следовательно, многочлен $\omega(y+U_0(M))\,\omega(u+U_{n-1}(M))$ делится на $\omega(x+U_0(M))$, но $\omega(x+U_0(M))$—многочлен первой степени, т. е. неприводим, а значит, он делит либо $\omega(y+U_0(M))$, либо $\omega(u+U_{n-1}(M))$. Если он делит $\omega(y+U_0(M))$, то поскольку $\omega(y+U_0(M))$ также многочлен первой степени, $\omega(y+U_0(M))=k\omega(x+U_0(M))$, где $k\in F$. Откуда следует, что $y=kx$. Если $\omega(x+U_0(M))$ делит $\omega(u+U_{n-1}(M))$, то

$$\omega(u+U_{n-1}(M))=h\omega(x+U_0(M))\ \text{ и }\ \omega(v+U_{n-1}(M))=-h\omega(x+U_0(M)),$$

где $h\in F[E]$. По лемме 1 существует элемент $w'\in U_{n-1}(M)$, такой, что $h=\omega(w'+U_{n-2}(M))$. Следовательно,

$$\omega(u+U_{n-1}(M))=\omega(x+U_0(M))\,\omega(w'+U_{n-2}(M)),$$

откуда $u=xw'+u'$, $u'\in U_{n-1}(M)$. Аналогично для v имеем $v=-yw'+v'$, $v'\in U_{n-1}(M)$. Поскольку $\mathrm{fl}(yx^{-1}u'+v')=\mathrm{fl}(yx^{-1}(u'+xw')+v'-yw')=\mathrm{fl}(yx^{-1}u+v)=0$, то по предположению индукции $u'=xw''+s$, $v'=-yw''+t$, $w''\in U(M)$, s, $t\in F$. Подставляя вместо u' и v' соответствующие выражения, получим $u=x(w'+w'')+s$, $v=-y(w'+w'')+t$. Что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Допустим сначала, что F — алгебраически замкнутое поле. По теореме 3 группа всех автоморфизмов, тождественных по модулю идеала R/R^2, изоморфна группе обратимых матриц вида $E+QA_2$. Выясним, при каких Q эти матрицы обратимы.

Пусть $\bar{\bar{r}}_1,\dots,\bar{\bar{r}}_m$—порождающие $U(L/R)$-модуля R/R^2 и $\mu(\bar{\bar{r}}_i)=a_{i_1}*a_1+a_{i_2}*a_2$, a_{i_1}, $a_{i_2}\in U(L/R)$, $i=1,\dots,m$. Тогда согласно теореме 2 из условия $a_{i_1}*a_1+a_{i_2}*a_2\in\mu(L/R^2)$ следует, что $a_{i_1}\bar{x}+a_{i_2}\bar{y}=0$, и, значит,

$$A_2\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=A_{21}\bar{x}+A_{22}\bar{y}=0, \text{ где } A_{2i}=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \cdots\\ a_{mi}\end{pmatrix},\ i=1,\ 2.$$

Поэтому, если мы сопряжем $E+QA_2$ матрицей $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\bar{y}\bar{x}^{-1} & 1\end{pmatrix}$, то получим

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\bar{y}\bar{x}^{-1} & 1\end{pmatrix}(E+QA_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ \bar{y}\bar{x}^{-1} & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & Q_1A_{22}\\ 0 & 1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)QA_{22}\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}.$$

Если же мы сопряжем $E+QA_2$ матрицей $\begin{pmatrix}1 & -\bar{x}\bar{y}^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, то получим

$$\begin{pmatrix}1 & -\bar{x}\bar{y}^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}(E+QA_2)\begin{pmatrix}1 & \bar{x}\bar{y}^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ Q_2A_{21} & 1+(1,\ -\bar{x}\bar{y}^{-1})QA_{21}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, эквивалентны утверждения:

1. $E+QA_2$ имеет обратную матрицу вида $E+Q'A_2$.
2. $1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)QA_{22}$ имеет обратный элемент вида $1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)Q'A_{22}$.
3. $1+(1,\ -\bar{x}\bar{y}^{-1})QA_{21}$ имеет обратный элемент вида $1+(1,\ -\bar{x}\bar{y}^{-1})Q'A_{21}$.

Подсчитаем, чему равно $\mathrm{fl}(1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)QA_{22})$. Пусть a и $b\in U(L/R)$, такие, что $a\bar{x}+b\bar{y}=0$, например $a=a_{i1}$, $b=a_{i2}$. Тогда $(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)=b^{-1}(a,\ b)$. В силу того, что

$$0\leqslant \mathrm{fl}\left(b+\sum_{k=1}^{n} C_n^k(a,\ b)\,(QA_2)^{k-1}\,QA_{22}\right)=$$
$$=\mathrm{fl}\left(b\left(1+\sum_{k=1}^{n} C_n^k((-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)\,QA_{22})^k\right)\right)=\mathrm{fl}\,(b\,(1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)\,QA_{22})^n)=$$
$$=\mathrm{fl}\,(b)+n\,\mathrm{fl}\,(1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)\,QA_{22})$$

(здесь мы пользуемся тем, что $A_2=(A_{21}A_{22})=A_{22}(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1))$, получаем $\mathrm{fl}\,(1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)\,QA_{22})\geqslant 0$. Аналогично $\mathrm{fl}\,(1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)\,Q'A_{22})\geqslant 0$. С другой стороны, согласно свойству 1

$$0=\mathrm{fl}\,(1)=\mathrm{fl}\,(1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)\,QA_{22})+\mathrm{fl}\,(1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)\,Q'A_{22}).$$

Следовательно, $\mathrm{fl}\,(1+(-\bar{y}\bar{x}^{-1},\ 1)\,QA_{22})=0$. Тогда по лемме 3 имеем

$$Q_1A_{22}=-\bar{x}w-s,\ Q_2A_{22}=-\bar{y}w+t-1$$

и

$$Q_1'A_{22}=-\bar{x}w'-s',\ Q_2'A_{22}=-\bar{y}w'+t'-1,$$

где $w, w' \in U(L/R)$, $s, s', t, t' \in F$. Заметим, что так как $s\bar{y}\bar{x}^{-1}+t$ и $s'\bar{y}\bar{x}^{-1}+t'$ — взаимно обратные, т. е. $(s\bar{y}\bar{x}^{-1}+t)(s'\bar{y}\bar{x}^{-1}+t')=1$, то в случае $s\neq 0$ или $s'\neq 0$ элемент $\bar{y}\bar{x}^{-1}$ алгебраичен над F и, значит, принадлежит F, но это невозможно. Повторяя данные рассуждения для $1+(1, -\bar{y}\bar{x}^{-1})QA_{21}$, получим, что $Q_2A_{21}=-\bar{y}v$, $Q_1A_{21}=-\bar{x}v+k-1$, где $v\in \in U(L/R)$, $k\in F$. Поскольку $A_{22}\bar{y}=-A_{21}\bar{x}$, то

$$-\bar{x}w\bar{y}=Q_1A_{22}\bar{y}=-Q_1A_{21}\bar{x}=\bar{x}v\bar{x}+(k-1)\bar{x},$$

$$-\bar{y}w\bar{y}+(t-1)\bar{y}=Q_2A_{22}\bar{y}=-Q_2A_{22}\bar{x}=-\bar{y}v\bar{x}.$$

Откуда $w\bar{y}+v\bar{x}=1-t=1-k$. Так как $w\bar{y}+v\bar{x}$ лежит в несущем идеале алгебры $U(L/R)$, а $1-t$, $1-k$ — константы, то $t=k=1$ и $w\bar{y}+v\bar{x}=0$. По теореме 2 элемент $w*a_1+v*a_2$ лежит в $\mu(L/R^2)$, а точнее в $\mu(R/R^2)$. Пусть $\bar{\bar{r}}=\sum_j p^j*\bar{\bar{r}}_j$ есть его прообраз, тогда $\mu(\bar{\bar{r}})=\sum_{ji} p^j a_{ji}*a_i$ и, следовательно, $w=\sum_j p^j a_{j2}=(p', \ldots, p^m)A_{22}$, $v=\sum_j p^j a_{j1}=(p^1, \ldots, p^m)A_{21}$. Откуда заключаем, что

$$QA_2=\begin{pmatrix}\bar{x}\\ -\\ \bar{y}\end{pmatrix}(p^1, \ldots, p^m)A_2.$$

Автоморфизм, соответствующий матрице $E+\begin{pmatrix}\bar{x}\\ -\\ \bar{y}\end{pmatrix}(p^1, \ldots, p^m)A_2$, действует на $\bar{\bar{x}}$ и $\bar{\bar{y}}$ следующим образом:

$$\alpha(\bar{\bar{x}})=\bar{\bar{x}}+\sum_j \bar{x}p^j*\bar{\bar{r}}_j=\bar{\bar{x}}+[\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{r}}],\quad \alpha(\bar{\bar{y}})=\bar{\bar{y}}+[\bar{\bar{y}}, \bar{\bar{r}}],$$

т. е. $\alpha=\exp(\operatorname{ad}\bar{\bar{r}})$.

Предположим теперь, что F — целостное кольцо, K — алгебраически замкнутое поле, содержащее F. Вложим L/R^2 в алгебру $L/R^2\otimes K$ естественным образом и поднимем его автоморфизмы до автоморфизмов алгебры $L/R^2\otimes K$ следующим образом: если $\alpha\in \operatorname{Aut} L/R^2$, то $\alpha(\Sigma z\otimes k)=\Sigma\alpha(z)\otimes k$. Если α тождествен по модулю идеала R/R^2, то его продолжение тождественно по модулю идеала $R/R^2\otimes K$ и, следовательно, является внутренним автоморфизмом, т. е. $\alpha(z\otimes k)=z\otimes k+[z\otimes k, \Sigma z_i\otimes k_i]$. С другой стороны, $\alpha(z\otimes k)=\alpha(z)\otimes k$. Поэтому все $k_i\in F$ и, значит, $\Sigma z_i\otimes k_i=r\otimes 1$, а $\alpha(z)=z+[z, r]$, где $r\in R/R^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмелькин А. Л. Сплетение алгебр Ли и их применение в теории групп//Тр. Моск. матем. о-ва. 1973. **29**. 247—260.
2. Bahturin Y., Nabiyev S. Automorpisims and derivation of abelian extentions of some Lie algebras//Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. 1992. **62**. 43—57.
3. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М., 1978.
4. Cohn P. M. On the embedding of ring in skew fields//Proc. London Math. Soc. 1967. **(3)11**. 511—530.
5. Lichtman A. I. *Pl*-subrings and algebraic elements in enveloping algebras and their fields of fractions//J. Algebra. 1989. **121**, N 1. 516—527.

Поступила в редакцию
10.06.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 511

Е. Н. Егоренкова

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЙ ФОРМУЛЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Введение. В статье строится пример сетки

$$M=\{(\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k)):k=1,\ldots,N\},$$

для которой на классе функций $E_s^\alpha(C)$, $\alpha>1$ (т. е. функций $f(x_1,\ldots,x_s)$ с периодом единица по каждой переменной, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$|C(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant C(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^{-\alpha};\ \overline{m}=\max\{|m|,\ 1\},$$

погрешность $R_N[f]$ квадратурной формулы приближенного интегрирования

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k))-R_N[f] \tag{1}$$

удовлетворяет соотношению

$$R_N[f]=O(N^{-\frac{\alpha}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{s}}}).$$

Известны сетки, допускающие лучшую оценку погрешности $R_N[f]$. Например, параллелепипедальные сетки (см. [1, § 7]) обеспечивают погрешность порядка $O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right)$, где γ — некоторая константа, зависящая от α и s. Однако предлагаемая в настоящей работе сетка обеспечивает порядок погрешности лучший, чем равномерная сетка (см. [1, теорема 3]), и в отличие от параллелепипедальных сеток, для которых требуется при каждом N определять оптимальные коэффициенты, построенная нами сетка указывается явным образом. К сожалению, возможность практического использования нашей сетки весьма ограничена, так как при увеличении размерности s количество точек в сетке растет слишком быстро.

Аналогичные идеи доказательств приведены в [1], а также в работе [2].

2. Описание сетки. Пусть $p_1,\ldots,p_s$ — натуральные числа, каждое из которых больше s, причем

$$(p_1\cdots p_s,\ s!)=1 \tag{2}$$

и

$$p_\nu\asymp p_1^{\frac{s}{(s-\nu+1)(s-\nu+2)}};\ \nu=2,\ldots,s. \tag{3}$$

Предлагаемая сетка M состоит из точек

$$\left(\left\{\frac{k_1}{p_1}+\frac{k_2}{p_1p_2}+\ldots+\frac{k_s}{p_1\cdots p_s}\right\},\ \left\{\frac{k_1}{p_1}+\frac{2k_2}{p_1p_2}+\ldots+\frac{2^{s-1}k_s}{p_1\cdots p_s}\right\},\ldots\right.$$
$$\left.\ldots,\left\{\frac{k_1}{p_1}+\frac{sk_2}{p_1p_2}+\ldots+\frac{s^{s-1}k_s}{p_1\cdots p_s}\right\}\right), \tag{4}$$