

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. N. Babin, Superpositions of bounded-deterministic functions, *Mat. Zametki*, 1990, Volume 47, Issue 3, 3–10

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

February 13, 2025, 16:58:09



## О СУПЕРПОЗИЦИЯХ ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Н. Бабин

Рассматривается задача о полноте систем ограничено-детерминированных функций относительно операции суперпозиции. Известно, что конечных полных систем о.-д. функций нет, известные полные системы [1] содержат функции с неограниченным, в совокупности, числом переменных. В работе показано, что любая о.-д. функция может быть представлена суперпозицией о.-д. функций от двух переменных. Точнее, любая о.-д. функция порождается одноместными о.-д. функциями и булевскими функциями. Заметим, что аналогичный вопрос для автоматов с бесконечной памятью, т. е. для детерминированных функций, был решен отрицательно [2].

В работе [3] было доказано, что в классе всех о.-д. функций имеется континуум предполных классов. Оставался открытым вопрос о том, всякий ли класс о.-д. функций расширяется до предполного (относительно суперпозиции) класса. В настоящей заметке указывается пример замкнутого класса, который не содержится в предполном.

Через  $P$  обозначим класс всех о.-д. функций, замыкание относительно суперпозиции системы о.-д. функций  $M$  обозначим через  $[M]$ , систему одноместных (одновходовых) о.-д. функций — через  $P_1$ . Ограничено-детерминированную функцию  $d(v)$  задаваемую уравнениями

$$\begin{aligned}q(1) &= 0, \\q(t+1) &= v(t), \\d(t) &= q(t),\end{aligned}\tag{1}$$

называем о.-д. функцией «задержки».

Константной называем о.-д. функцию, выдающую одну и ту же выходную последовательность на всех входных последовательностях одинаковой длины. Класс константных о.-д. функций обозначим через  $K$ . Можно считать, что  $K \subset P_1$ . Класс булевских функций обозначим через  $O$ .

О п р е д е л е н и е. Пусть  $f$  и  $g$  о.-д. функции с одинаковым числом входов и одинаковым числом выходов. Скажем, что о.-д.

функция  $g$  копирует о.-д. функцию  $f$ , если найдутся такие натуральные  $n, j, k, n \leq j$ , что для любого  $l = 0, 1, 2, \dots$  и любой входной последовательности достаточной длины значение о.-д. функции  $g$  в момент  $j + kl$  совпадает со значением о.-д. функции  $f$  в момент  $n + kl$ .

Из работы [1] следует, что система о.-д. функций

$$F = \{f_i(x_1, \dots, x_{m_i}), m_i = i \cdot 2^i, i = 1, 2, \dots\} \cup O$$

полна относительно суперпозиции,  $[F] = P$ . Здесь  $f_i$  — о.-д. функция с  $m_i$  входами и  $i$  выходами, задаваемая уравнениями (2),  $q_1^{a_1, s} \& \dots \& q_i^{a_i, s}$  — элементарная конъюнкция, равная единице лишь при  $q_1 = a_{1, s}, \dots, q_i = a_{i, s}$ ,  $s$  — номер набора  $(a_{1, s}, \dots, a_{i, s})$ ,  $s = 1, 2, \dots, 2^i$ ;

$$q_1(1) = 0, \dots, q_i(1) = 0, \quad (2)$$

$$q_p(t+1) = \bigvee_{s=1}^{2^i} q_1^{a_{1, s}}(t) \& \dots \& q_i^{a_{i, s}}(t) \& x_{m_i, s, p}(t),$$

$$f_{i, p}(t) = q_p(t),$$

$$p = 1, 2, \dots, i, \quad m_{i, s, p} = p + (s - 1) \cdot i.$$

Пусть  $\mathcal{F}$  — одна из о.-д. функций системы  $F$ . Для некоторого  $i$ ,  $\mathcal{F} = f_i$ ,  $m = 2^i \cdot i$  — число входов о.-д. функции  $\mathcal{F}$ ,  $i$  — число выходов.

**ЛЕММА 1.** Пусть некоторая о.-д. функция  $g$  копирует о.-д. функцию  $\mathcal{F}$ , тогда  $\mathcal{F} \in \{g, d\} \cup K \cup O$ .

**Доказательство.** Введем вспомогательную о.-д. функцию  $c(x)$  с одним входом и  $k + j$  выходами, реализуемую схемой из «задержек» (рис. 1). Для всех  $t$  больших  $k + j - 1$ ,  $z_0(t) = x(t)$ ,  $z_1(t) = x(t - 1)$ ,  $\dots$ ,  $z_{k+j-1}(t) = x(t - k - j + 1)$ . Рассмотрим схему (рис. 2), где  $H_1$  и  $H_2$  константные о.-д. функции, выдающие в двоичной системе номера  $h_1$  и  $h_2$ , соответственно,

$$h_1(t) = \begin{cases} t & \text{при } t < j, \\ t - kl - n & \text{при } j + kl \leq t < j + kl + k, \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} k & \text{при } t < j, \\ t - kl - j & \text{при } j + kl \leq t < j + kl + k, \end{cases}$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

Запишем  $h_1(t)$  и  $h_2(t)$  для наглядности в виде

$t$	1   2   ...   $j-1$	$j$	$j+1$   ...   $j+k-1$	$j+k$   $j+k+1$   ...
$h_1(t)$	1   2   ...   $j-1$	$j-n$   $j-n+1$   ...	$j-n+k-1$   $j-n$   $j-n+1$   ...	
$h_2(t)$	$k$   $k$   ...   $k$	0	1   ...   $k-1$	0   1   ...

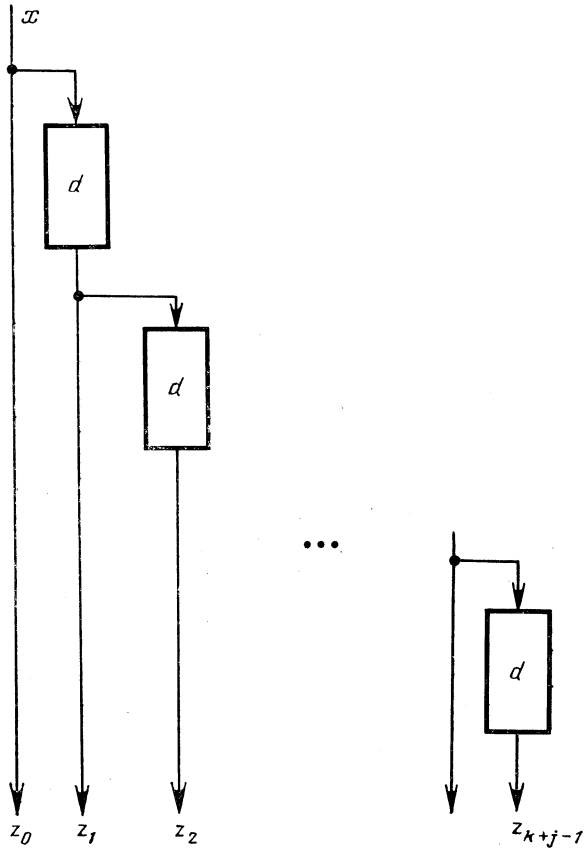


Рис. 1

$\mathcal{B}$  — булевская вектор-функция с  $i$  выходами, в которой заложена таблица результатов переработки о.-д. функцией  $\mathcal{F}$ , начиная со всех начальных состояний, всех слов длины, меньшей  $k + j$ .

В схеме (рис. 2) функция  $\mathcal{B}$  всегда имеет на своем входе конец входной последовательности, а также конец выходной последовательности о.-д. функции  $g$ . Этой информации достаточно для идентификации значения о.-д. функции  $\mathcal{F}$ . Сначала для  $t < j$ , т. е. при  $h_2(t) = k$ , функция  $\mathcal{B}$  будет выдавать последнюю выходную букву о.-д. функции  $\mathcal{F}$ , проработавшей с нулевого начального состояния  $t = h_1(t)$  тактов. Затем для  $t = j + kl + s$ ,  $l = 0, 1, \dots, 0 \leq s < k$  функция  $\mathcal{B}$  будет выдавать последнюю выходную букву о.-д. функции  $\mathcal{F}$ , начавшей работать с состояния

$$\mathcal{F}(n + kl) = g(j + kl) = g(t - s) = g(t - h_2(t))$$

и переработавшей «хвост» входной последовательности длины  $h_1(t)$ :

$$1 \ 2 \dots j + \underbrace{kl \dots t \dots j + kl + k}_{h_2(t)},$$

$$1 \ 2 \dots n + \underbrace{kl \dots t \dots}_{h_1(t)}.$$

Таким образом, схема (рис. 2) реализует о.-д. функцию  $\mathcal{F}$ . Лемма 1 доказана.

Согласно уравнениям (2) о.-д. функции  $\mathcal{F}$  каждый входной набор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  (буква входного алфавита  $E_2^m$ ) задает подстановку множества  $E_2^i$  всех наборов  $(q_1, q_2, \dots, q_i)$  (состояний

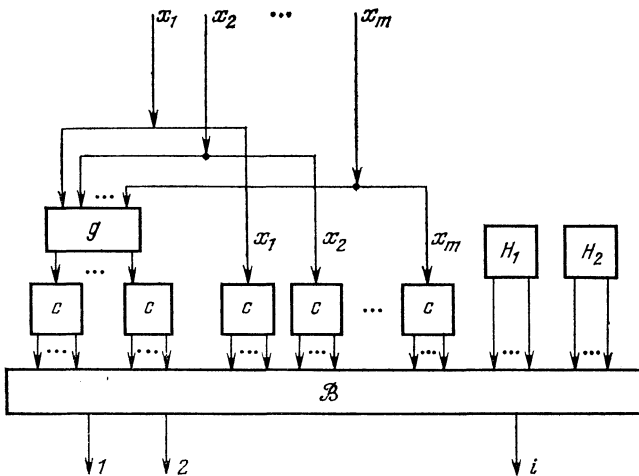


Рис. 2

о.-д. функции  $\mathcal{F}$ ). Ограниченно-детерминированная функция  $\mathcal{F}$  такова, что подстановки, задаваемые буквами входного алфавита, суть полная полугруппа подстановок множества  $E_2^i$ . Входное слово  $x(t+1)x(t+2)\dots x(t+m)$  также задает подстановку множества  $E_2^i$ . Пусть отображение  $\alpha: (E_2^m)^m \rightarrow E_2^m$  каждому входному слову длины  $m$  ставит в соответствие входную букву, задающую ту же самую подстановку. Через  $e$  обозначим входную букву, задающую тождественную подстановку.

Определим о.-д. функции  $u, v, w$ .

Ограниченно-детерминированная функция  $u(x)$  (сумматор) имеет  $m$  входов и  $m$  выходов, для  $x(t) \in E_2^m, t = 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots$

$$u(t) = \begin{cases} e & \text{при } t \neq lm, \\ \alpha(x(lm - m + 1) \dots x(lm)) & \text{при } t = lm. \end{cases}$$

Представим о.-д. функцию  $u(x)$  для наглядности в виде (3):

$t$	$x(t)$	$u(t)$
1	$x(1)$	$e$
2	$x(2)$	$e$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$x(m-1)$	$e$
$m$	$x(m)$	$\alpha(x(1) \dots x(m))$
$m+1$	$x(m+1)$	$e$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2m-1$	$x(2m-1)$	$e$
$2m$	$x(2m)$	$\alpha(x(m+1) \dots x(2m))$
$2m+1$	$x(2m+1)$	$e$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$3m-1$	$x(3m-1)$	$e$
$3m$	$x(3m)$	$\alpha(x(2m+1) \dots x(3m))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\left. \vphantom{\begin{matrix} t \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-1 \\ m \\ m+1 \\ \vdots \\ 2m-1 \\ 2m \\ 2m+1 \\ \vdots \\ 3m-1 \\ 3m \\ \vdots \end{matrix}} \right\} (3)$

Ограниченно-детерминированная функция  $v(a)$  имеет  $m$  входов и один выход, для  $a(t) = (a_1(t), \dots, a_m(t)) \in E_2^m$ ,  $t = 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots$ ,

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < m, \\ a_{s+1}(ml) & \text{при } t = ml + s, 0 \leq s < m. \end{cases}$$

Представим  $v(a)$  в виде (4):

$t$	$a(t)$	$v(t)$
1	$(a_1(1), \dots, a_m(1))$	0
2	$(a_1(2), \dots, a_m(2))$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$(a_1(m-1), \dots, a_m(m-1))$	0
$m$	$(a_1(m), \dots, a_m(m))$	$a_1(m)$
$m+1$	$(a_1(m+1), \dots, a_m(m+1))$	$a_2(m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2m-1$	$(a_1(2m-1), \dots, a_m(2m-1))$	$a_m(m)$
$2m$	$(a_1(2m), \dots, a_m(2m))$	$a_1(2m)$
$2m+1$	$(a_1(2m+1), \dots, a_m(2m+1))$	$a_2(2m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$3m-1$	$(a_1(3m-1), \dots, a_m(3m-1))$	$a_m(2m)$
$3m$	$(a_1(3m), \dots, a_m(3m))$	$a_1(3m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\left. \vphantom{\begin{matrix} t \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-1 \\ m \\ m+1 \\ \vdots \\ 2m-1 \\ 2m \\ 2m+1 \\ \vdots \\ 3m-1 \\ 3m \\ \vdots \end{matrix}} \right\} (4)$

Ограниченно-детерминированная функция  $w(b)$  имеет один вход и  $m$  выходов

$$w(t) = \begin{cases} e & \text{при } t \neq lm, l = 2, 3, \dots, t = m; \\ (b(lm - m), b(lm - m + 1), \dots, b(lm - 1)) & \\ \text{при } t = lm, l = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Представим  $w(b)$  в виде (5):

$t$	$b(t)$	$w(t)$
1	$b(1)$	$e$
2	$b(2)$	$e$
⋮	⋮	⋮
$m$	$b(m)$	$e$
$m + 1$	$b(m + 1)$	$e$
⋮	⋮	⋮
$2m - 1$	$b(2m - 1)$	$e$
$2m$	$b(2m)$	$(b(m), b(m + 1), \dots, b(2m - 1))$
$2m + 1$	$b(2m + 1)$	$e$
⋮	⋮	⋮
$3m - 1$	$b(3m - 1)$	$e$
$3m$	$b(3m)$	$(b(2m), b(2m + 1), \dots, b(3m - 1))$
$3m + 1$	$b(3m + 1)$	$e$
⋮	⋮	⋮

} (5)

Рассмотрим о.-д. функцию  $g$ , реализуемую схемой (рис. 3).  
**ЛЕММА 2.** Ограниченно-детерминированная функция  $g$  копирует о.-д. функцию  $\mathcal{F}$ .

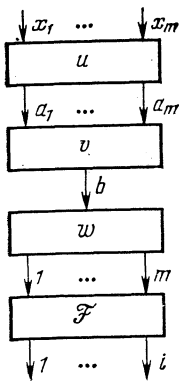


Рис. 3

Доказательство. Покажем, что для любой входной последовательности

$$x(1) x(2) \dots x(t) \\ g(lm + m + 1) = \mathcal{F}(lm + 1)_s$$

где  $lm + m + 1 \leq t, l = 1, 2, \dots$

Таблица выходных значений о.-д. функций  $u, v, w$ , в схеме (рис. 3) для последовательности  $x(1) x(2) \dots x(t)$  имеет вид (6). Здесь  $\alpha(x(sm + 1) \dots x(sm + m)) = (\alpha_1(x(sm + 1) \dots x(sm + m)), \alpha_2(x(sm + 1) \dots x(sm + m)), \dots, \alpha_m(x(sm + 1) \dots x(sm + m)))$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots, g(2m + 1)$  — это состояние, в которое перейдет о.-д. функция  $\mathcal{F}$  в схеме (рис. 3) после подачи слова  $ee \dots$

$\dots e\alpha(x(1) \dots x(m))$  или, согласно определению функции  $\alpha: (E_2^m)^m \rightarrow E_2^m$ , слова  $x(1) \dots x(m)$ . Значит,  $g(2m + 1) =$

$= \mathcal{F}(m+1)$ :

$t$	$u(t)$	$v(t)$	$w(t)$
1	$e$	0	$e$
2	$e$	0	$e$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$e$	0	$e$
$m$	$\alpha(x(1) \dots x(m))$	$\alpha_1(x(1) \dots x(m))$	$e$
$m+1$	$e$	$\alpha_2(x(1) \dots x(m))$	$e$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2m-1$	$e$	$\alpha_m(x(1) \dots x(m))$	$e$
$2m$	$\alpha(x(m+1) \dots x(2m))$	$\alpha_1(x(m+1) \dots x(2m))$	$\alpha(x(1) \dots x(m))$
$2m+1$	$e$	$\alpha_2(x(m+1) \dots x(2m))$	$e$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$3m-1$	$e$	$\alpha_m(x(m+1) \dots x(2m))$	$e$
$3m$	$\alpha(x(2m+1) \dots x(3m))$	$\alpha_1(x(2m+1) \dots x(3m))$	$\alpha(x(m+1) \dots x(2m))$
$3m+1$	$e$	$\alpha_2(x(2m+1) \dots x(3m))$	$e$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(6)

Далее,  $g(3m+1)$  — это состояние о.-д. функции  $\mathcal{F}$  после подачи слова  $ee \dots e\alpha(x(1) \dots x(m))e \dots e\alpha(x(m+1) \dots x(2m))$  или слова  $x(1) \dots x(m)x(m+1) \dots x(2m)$ , значит,  $g(3m+1) = \mathcal{F}(2m+1)$ , и т. д. Получим, что  $g(lm+m+1) = \mathcal{F}(lm+1)$ . Лемма 2 доказана.

Заметим, что о.-д. функция  $g$  получается суперпозицией о.-д. функций  $u(v(x_1, \dots, x_m))$  и одноместной о.-д. функции  $\mathcal{F}(w(b))$  (рис. 3). Ограниченно-детерминированные функции  $u$  и  $v$  могут быть выражены через одноместные о.-д. функции и булевские функции.

ЛЕММА 3.  $u \in [K \cup O \cup \{d\}]$ .

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

ЛЕММА 4.  $v(a_1, \dots, a_m) \in [K \cup O \cup \{d\}]$ .

Доказательство. Пусть о.-д. функция  $H(x, y)$

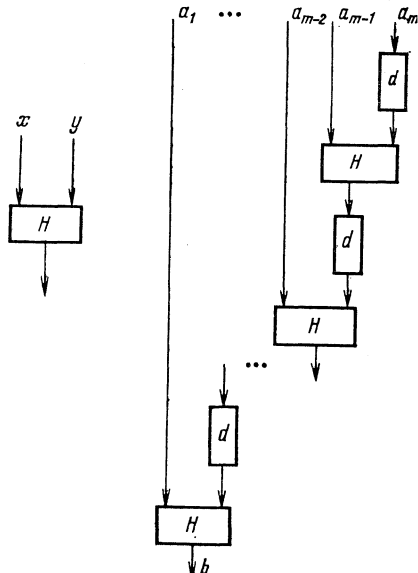


Рис. 4



(рис. 4) задается уравнениями

$$H(t) = \begin{cases} y(t) & \text{при } t \neq ml, l = 1, 2, \dots; \\ x(t) & \text{при } t = ml, l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ограниченно-детерминированная функция  $H$  может быть выражена через константную о.-д. функцию и булевские функции. Схема (рис. 4, справа) реализует о.-д. функцию  $v$ . Лемма 4 доказана.

Поскольку «задержка»  $d$  является одноместной функцией и константные о.-д. функции можно считать одноместными.

ЛЕММА 5.  $\mathcal{F} \in [P_1 \cup O]$ .

Система  $F$  полна и каждую ее о.-д. функцию можно выразить через одноместные о.-д. функции и булевские функции. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 1.  $P = [P_1 \cup O]$ .

На основании теоремы 1 можно доказать теорему 2.

ТЕОРЕМА 2. Класс  $[K \cup O \cup \{d, f_1\}]$  не содержится ни в одном предполном классе о.-д. функций.

Московский государственный  
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило  
24.06.87

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985. С. 151—174.
- [2] Марченков С. С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций // Проблемы кибернетики. 1980. Вып. 37. С. 5—17.
- [3] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 13. С. 45—74.