И. В. Богомолова, О конечной базируемости некоторых систем тождеств Ли по модулю тождеств Капелли,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 4, 24–29

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_k, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-i}, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}) \neq$$

$$\neq \Phi(a_1', a_2', \ldots, a_k', \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-i}, 1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1})$$

и, перерабатывая последовательности $\theta_1(\theta_2(\ldots\theta_k, \theta_1'(\theta_2'(\ldots\theta_k'$, автомат A переходит в отличимые состояния. Таким образом, рассматриваемый автомат имеет не менее 2^k попарно отличимых состояний и реализуется схемой, содержащей не менее $k \geqslant n$ задержек.

Множество M_n всех формул длины не большей n, не оканчивающихся знаком \, разобьем на два подмножества $M_n^{(0)}$, $M_n^{(1)}$ формул, принимающих значения 0 и 1 соответственно.

Рассмотрим автомат (V, Q, φ, q_0, Q'),

$$|Q| \leqslant 3 + |V| + |V|^2 + \ldots + |V|^{n-1}, \ \varphi(\setminus, 1) = 0, \ \varphi(\setminus, 0) = 1,$$

который после обработки любой последовательности из $M_n^{(i)}$ переходит в состояние i, $i=0, 1$. Этот автомат вычисляет все формулы над Ω длины не большей n и реализуется схемой с $n|V|$ задержками. Соотношение 1 доказано.

Пусть при построении отрицания выражений используются скобки. Добавим в R_0 операцию взятия левого отрицания, а во всех множествах заключим в скобки операции отрицания. Тогда теорема остается справедливой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kleene S. C. Mathematical logic. N. Y.; London; Sydney, 1967.
2. Gill A. Introduction to the theory of finite-state machines. N. Y., 1962.
3. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М., 1985.
4. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic//Ann. Math. Stud. 1941. N 5.

Поступила в редакцию
03.05.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 519.4

И. В. Богомолова

О КОНЕЧНОЙ БАЗИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ТОЖДЕСТВ ЛИ ПО МОДУЛЮ ТОЖДЕСТВ КАПЕЛЛИ

В статье [1] В. В. Стовба установил конечную базируемость системы тождеств Капелли произвольного фиксированного порядка над полем нулевой характеристики. Целью настоящей работы является распространение методов и результатов Стовбы на более общий случай.

Отметим, что полученные в данной статье результаты позволяют уточнить доказательство С. П. Мищенко конечной базируемости одного из многообразий Ли почти полиномиального роста (см. [2, § 6, предложение 6.1]).

В обозначениях и терминологии будем стремиться следовать [1];

все основные определения и факты, используемые в статье, читатель найдет в [2—4].

Пусть $\Gamma^+(X)$ — свободная полугруппа с множеством свободных образующих X, которое предполагается в дальнейшем счетным; $A^+(X)$, $L(X)$ — свободные ассоциативная и лиева алгебры над некоторым полем K с тем же множеством свободных образующих; $\Gamma(X)$ и $A(X)$ получаются из $\Gamma^+(X)$ и $A^+(X)$ присоединением единицы 1, отождествляемой с пустым словом; $K[t_1, ..., t_m]$ — алгебры коммутативных ассоциативных многочленов от m переменных с единицей. Для произвольных $b_1, b_2, ..., b_s \in L(X)$ $b_1 b_2 ... b_s$ обозначает левонормированный коммутатор

$$(\ldots((b_1 b_2) b_3) \ldots b_{s-1}) b_s;$$

S_m — симметрическая группа степени m с единицей ε.

Теорема 1. *Пусть m — произвольное натуральное число, K — поле нулевой характеристики, H — произвольная подгруппа группы S_m, $q \to q_\sigma$ — гомоморфизм из H в мультипликативную группу поля K. Тогда набор тождеств Ли*

$$\sum_{\sigma \in H} q_\sigma (C_1 z_{\sigma(1)} C_2 z_{\sigma(2)} \ldots z_{\sigma(m)} C_{m+1}) \equiv 0, \tag{1}$$

где $C_1, C_2, ..., C_{m+1}$ пробегают множество $A(X)$, конечно базируем.

Замечание 1. Отличие сформулированной теоремы от результата [1] заключается в том, что в [1] $H = S_m$.

Доказательство теоремы 1. По существу нам нужно обосновать возможность замены в рассуждениях [1] группы S_m на ее произвольную подгруппу H. Нетрудно убедиться, что указанная замена, будучи чисто формальной, проходит всюду, исключая один переход, к обоснованию которого и сводится фактически наше доказательство.

Во-первых, следуя [1, лемма 1], мы можем заменить систему тождеств (1) на эквивалентную ей систему тождеств

$$\sum_{\sigma \in H} q_\sigma ((z_{\sigma(1)} b_1)(z_{\sigma(2)} b_2) \ldots (z_{\sigma(m)} b_m)) \equiv 0,$$

где $b_1, b_2, ..., b_m$ пробегают $\Gamma(X)$.

Во-вторых, положив $A_m(X) = A(X) \otimes_K \ldots {}_K\otimes A(X)$ и обозначив через $A_m(X)H$ свободный левый модуль над $A_m(X)$, свободными образующими которого являются элементы группы H, мы задаем на этом модуле бинарную операцию $*$ по правилу

$$(a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \sigma) * (b_1 \otimes \ldots \otimes b_m \tau) = a_1 b_{\sigma(1)} \otimes \ldots a_m b_{\sigma(m)} (\tau\sigma),$$

превращающую $A_m(X)H$ в алгебру. Следуя [1], определяем K-линейный оператор $\varphi : A_m(X)H \to L(X \cup \{z_1, ..., z_m\})$ по правилу

$$\varphi(b_1 \otimes \ldots \otimes b_m \sigma) = (z_{\sigma^{-1}(1)} b_{\sigma^{-1}(1)}) \ldots (z_{\sigma^{-1}(m)} b_{\sigma^{-1}(m)}).$$

В-третьих, опять же аналогичным образом доказываем обобщение леммы 2 из [1], а именно если левый идеал I алгебры $A_m(X)H$ порождается множеством V, то из $\varphi(V)$ следует каждое из тождеств $\varphi(I)$.

Положим

$$\zeta(a_1, \ldots, a_m) = \left(\sum_{\sigma \in H} q_{\sigma^{-1}} (1 \otimes \ldots \otimes 1) \sigma\right) * (a_1 \otimes \ldots \otimes a_m \varepsilon),$$

$$\xi(a_1, \ldots, a_m) = \varphi(\zeta(a_1, \ldots, a_m)).$$

Итак, нам требуется доказать конечную базируемость системы тождеств

$$\xi(a_1, \ldots, a_m) \equiv 0, \tag{2}$$

где $a_1, \ldots, a_m$ пробегают $\Gamma(X)$.

Вслед за [1] установим, что всякое тождество системы (2) получается из набора тождеств этой же системы, определяемого тем условием, что степень каждого из элементов $a_1, \ldots, a_m$ не превосходит $m-1$, что и завершит доказательство нашей теоремы.

Вычисления, вполне аналогичные проведенным в [1], показывают, что

$$\sum_{\tau\in H} \xi(b_{\tau^{-1}(1)} a_1, \ldots, b_{\tau^{-1}(m)} a_m) =$$

$$=\varphi\left(\sum_{\sigma\in H} q_{\sigma^{-1}}(1\otimes\ldots\otimes 1)\,\sigma * (b_1\otimes\ldots\otimes b_m\varepsilon * \zeta(a_1, \ldots, a_m))\right),$$

так что тождество

$$\sum_{r\in H} \xi(b_{\tau^{-1}(1)} a_1, \ldots, b_{\tau^{-1}(m)} a_m) \equiv 0$$

является следствием тождества $\xi(a_1, \ldots, a_m) \equiv 0$.

Пусть y — произвольная переменная из X. Определим действие $K[t_1, \ldots, t_m]$ на $\xi(a_1, \ldots, a_m)$ сначала для одночленов по правилу

$$t_1^{\alpha_1} \ldots t_m^{\alpha_m} \circ \xi(a_1, \ldots, a_m) = \xi(y^{\alpha_1} a_1, \ldots, y^{\alpha_m} a_m),$$

а затем распространим его на все $K[t_1, \ldots, t_m]$ по линейности.

Пусть $s_1=t_1+\ldots+t_m$, $s_2=t_1t_2+\ldots+t_1t_m+\ldots+t_{m-1}t_m, \ldots$, $s_m=t_1t_2\ldots$ $\ldots t_m$ — элементарные симметрические многочлены. Наша ближайшая цель — показать, что для любого $n=1, 2, \ldots, m$ тождество $s_n\circ\xi(a_1, \ldots, a_m)$ следует из тождества $\xi(a_1, \ldots, a_m) \equiv 0$.

Положим $M=\{U\subset\{1, 2, \ldots, m\} \mid \operatorname{card} U=n\}$ и для произвольных $U\in M$ и $\tau\in H$

$$\lambda_t(U) = \xi(b_{\tau^{-1}(1)} a_1, \ldots, b_{\tau^{-1}(m)} a_m),$$

где $b_i=y$ при $i\in U$ и $b_i=1$ при $i\notin U$,

$$\lambda(U) = \sum_{\tau\in H} \lambda_\tau(U).$$

Теперь достаточно доказать, что $s_n\circ\xi(a_1, \ldots, a_m)$ представляется над $\mathbf{Q}$ в виде линейной комбинации элементов вида $\lambda(U)$. Этот переход, очевидный в [1], в нашем случае несколько сложнее: по существу, именно (и только) в этом пункте наши рассуждения отличаются от доказательства работы [1].

Итак, группа H, действуя на M, относительно своего действия разбивает M на орбиты. Выбрав в каждой орбите по представителю, получим набор множеств $U_1, \ldots, U_k$. Поскольку $\lambda_\tau(U)=\lambda_\varepsilon(\tau^{-1}U)$, то

$$\lambda(U) = \sum_{\tau\in H} \lambda_\varepsilon(\tau^{-1}U) = \sum_{V\in\operatorname{Orb}U}\ \sum_{\tau\in H:\,\tau V=V} \lambda_\varepsilon(V)$$

(здесь через $\operatorname{Orb} U$ обозначена орбита U).

В силу того что для любого $V\in\operatorname{Orb} U$ подгруппы $\{\tau\in H \mid \tau V=V\}$, будучи сопряженными, имеют одинаковую мощность $r(U)$, получаем

$$\lambda(U)=r(U)\sum_{V\in \mathrm{Orb}\, U}\lambda_\varepsilon(V),$$

затем

$$\sum_{V\in \mathrm{Orb}\, U}\lambda_\varepsilon(V)=\frac{1}{r(U)}\lambda(U)$$

и, следовательно,

$$s_n\circ\xi(a_1,\ldots,a_m)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{V\in \mathrm{Orb}\, U_i}\lambda_\varepsilon(V)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r(U_i)}\lambda(U_i).$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство из [1] дословно: используя формулы Виета, выводим, что из набора тождеств $\xi(a_1,\ldots,a_m)\equiv 0$, $\xi(a_1,\ldots,a_{i-1},ya_i,a_{i+1},\ldots,a_m)\equiv 0,\ldots$, $\xi(a_1,\ldots,a_{i-1},y^{m-1}a_i,a_{i+1},\ldots,a_m)\equiv 0$ следует тождество $\xi(a_1,\ldots,a_{i-1},y^m a_i,a_{i+1},\ldots,a_m)\equiv 0$, линеаризуя которое по y получаем требуемое.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $k_1,\ldots,k_r$, $n_1,\ldots,n_s$ — произвольные заданные натуральные числа. Рассмотрим над полем нулевой характеристики систему всех тождеств Ли, каждое из которых (точнее, его левая часть) содержит r кососимметрических наборов переменных из $k_1,\ldots,k_r$ переменных и s симметрических наборов переменных из $n_1,\ldots,n_s$ переменных (мы предполагаем, что переменные из перечисленных наборов попарно различны). Тогда указанная система тождеств конечно базируема.*

Доказательство. Пусть $m=k_1+\ldots+k_r+n_1+\ldots+n_s$. Положим $H=S_{k_1}\times\ldots\times S_{k_r}\times S_{n_1}\times\ldots\times S_{n_s}\subset S_m$, предполагая, что S_{k_1} действует на $\{1,2,\ldots,k_1\}$, S_{k_2}—на $\{k_1+1,\ldots,k_1+k_2\}$ и т. д.

Для произвольного $\Theta=(\sigma_1,\ldots,\sigma_r,\ \tau_1,\ldots,\tau_s)\in H$ положив $q_\Theta=\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r)$, где через sgn обозначена четность подстановки, получим гомоморфизм $q:H\to\{\pm 1\}$.

Поскольку для произвольного тождества $f\equiv 0$ из указанной системы

$$\sum_{\Theta\in H} q_\Theta\Theta f=|S_{k_1}|\ \ldots\ |S_{n_s}|\, f,$$

то рассматриваемую систему тождеств можно заменить на эквивалентную

$$\sum_{\Theta\in H} q_\Theta(C_1 z_{\Theta(1)}C_2 z_{\Theta(2)}\ldots z_{\Theta(m)}C_{m+1})\equiv 0$$

($C_1,\ldots,C_{m+1}$ пробегают $A(X)$) и сослаться теперь на теорему 1. Следствие доказано.

Замечание 2. 1. Нетрудно заметить, что предложенные доказательства теоремы 1 и следствия 1 остаются истинными также и тогда, когда поле K имеет положительную характеристику $p\geqslant m$.

2. Теорему Стовбы можно рассматривать, очевидно, и как частный случай теоремы 1, и как частный случай следствия 1.

Перейдем теперь к проблеме конечной базируемости некоторых систем тождеств по модулю тождеств Капелли.

Рассмотрим всевозможные диаграммы Юнга d, содержащие l столбцов высоты k, т. е. фиксированный прямоугольник размера $k\times l$.

Определим две системы тождеств:

$$f_{\tau d}\equiv 0, \tag{3}$$

где τd пробегает множество таблиц Юнга, отвечающих диаграммам Юнга указанного выше вида, и

$$f(z_1, z_2, \dots, z_m)\equiv 0, \tag{4}$$

где f — произвольный полилинейный элемент $L(X)$, имеющий l кососимметрических наборов по k переменных в каждом, $m\geqslant kl$.

Теорема 2. *По модулю тождеств Капелли* $(k+1)$*-го порядка системы тождеств* (3) *и* (4) *эквивалентны.*

Замечание 3. 1. Выражение «по модулю» в утверждении теоремы 2 означает, что системы (3) и (4) рассматриваются в многообразии, определяемом тождествами Капелли $(k+1)$-го порядка.

2. В одну сторону утверждение теоремы можно усилить, сняв слова «по модулю», поскольку в силу результата С. П. Мищенко (см. [2, § 2, теорема 1.1]) всякое тождество системы (3) является линейной комбинацией с целочисленными коэффициентами тождеств системы (4).

Доказательство теоремы 2. Достаточно установить, что по модулю тождеств Капелли $(k+1)$-го порядка всякое тождество $f\equiv 0$ системы (4) следует из тождества системы (3).

Пусть u — сумма идемпотентов групповой алгебры $K[S_m]$, кратных элементам $e_{\tau d}$, таким, что d содержит прямоугольник $k\times l$ и имеет ровно k строк. Далее, пусть v — сумма идемпотентов, кратных элементам $e_{\tau d}$, таким, что d имеет не менее $k+1$ строк (иначе говоря, v состоит из слагаемых, порождающих систему тождеств Капелли $(k+1)$-го порядка). Наконец, пусть w — сумма идемпотентов, кратных элементам $e_{\tau d}$, отвечающим остальным диаграммам Юнга d.

Поскольку $\varepsilon=u+v+w$, то $f=uf+vf+wf$. По построению $vf\equiv 0$ принадлежит системе тождеств Капелли $(k+1)$-го порядка. Отметим далее, что диаграммы Юнга d, по которым строится w, имеют не более k строк и не содержат прямоугольник $k\times l$. Несложное рассуждение, основанное на «принципе ящиков» Дирихле, показывает, что при заполнении такой диаграммы Юнга числами 1, 2, ..., m хотя бы одна строка получающейся таблицы Юнга будет содержать пару чисел $i\neq j$, попадающих в одно из множеств $\{1, \dots, k\}$, $\{k+1, \dots, 2k\}, \dots, \{(l-1)k+1, \dots$ $\dots, lk\}$. Пусть λ — идемпотент, отвечающий такой таблице. Покажем, что $\lambda f=0$, положив для удобства $x=z_i$ и $y=z_i$. Поскольку x и y принадлежат одному и тому же кососимметрическому набору, то $\lambda f=h(x, y)$ кососимметричен по паре (x, y), т. е. $h(x, y)=-h(y, x)$. «Склеив» переменные в элементе λf построчно, мы получим $\overline{\lambda f}=h(x, x)$. Поскольку $h(x, x)=-h(x, x)$ и, следовательно, $h(x, x)=0$, имеем $\overline{\lambda f}=0$. Однако тождества $\lambda f\equiv 0$ и $\overline{\lambda f}\equiv 0$ эквивалентны.

Таким образом, $wf=0$, и по модулю тождеств Капелли $(k+1)$-го порядка $f=uf$. Но $uf\equiv 0$ следует из тождеств системы (5) по построению. Теорема доказана.

Следствие 2. *Система тождеств, отвечающих диаграммам Юнга, содержащим прямоугольник* $k\times l$, *является конечно базируемой по модулю тождеств Капелли* $(k+1)$*-го порядка.*

Доказательство непосредственно получается из следствия 1 и теоремы 2.

Замечание 4. Поскольку система тождеств Капелли $(k+1)$-го порядка сама по себе конечно базируема, то в соединении со следствием 2 мы получаем, что объединенная система, состоящая из тождеств, отвечающих диаграммам Юнга, содержащим прямоугольник $k \times l$, и тождеств Капелли $(k+1)$-го порядка, является конечно базируемой.

Замечание 5. Доказательство шпехтовости многообразия V_4, представленное С. П. Мищенко (см. [2, § 6, предложение 6.1]), изложено схематично и не содержит явного доказательства конечной базируемости тождеств, отвечающих диаграммам Юнга, содержащим прямоугольник 3×2, по модулю тождеств Капелли порядка 4. Следствие 2 закрывает этот пробел, уточняя, таким образом, упомянутое доказательство.

В заключение автор выражает сердечную признательность С. П. Мищенко за многочисленные советы и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стовба В. В. О конечной базируемости некоторых многообразий алгебр Ли и ассоциативных алгебр//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1982. № 2. 54—58.
2. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли//Успехи матем. наук. 1990. **45**, вып. 6 (276). 25—45.
3. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли М., 1985.
4. Ленг С. Алгебра. М., 1968.

Поступила в редакцию
22.05.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 517.95.956

Г. М. Кобельков, В. М. Староверов

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ОБОБЩЕННОЙ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть $(\mathbf{u}, p)$ — решение стационарной задачи Стокса

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где $(p, 1) \equiv \int\limits_{\Omega} p dx = 0$, а $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ — решение задачи

$$-\Delta \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \mathbf{f}, \ \varepsilon p_\varepsilon + \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0, \ \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Задача вида (2) называется ε-регуляризацией задачи (1). В [1, 2] доказано, что $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_1 + \|p_\varepsilon - p\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Более того, нетрудно показать, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}\|_1 + \|p_\varepsilon - p\| \leqslant c\varepsilon. \tag{3}$$

В [3] в задаче (1) вместо оператора Лапласа рассматривался квазилинейный эллиптический оператор $\operatorname{div}(\chi(|\nabla \mathbf{u}|)\nabla \mathbf{u})$, $\chi(t) \equiv 1 + k(t)$, причем допускался случай $\chi(t) \to \infty$ при $t \to 0$. Наряду с этой задачей рассматривалось уравнение со срезкой $\chi_\delta(t) = 1 + k_\delta(t) \equiv 1 + \min\{k(\delta), k(t)\}$ вместо χ. Было показано, что $\|\mathbf{u}_\delta - \mathbf{u}\|_1 + \|p_\delta - p\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

В настоящей работе исследуется более общий случай. А именно исследуется краевая задача Стокса с нелинейным оператором вместо