



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Макаров, Антинормы и автополярные многогранники,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 5, 1050–1064

<https://www.mathnet.ru/smj7814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

23 апреля 2025 г., 20:45:26



АНТИНОРМЫ И АВТОПОЛЯРНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

М. С. Макаров

Аннотация. Антиномы (однородные вогнутые функционалы на конусе) нашли множество применений в функциональном анализе, теории матриц и т. д. На антиномы переносятся некоторые результаты теории двойственности: неравенство Юнга, теорема Фенхеля — Моро и т. д. Однако одним из существенных отличий является существование бесконечного числа нетривиальных самодвойственных антином (для выпуклых норм только евклидова обладает этим свойством). Единичный шар такой нормы является автополярным множеством (совпадает со своей полярой). Известна полная классификация самодвойственных антином в \mathbb{R}_+^2 , среди которых есть и кусочно-линейные (полиэдральные). Существование таких антином в больших размерностях было сформулировано в виде открытой проблемы в 2021 г. В данной работе представлена конструкция полиэдральных антином в \mathbb{R}_+^d при любом $d \geq 3$. Единичные шары таких антином (автополярные бесконечные многогранники) могут иметь любое наперед заданное число вершин.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.512

Ключевые слова: выпуклая двойственность, многогранник, полярная, антинома, конус, конический многогранник.

1. Введение

Понятие антиномы в линейном пространстве было введено в [1] в 1990 г. Затем его независимо использовали в [2–6] при решении различных прикладных задач. Антинома — это положительно однородный вогнутый функционал, заданный на некотором конусе в \mathbb{R}^d , т. е. антинома является вогнутым аналогом нормы. Многие задачи теории функций и численного анализа приводят к данному понятию: устойчивость динамических систем [3, 4, 7–14], случайные матричные произведения [15–22], алгебры фон Неймана [2], теория операторов [23, 24] и т. д.

Множество экстремальных задач, возникающих в приложениях, приводят к необходимости перехода к двойственным задачам подобно тому, как происходит в выпуклой оптимизации. Вопрос состоит в том, каким образом этот переход может быть распространен на антиномы. Ни о каких прямых обобщениях речи идти не может, поскольку антинома не является выпуклой. Существует ряд свойств, принципиально отличающий их от выпуклых функций. Тем не менее оказывается, что результаты теории двойственности могут быть перенесены на антиномы после определенной модификации [7]. При этом будут выполняться аналоги многих теорем выпуклой теории: неравенство Йенсена, теорема Фенхеля — Моро, теоремы отделимости. Оказалось, однако, что в отличие от норм (где единственной

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

самодвойственной нормой является евклидова, см. предложение 1) существует множество различных самодвойственных антинорм. Например, в \mathbb{R}^2 существуют как гладкие, так и кусочно-линейные (полиэдральные) самодвойственные антинормы. Единичный шар в такой антинорме является автополярным коническим многогранником (см. разд. 2, 4, 5).

Полная классификация самодвойственных антинорм в \mathbb{R}^2 приведена в [5]. Однако при $d \geq 3$ ситуация значительно сложнее. Известно лишь одно семейство самодвойственных антинорм: $f(x) = \sqrt{d} \prod_{i=1}^d x_i^{p_i}$, где $\sum_{i=1}^d p_i = 1$ и $p_i \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, d$; а также «поднятие» самодвойственных антинорм меньших размерностей (см. разд. 3). Существование других самодвойственных антинорм, в частности полиэдральных, было оставлено в виде открытой проблемы [5]. В данной статье представлено ее решение и предьявлена конструкция, позволяющая строить автополярные многогранники с произвольным числом вершин в \mathbb{R}^d при любых $d \geq 3$.

Напомним некоторые определения. Здесь и далее символом (x^*, x) обозначается стандартное скалярное произведение векторов x и x^* в \mathbb{R}^d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G — подмножество \mathbb{R}^d . *Полярной* к G называется множество $G^* = \{x^* \in \mathbb{R}^d \mid (x^*, x) \leq 1 \forall x \in G\}$.

Множество G называется *автополярным*, если $G = G^*$.

Для удобства читателя приведем доказательство следующего известного утверждения.

Предложение 1. *Единственным автополярным множеством в \mathbb{R}^d является единичный евклидов шар.*

Доказательство. Пусть G — автополярное множество в \mathbb{R}^d . Тогда для каждого вектора $x \in G$ верно, что

$$(x, x) \leq \sup_{y \in G} (x, y) \leq 1.$$

Таким образом, $\|x\| = \sqrt{(x, x)} \leq 1$. Следовательно, G содержится в единичном шаре. Если единичный шар содержит некоторую точку z , не принадлежащую G , то для каждого вектора $x \in G$ имеем

$$(z, x) \leq \|z\| \cdot \|x\| \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Значит, $z \in G^*$, но тогда $z \in G$, так как G является автополярным множеством. Полученное противоречие завершает доказательство. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Антинормой* называется функция $f : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ со следующими свойствами. Для любых $x, y \in \mathbb{R}_+^d$

- (1) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\alpha > 0$;
- (2) $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$.

Антинормы могут быть определены не только на \mathbb{R}_+^d , но и на невырожденных выпуклых конусах. Однако не существует антинорм, определенных на всем \mathbb{R}^d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G — подмножество \mathbb{R}_+^d . *Антиполярной* к G называется множество $G^* = \{x^* \in \mathbb{R}_+^d \mid (x^*, x) \geq 1 \forall x \in G\}$.

Далее классическая полярна рассматриваться не будет, поэтому антиполярю будем для краткости называть просто *полярной*. Множества G со свойством $G = G^*$ (в смысле антиполярности) будем называть *автополярными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Коническим выпуклым телом* в \mathbb{R}_+^d называется выпуклое замкнутое и не содержащее 0 множество, которое с каждой своей точкой $x = (x_1, \dots, x_d)$ содержит все точки $y = (y_1, \dots, y_d)$ такие, что $y_i \geq x_i$ для всех $i = 1, \dots, d$.

Коническая выпуклая оболочка точек — наименьшее коническое выпуклое тело, содержащее эти точки.

Антимногогранник (или *конический многогранник*) — коническая выпуклая оболочка конечного числа точек. В дальнейшем будем называть их просто *многогранниками*.

Заметим, что конические многогранники задаются кусочно-линейными антинормами. Таким образом, конические выпуклые тела — это выпуклые неограниченные множества, которые с каждой своей точкой x содержат $x + \mathbb{R}_+^d$. Так же, как и в выпуклом анализе, есть прямая связь между коническими выпуклыми телами и антинормами. А именно, единичный шар в антинорме есть коническое выпуклое тело. Обратное соответствие возникает с помощью функционала Минковского. Если G — коническое выпуклое тело, то антинорма f_G задается следующей формулой:

$$f_G = \sup \left\{ \lambda : \frac{1}{\lambda} x \in G \right\}.$$

Как известно, в \mathbb{R}^d существует единственное выпуклое тело, совпадающее со своей полярной, — это единичный шар. Для антинорм на конусе подобных выпуклых тел много. Начнем с многоугольников в \mathbb{R}_+^2 .

2. Автополярные многоугольники в \mathbb{R}_+^2

Класс кусочно-линейных антинорм особенно важен, поскольку такие антинормы легко описываются. Кусочно-линейная антинорма имеет вид

$$f(x) = \min_{j=1, \dots, n} (a_j, x),$$

где a_j — неотрицательные векторы. Единичный шар в кусочно-линейной антинорме представляет собой конический многогранник. *Коническим многоугольником* будем называть двумерный конический многогранник.

Теорема о классификации автополярных множеств на плоскости из [5] позволяет получить явное построение всех автополярных конических многоугольников.

Рассмотрим следующую конструкцию, приведенную в [5]. Построим ломаную $A_{-k} \dots A_{-1} A_0 A_1 \dots A_{k-1}$ в \mathbb{R}_+^2 следующим образом.

Возьмем произвольную точку A_0 такую, что $|OA_0| = 1$ и A_0 не принадлежит координатным осям. Случай принадлежности координатной оси рассмотрен в примере 1. Проведем прямую через A_0 , ортогональную OA_0 , и возьмем на ней произвольную точку A_{-1} , отличную от A_0 . Опустим перпендикуляр из A_0 на OA_{-1} и возьмем произвольную точку A_1 на его продолжении через A_0 . Далее по индукции. Если точка A_j построена (предполагаем $j > 0$), то опускаем перпендикуляр из A_{-j} на OA_j и берем произвольную точку A_{-j-1} на его продолжении через A_{-j} . Если $j < 0$, то опускаем перпендикуляр из A_{-j-1} на OA_j и берем произвольную точку A_{-j} на его продолжении через A_{-j-1} (рис. 1).

На последнем шаге выбираем точку A_{-k} , $k > 0$, на координатной оси OY . Строим луч из точки A_{-k} параллельно оси OY и луч из точки A_{k-1} параллельно оси OX ; обозначим оба луча через $A_{-k}Y$ и $A_{k-1}X$ соответственно. Тогда

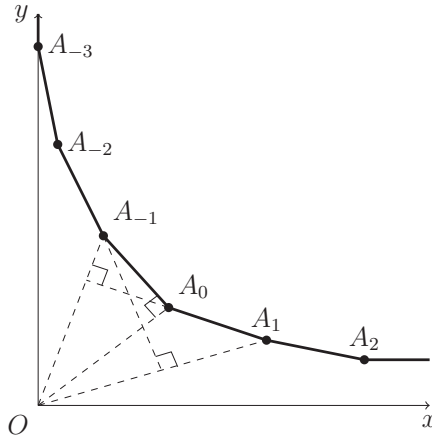


Рис. 1. Конструкция автополярного многоугольника для $k = 3$.

$YA_{-k} \dots A_{-1}A_0A_1 \dots A_{k-1}X$ — это искомый автополярный конический многоугольник.

Теорема 1 [5]. *Каждый автополярный конический многоугольник, имеющий не менее двух вершин, получается из приведенной выше конструкции.*

Для каждого k построенный конический многоугольник имеет $2k$ вершин (вершина A_{-k} на оси, а остальные вершины строго внутри \mathbb{R}_+^2) и $2k + 1$ сторон (стороны $A_{-k}Y$ и $A_{k-1}X$ являются лучами, а остальные — отрезками). Простейшие случаи описаны в следующих примерах.

ПРИМЕР 1 ($k = 0$). Этот случай формально не входит в нашу конструкцию, так как он описывает автополярный многоугольник с одной вершиной. Здесь $A_0 = (1, 0)$ и сторона A_0A_{-1} становится вертикальным лучом от A_0 . Таким образом, многоугольник имеет одну вершину A_0 и две стороны, которые являются лучами из A_0 , параллельными осям координат. Антинорма, задающая данный многоугольник, — это $f(x, y) = x$.

ПРИМЕР 2 ($k = 1$). В данном примере A_0 является внутренней точкой \mathbb{R}_+^2 , а точка A_{-1} лежит на оси OY так, что $\angle A_{-1}A_0O = \frac{\pi}{2}$. Тогда автополярный многоугольник ограничен лучами $A_{-1}Y$, A_0X и отрезком $A_{-1}A_0$. Если $A_0 = (a, b)$, то антинорма задается формулой $f(x, y) = \min(ax + by, \frac{y}{b})$.

3. Автополярные множества в \mathbb{R}_+^d

Несмотря на обилие автополярных множеств в \mathbb{R}_+^2 , вопрос о их существовании в \mathbb{R}_+^d при $d \geq 3$ неочевиден. Было известно только семейство $f(x) = \sqrt{d} \prod_{i=1}^d x_i^{p_i}$, где $\sum_{i=1}^d p_i = 1$, $p_i \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, d$, а также следующий простой пример построения автополярных множеств в больших размерностях.

Рассмотрим метод построения автополярных множеств, который будем называть *поднятием*. С помощью этого принципа можно построить автополярные многогранники в \mathbb{R}_+^d с любым числом вершин, но все эти вершины будут лежать в одной гиперплоскости.

Предложение 2. Пусть Δ_{d-1} — автополярное множество в гиперплоскости $Ox_1 \dots x_{d-1}$. Тогда множество Δ_d , построенное как цилиндр над Δ_{d-1} , также автополярное.

Доказательство. Покажем, что для всех $x, y \in \Delta_d$ верно $(x, y) \geq 1$. Действительно,

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d \geq x_1 y_1 + \dots + x_{d-1} y_{d-1} \geq 1.$$

Последнее неравенство верно в силу автополярности Δ_{d-1} . Значит, $\Delta_d \subset \Delta_d^*$.

Осталось показать обратное включение. Для каждой точки $u \notin \Delta_d$ найдем $v \in \Delta_d$ такую, что $(u, v) < 1$. Возьмем v , которая лежит в Δ_{d-1} . Тогда

$$(u, v) = u_1 v_1 + \dots + u_d \cdot 0 = u_1 v_1 + \dots + u_{d-1} v_{d-1} < 1.$$

Последнее неравенство верно, так как проекция u на гиперплоскость $Ox_1 \dots x_{d-1}$ лежит вне Δ_{d-1} . \square

Возникает вопрос о существовании других способов получения автополярных множеств из уже имеющихся. Например, можно рассмотреть прямое произведение двух автополярных множеств. Приведем пример, показывающий, что прямое произведение автополярных многогранников с одной вершиной в \mathbb{R}_+^2 может не быть автополярным.

Пример 3. Возьмем два автополярных многогранника $\Delta_1 = \Delta_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid x_1 \geq 1\}$. Рассмотрим их декартово произведение $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. Точка $p = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ не принадлежит Δ . Покажем, что $p \in \Delta^*$. Действительно, для любой точки $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Delta$

$$(x, p) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Значит, Δ не является автополярным.

В разд. 4.3, 4.4 и 5 будут приведены конструкции автополярных многогранников в \mathbb{R}_+^d , которые не получаются поднятием. Начнем с пространства \mathbb{R}_+^3 , а затем обобщим на любые \mathbb{R}_+^d .

4. Автополярные многогранники в \mathbb{R}_+^3

В данном разделе построим трехмерные автополярные многогранники, которые не являются поднятиями многогранников меньшей размерности.

Для удобства изложения введем следующие обозначения. Пусть для $i = 1, \dots, n$, где n обозначает количество вершин многогранника, X_i — вершина многогранника, X_i^* — поляр к точке X_i , π_i — плоскость, ограничивающая X_i^* , а для $i \neq 1$ имеем $l_i = \pi_i \cap \pi_{i-1}$, $X_i' = \pi_i \cap l_{i-1}$. Отметим, что под π_i и l_i подразумевается исключительно их пересечение с \mathbb{R}_+^3 .

Рассмотрим отдельно построение автополярных многогранников с малым числом вершин, а именно, меньшим или равным трем (размерности пространства).

4.1. Автополярный многогранник с одной вершиной.

Пример 4. Для точки $X_1 \in Oz : |OX_1| = 1$ многогранник Δ с вершиной X_1 и гранями, ограниченными плоскостями π_1, Oxz, Oyz , является автополярным (рис. 2).

Доказательство. Надо доказать, что $\Delta^* = \Delta$. Так как $|OX_1| = 1$, по определению поляры $X_1 \in \pi_1$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — грани Δ , лежащие соответственно

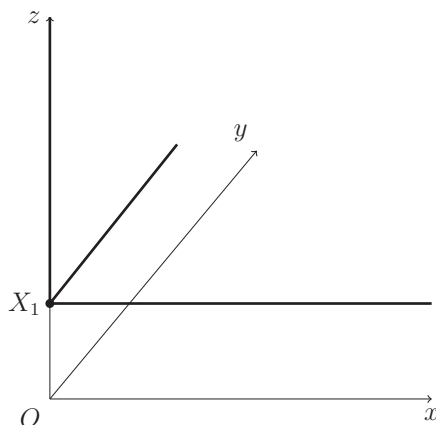


Рис. 2. Автополярный многогранник с одной вершиной.

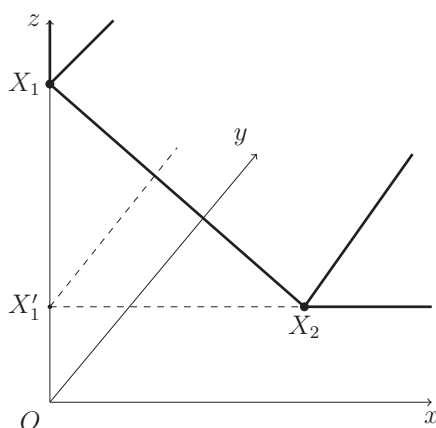


Рис. 3. Автополярный многогранник с двумя вершинами.

в плоскостях π_1, Oxz, Oyz . Рассмотрим их полярное преобразование. Все три грани перейдут в X_1^* .

Таким образом, $\Delta^* = \alpha_1^* \cap \alpha_2^* \cap \alpha_3^* = X_1^* = \Delta$. Значит, многогранник Δ автополярный. \square

4.2. Автополярный многогранник с двумя вершинами.

ПРИМЕР 5. Для любой точки $X_1 \in Oz : |OX_1| > 1$ и точки $X_2 \in l_1 = \pi_1 \cap Oxz$ такой, что $\angle OX_2X_1 = \frac{\pi}{2}$, многогранник Δ с вершинами X_1, X_2 и гранями, ограниченными плоскостями π_1, π_2, Oxz, Oyz , автополярный (рис. 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X'_1 = \pi_1 \cap Oz$. Сначала докажем, что $X_2 \in \pi_2$. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ΔOX_2X_1 и заметим, что $X_2X'_1$ — высота, так как $Oz \perp \pi_1$ по построению поляры X_1^* . Тогда $|OX_2| = \sqrt{|OX_1| \cdot |OX'_1|} = 1$. Отсюда следует, что $X_2 \in \pi_2$.

Так как $X_2 \in \pi_1$, по свойству поляр $X_1 \in \pi_2$, и тогда плоскость π_2 содержит X_2X_1 . Рассмотрим луч l_2 . Он перпендикулярен OX_2 по построению и Oz , поскольку лежит в π_1 , а значит, и всей плоскости Oxz . Таким образом, плоскость π_2 параллельна оси Oy . Полученные утверждения доказывают, что никаких других вершин, кроме X_1, X_2 , при построении не возникнет.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — грани Δ , лежащие соответственно в плоскостях π_1, π_2, Oz, Oyz . Рассмотрим их полярное преобразование. Грань α_1 перейдет в X_2^* , грани α_2 и α_3 перейдут в $X_1^* \cap X_2^*$, а α_4 — в X_1^* .

Таким образом, $\Delta^* = \alpha_1^* \cap \alpha_2^* \cap \alpha_3^* \cap \alpha_4^* = X_1^* \cap X_2^* = \Delta$. Значит, многогранник Δ автополярный. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Автополярные многогранники с одной и двумя вершинами являются поднятиями автополярных многогранников плоскости.

Для построения автополярного многогранника с тремя вершинами необходимо понятие ортоцентрического тетраэдра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Ортоцентрическим тетраэдром называется тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром.

Приведем теорему, описывающую свойства ортоцентрического тетраэдра, без доказательства.

Теорема 2. Пусть дан тетраэдр. Следующие три утверждения эквивалентны:

- (1) произвольная вершина проецируется в ортоцентр противоположной грани;
- (2) противоположные ребра перпендикулярны;
- (3) высоты пересекаются в одной точке.

4.3. Автополярный многогранник с тремя вершинами. Для следующих рассуждений необходимо доказать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть дан остроугольный треугольник ΔABC , O — его ортоцентр и l_O — луч, выходящий из O и перпендикулярный плоскости треугольника. Существует единственная точка $D \in l_O$ такая, что $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = \frac{\pi}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим сферу S^2 на BC как на диаметре. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ΔABC . Угол $\angle BC_1C = \frac{\pi}{2}$ опирается на BC , тогда $C_1 \in S^2$. Из этого следует, что $O \in CC_1$ лежит внутри сферы S^2 , а значит, луч l_O пересекает сферу в единственной точке. Обозначим ее через D .

Угол $\angle BDC$ равен $\frac{\pi}{2}$, так как опирается на диаметр BC . Докажем, что $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$:

$$AB \perp DO, AB \perp CC_1 \Rightarrow AB \perp (DOC) \Rightarrow AB \perp CD,$$

$$CD \perp AB, CD \perp BD \Rightarrow CD \perp (ABD) \Rightarrow CD \perp AD \Rightarrow \angle ADC = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично доказывается, что $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что если взять точку D' на интервале (OD) , то $\angle BD'C > \frac{\pi}{2}$, так как точка D' лежит внутри сферы S^2 . Если же взять точку D'' на луче $(D, +\infty) \subset l_O$, то $\angle BD''C < \frac{\pi}{2}$, так как точка D'' лежит вне сферы S^2 . Данное замечание доказывает, что других точек, удовлетворяющих условию, на луче l_O нет. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Тетраэдр $ABCD$ ортоцентрический с ортоцентром D .

Построение автополярного многогранника с тремя вершинами.

Пусть X_1 — произвольная точка на оси Oz такая, что $|OX_1| > 1$. К этой точке построим поляр X_1^* . На луче l_1 возьмем точку X_2 такую, что $\angle OX_2X_1 < \frac{\pi}{2}$. К этой точке построим поляр X_2^* . На луче l_2 возьмем точку X_3 такую, что

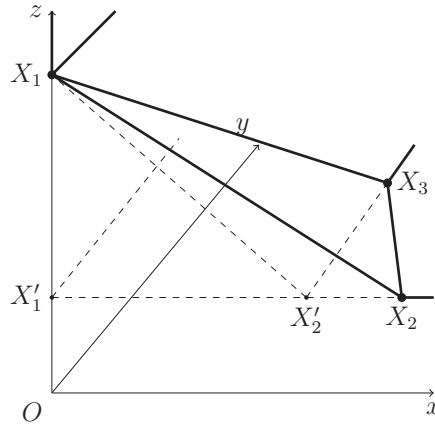


Рис. 4. Автополярный многогранник с тремя вершинами.

$\angle OX_3X_2 = \angle OX_3X_1 = \angle X_1X_3X_2 = \frac{\pi}{2}$ (существование такой точки будет следовать из леммы 1). К точке X_3 построим полярю X_3^* (рис. 4).

ПРИМЕР 6. Построенный многогранник Δ с вершинами X_1, X_2, X_3 и гранями, ограниченными плоскостями $\pi_1, \pi_2, \pi_3, Oxz, Oyz$, является автополярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим построение X_2^* . В треугольнике ΔOX_2X_1 проведем высоту X_1H_1 . Пусть $X_2'' = X_1H_1 \cap X_2X_1'$. Так как $X_2X_1' \perp OX_1$, то X_2'' — ортоцентр треугольника ΔOX_2X_1 . По свойству высот имеем

$$|OH_1| \cdot |OX_2| = |OX_1'| \cdot |OX_1| = 1 \Rightarrow H_1 \in \pi_2.$$

Так как $X_2 \in \pi_1$, то $X_1 \in \pi_2$ по свойству поляр. Получили, что $X_1, H_1 \in \pi_2$, и тогда $X_2'' \in \pi_2$. Из того, что $X_2'' \in l_1$ и $X_2'' \in \pi_2$, следует, что $X_2'' = X_2^*$.

Как и в случае построения многогранника с двумя вершинами, l_2 перпендикулярна плоскости Oxz . В частности, l_2 параллельна оси Oy . Так как ΔOX_2X_1 остроугольный, X_2' — его ортоцентр, а l_2 — луч, выходящий из X_2' и перпендикулярный плоскости (OX_2X_1) , то существование и единственность точки X_3 следует из леммы 1.

Докажем, что при построении плоскости π_3 новых вершин не возникнет. Во-первых, $X_1, X_2 \in \pi_3$, потому что $X_3 \in \pi_1$ и $X_3 \in \pi_2$. Во-вторых, из того, что ΔOX_3X_1 прямоугольный и X_3X_1' — его высота, следует, что

$$|OX_3| = \sqrt{|OX_1| \cdot |OX_1'|} = 1,$$

а значит, $X_3 \in \pi_3$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ — грани Δ , лежащие соответственно в плоскостях $\pi_1, \pi_2, \pi_3, Oxz, Oyz$. Рассмотрим их полярное преобразование: α_1 перейдет в $X_2^* \cap X_3^*$, α_2 перейдет в $X_1^* \cap X_3^*$, α_3 перейдет в $X_1^* \cap X_2^* \cap X_3^*$, α_4 перейдет в $X_1^* \cap X_2^*$, α_5 перейдет в X_1^* .

Таким образом, $\Delta^* = \alpha_1^* \cap \alpha_2^* \cap \alpha_3^* \cap \alpha_4^* \cap \alpha_5^* = X_1^* \cap X_2^* \cap X_3^* = \Delta$. Значит, многогранник Δ автополярный. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства предложения 6 следует, что для произвольной точки L , лежащей на интервале $(X_2'X_3)$, расстояние до точки O строго меньше единицы и угол OLX_2 острый, а для точки L , лежащей на луче $(X_3, +\infty) \subset l_2$, расстояние до точки O строго больше единицы и угол OLX_2 тупой.

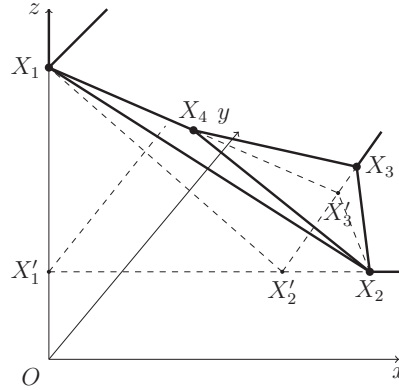


Рис. 5. Автополярный многогранник с $n = 4$ вершинами.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Построенный многогранник Δ — это первый пример автополярного многогранника, который не является цилиндром над автополярным многогранником плоскости, т. е. не является поднятием.

4.4. Автополярный многогранник с $n > 3$ вершинами.

Индуктивное построение. Пусть X_1 — произвольная точка на оси Oz такая, что $|OX_1| > 1$. К этой точке построим полярю X_1^* . На луче l_1 возьмем точку X_2 такую, что $\angle OX_2X_1 < \frac{\pi}{2}$. К этой точке построим полярю X_2^* . На луче l_2 возьмем точку X_3 такую, что $\angle OX_3X_2 < \frac{\pi}{2}$. К этой точке построим полярю X_3^* . Пусть уже построены $i - 1$ вершин. На интервале $(X'_{i-1}, X_{i-3}) \subset l_{i-1}$ возьмем точку X_i такую, что $\angle OX_iX_{i-1} < \frac{\pi}{2}$. К этой точке построим полярю X_i^* . На последнем шаге на интервале $(X'_{n-1}, X_{n-3}) \subset l_{n-1}$ возьмем точку X_n такую, что $\angle OX_nX_{n-1} = \angle OX_nX_{n-2} = \angle X_{n-2}X_nX_{n-1} = \frac{\pi}{2}$. К точке X_n построим полярю X_n^* (рис. 5 для $n = 4$).

Теорема 3. Построенный многогранник Δ с вершинами X_1, X_2, \dots, X_n и гранями, ограниченными плоскостями $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, Oxz, Oyz$, является автополярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый и второй пункты построения выполнены согласно примеру 6. Рассмотрим построение X_3^* . Так как $X_3 \in l_2 = \pi_1 \cap \pi_2$, то плоскость π_3 проходит через точки X_1, X_2 . Точка $X'_3 = \pi_3 \cap l_2$ лежит на интервале (X'_2, X_3) и угол OX'_3X_2 тупой в силу замечания 3. Отметим также, что ΔOX_2X_3 остроугольный, потому что угол $\angle OX_3X_2$ острый по выбору точки X_3 ; угол $\angle X_3OX_2$ острый, поскольку угол с вершиной O не может быть тупым в \mathbb{R}^3_+ ; угол $\angle OX_2X_3$ острый, так как X_2 лежит на l_2 между точками X'_3 и X_0 и угол $\angle OX_2X'_3$ острый, а $\angle OX_2X_0$ прямой, где за X_0 взята точка на l_2 , лежащая на бесконечности.

Докажем, что на интервале (X'_3, X_1) существует точка X_4 , удовлетворяющая индуктивному построению. Обозначим $H_3 = X_1X'_3 \cap (OX_2X_3)$. Верно следующее:

$$OX_2 \perp (X_1X'_3X_3) = \pi_2 \Rightarrow OX_2 \perp X_1X'_3,$$

$$X_1X'_3 \perp OX_2, X_1X'_3 \perp OX_3 \text{ (так как } X_1X'_3 \in \pi_3) \Rightarrow X_1X'_3 \perp (OX_2X_3).$$

Из того, что $X_3H_3 \perp OX_2$ (так как $X_3H_3 \in \pi_2$) и $X_2H_3 \perp OX_3$ (так как $X_2H_3 \in \pi_3$), следует, что точка H_3 , из которой выпущен луч $l_{H_3} \subset l_3$, перпендикулярный плоскости (OX_2X_3) , является ортоцентром остроугольного треугольника ΔOX_2X_3 . В силу леммы 1 на луче l_{H_3} существует точка X_4 , удовлетворяющая

индуктивному построению. Так как угол OX'_3X_2 больше $\frac{\pi}{2}$, а угол OX_1X_2 меньше $\frac{\pi}{2}$, точка X_4 лежит на интервале (X'_3X_1) . Если $X_4 = X_n$, то точка X_4 выбрана так, чтобы $\angle OX_4X_3 = \angle OX_4X_2 = \angle X_2X_4X_3 = \frac{\pi}{2}$. Если же X_n не последняя вершина, то она выбрана так, что $\angle OX_4X_3 < \frac{\pi}{2}$.

Обобщим полученные результаты. Их доказательство полностью совпадает с первыми двумя абзацами, в которых рассмотрен случай $i = 3$. Получаем, что для всех $i = 3, \dots, n - 1$ верно, что

- 1) плоскость π_i проходит через точки X_{i-1}, X_{i-2} ;
- 2) точка X'_i лежит на интервале (X'_{i-1}, X_i) ;
- 3) треугольник ΔOX_iX_{i-1} остроугольный для $i > 3$; угол $\angle OX_{i-1}X_i$ острый, так как точка X_i лежит на отрезке $[X_{i-3}, X'_i]$ и углы $\angle OX_{i-1}X_{i-3}$, $\angle OX_{i-1}X'_i$ острые; для $i = 3$ очевидно;
- 4) точка $H_i = X_{i-2}X'_i \cap (OX_{i-1}X_i)$ является ортоцентром треугольника $\Delta OX_{i-1}X_i$;
- 5) луч $l_{H_i} \subset l_i$ перпендикулярен плоскости $(OX_{i-1}X_i)$;
- 6) на луче l_{H_i} существует точка X_{i+1} , удовлетворяющая либо j -му шагу ($3 < j < n$), либо n -му шагу построения.

Покажем, что плоскость π_n проходит через точку X_n . Для этого докажем, что $|OX_n| = 1$. Так как H_{n-1} — ортоцентр треугольника $\Delta OX_{n-2}X_{n-1}$, то $X_{n-2}H_{n-1} \perp OX_{n-1}$. Из того, что $X_{n-3}H_{n-1} \perp (OX_{n-2}X_{n-1})$, следует, что $OX_{n-1} \perp (X_{n-3}X_{n-2}H_{n-1})$. Поскольку π_{n-1} проходит через точки X_{n-2}, X_{n-3} и перпендикулярна OX_{n-1} , то π_{n-1} есть в точности $(X_{n-3}X_{n-2}H_{n-1})$. Пусть $L = \pi_{n-1} \cap OX_{n-1}$, тогда $|OL| \cdot |OX_{n-1}| = 1$ по определению поляры. Рассмотрим треугольник $\Delta OX_{n-1}X_n$. Он прямоугольный, X_nL — высота, а значит, $|OX_n| = \sqrt{|OL| \cdot |OX_{n-1}|} = 1$. Итак, плоскость π_n проходит через точки X_{n-2}, X_{n-1}, X_n .

Докажем автополярность построенного многогранника Δ . Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ — грани Δ , лежащие соответственно в плоскостях $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, Oxz, Oyz$. Рассмотрим их полярное преобразование. Заметим, что по построению для всех $i = 3, \dots, n - 2$ грань α_i есть выпуклая оболочка вершин $X_{i-2}, X_{i-1}, X_{i+1}, X_{i+2}$, а значит,

$$\alpha_i^* = X_{i-2}^* \cap X_{i-1}^* \cap X_{i+1}^* \cap X_{i+2}^*.$$

Рассмотрим поляры оставшихся граней:

$$\alpha_1^* = X_2^* \cap X_3^*, \quad \alpha_2^* = X_1^* \cap X_3^* \cap X_4^*, \quad \alpha_{n-1}^* = X_{n-3}^* \cap X_{n-2}^* \cap X_n^*,$$

$$\alpha_n^* = X_{n-2}^* \cap X_{n-1}^* \cap X_n^*, \quad \alpha_{n+1}^* = X_1^* \cap X_2^*, \quad \alpha_{n+2}^* = X_1^*.$$

Таким образом,

$$\Delta^* = \bigcap_{i=1}^{n+2} \alpha_i^* = \bigcap_{i=1}^n X_i^* = \Delta.$$

Значит, многогранник Δ автополярный. Теорема доказана. \square

5. Автополярные многогранники в \mathbb{R}_+^d

Перед тем, как строить автополярные многогранники в многомерном пространстве, сформулируем и докажем два условия автополярности. Положительный ортант будем рассматривать с координатами y_1, \dots, y_d .

Предложение 3. Если многогранник Δ автополярный, то он не может лежать строго внутри положительного ортанта \mathbb{R}_+^d .

Доказательство. Предположим противное. Пусть все точки многогранника имеют все ненулевые координаты. Так как Δ является замкнутым множеством, а множество значений координаты y_d ограничено снизу нулем, можно выбрать точку A , которая имеет наименьшую последнюю координату. Пусть ее значение a . Докажем, что точка $B = (0, \dots, 0, \frac{1}{a})$ принадлежит Δ^* . Действительно, если обозначить через Y^k k -ю координату точки Y , то для всех точек Y , принадлежащих Δ , имеем

$$(OB, OY) = \frac{1}{a} \cdot Y^d \geq \frac{1}{a} \cdot A^d \geq \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

Таким образом, $B \in \Delta^*$ и $B \notin \Delta$ по предположению. Получили противоречие, так как многогранник автополярный, а значит, $\Delta^* = \Delta$. \square

Как известно, у автополярных множеств существует единственная ближайшая к началу координат точка, т. е. точка, расстояние до которой равно 1.

Предложение 4. Если многогранник Δ автополярный, то его единственной ближайшей к началу координат точкой может быть только вершина.

Доказательство. Предположим противное. Пусть X — ближайшая точка, не являющаяся вершиной. Тогда найдется отрезок AB , который принадлежит Δ и для которого точка X является серединой.

Дальнейшее рассуждение проведем в плоскости OAB и покажем, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой l , являющейся пересечением плоскости OAB и гиперплоскости, ограничивающей поляру к точке B . Это будет означать, что точки A и B не могут одновременно принадлежать $\Delta^* = \Delta$.

В силу того, что X является ближайшей точкой, OX перпендикулярно AB . Пусть XH — высота в прямоугольном треугольнике $\triangle OXB$. Тогда

$$1 = |OX| = \sqrt{|OH| \cdot |HB|} \Rightarrow |OH| \cdot |HB| = 1 \Rightarrow XH = l.$$

Но точки A и B лежат по разные стороны от прямой XH . \square

Чтобы обобщить трехмерную конструкцию автополярных многогранников на многомерный случай, введем понятие ортоцентрического n -мерного симплекса и выясним его свойства. Приведем индуктивное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. 3-Мерным ортоцентрическим симплексом будем называть ортоцентрический тетраэдр. Пусть уже определен k -мерный ортоцентрический симплекс с вершинами A_1, \dots, A_{k+1} . Определим $(k+1)$ -мерный ортоцентрический симплекс с вершинами $A_1, \dots, A_{k+1}, A_{k+2}$ таким образом, чтобы симплекс T с вершинами A_1, \dots, A_{k+1} был ортоцентрическим, а вершина A_{k+2} проецировалась в ортоцентр T . Ортоцентр определяется как пересечение высот, и его существование будет следовать из теоремы, приведенной ниже.

Свойства ортоцентрического симплекса описаны в следующей теореме, которая является многомерным аналогом теоремы 2.

Теорема 4. Пусть дан симплекс T в \mathbb{R}^d с вершинами A_1, \dots, A_{d+1} . Следующие три утверждения эквивалентны:

- (1) T — ортоцентрический симплекс;
- (2) для всех $k = 2, \dots, d$ и для всех $\sigma \in S_{d+1}$ выпуклые оболочки $\langle A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(k)} \rangle$ и $\langle A_{\sigma(k+1)}, \dots, A_{\sigma(d+1)} \rangle$ перпендикулярны;
- (3) высоты T пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром T .

Следствие 1. Все k -мерные грани n -мерного ортоцентрического симплекса сами являются k -мерными ортоцентрическими симплексами. В частности, все вершины ортоцентрического симплекса проецируются в ортоцентр противоположащей грани.

Сформулируем и докажем многомерный аналог леммы 1.

Лемма 2. Пусть дан ортоцентрический симплекс $A_1A_2 \dots A_d$ с ортоцентром O в $(d - 1)$ -мерной гиперплоскости в \mathbb{R}^d такой, что точка O лежит во внутренней гиперплоскости. Восстановим луч l_O в точке O , перпендикулярный к данной гиперплоскости. Тогда на луче l_O существует единственная точка M такая, что $\angle A_iMA_{i+1} = \angle A_dMA_1 = \frac{\pi}{2}$ для всех $i = 1, \dots, d - 1$.

Доказательство. Построим $(d - 1)$ -мерную сферу S^{d-1} на A_1A_2 как на диаметре. Пусть A_1H — высота симплекса, тогда $\angle A_1HA_2$ опирается на A_1A_2 и равен $\frac{\pi}{2}$, а значит, $H \in S^{d-1}$. Следовательно, точка O лежит внутри сферы, и луч l_O пересекает сферу в единственной точке. Обозначим ее через M .

Докажем утверждение леммы по индукции. База индукции: $\angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{2}$. Предположим, что $\angle A_iMA_{i+1} = \frac{\pi}{2}$, и покажем, что $\angle A_{i+1}MA_{i+2} = \frac{\pi}{2}$. Из теоремы 4 следует, что $A_1A_2 \dots A_dM$ — ортоцентрический симплекс, так как M проецируется в O . Из той же теоремы следует, что $A_{i+1}M \perp A_iA_{i+2}$. По предположению индукции $A_{i+1}M \perp A_iM$, а значит, $A_{i+1}M \perp (A_iMA_{i+2})$ и $\angle A_{i+1}MA_{i+2} = \frac{\pi}{2}$. Аналогичный переход можно сделать от угла $\angle A_{d-1}MA_d$ к углу $\angle A_dMA_1$. Лемма доказана. \square

Замечание 5. Получившийся в ходе доказательства леммы симплекс $A_1A_2 \dots A_dM$ является d -мерным ортоцентрическим симплексом с ортоцентром M .

Замечание 6. Для всякой точки M' на луче l_O симплекс $A_1 \dots A_dM'$ ортоцентрический по теореме 4 и его ортоцентр лежит на l_O . При этом верен следующий факт. Если двигать точку M' от M к O по интервалу (OM) , то ортоцентр симплекса будет двигаться от M к бесконечности по лучу l_O . Если, наоборот, двигать точку M' от M к бесконечности по лучу l_O , то ортоцентр симплекса будет двигаться от M к O по интервалу (OM) .

Перейдем к построению автополярных многогранников в \mathbb{R}_+^d . Построение будем вести по индукции, считая, что уже умеем строить автополярные многогранники меньших размерностей с любым числом вершин. Базой индукции будут служить рассмотренные выше примеры в \mathbb{R}_+^3 .

Введем обозначения, аналогичные трехмерному случаю. Для всех $i = 1, \dots, n$, где n — количество вершин, X_i — вершина многогранника, X_i^* — поляр к точке X_i , π_i — гиперплоскость, ограничивающая X_i^* .

Построение многогранника с $k \leq d$ вершинами выполним следующим образом. Рассмотрим автополярный многогранник Δ_k с k вершинами в \mathbb{R}_+^k . Тогда многогранником Δ_d в \mathbb{R}_+^d с k вершинами назовем цилиндр над Δ_k . По предложению 2 многогранник Δ_d будет автополярным.

Первым интересным примером служит многогранник с d вершинами, так как мы построим его не с помощью поднятия многогранника меньшей размерности.

5.1. Автополярный многогранник в \mathbb{R}_+^d с $n = d$ вершинами.

1. Пусть вершины X_1, \dots, X_{d-1} уже построены, лежат в $Oy_1 \dots y_{d-1}$ и соответствуют первым $d - 1$ вершинам при построении автополярного многогранника с d вершинами в \mathbb{R}_+^{d-1} .

2. Тогда $OX_1 \dots X_{d-1} - (d-1)$ -мерный ортоцентрический симплекс с ортоцентром X'_{d-1} , который лежит во внутренности данного симплекса. Точка X'_{d-1} есть пересечение $Oy_1 \dots y_{d-1}$ с π_1, \dots, π_{d-1} .

3. Восстановим луч l в направлении оси Oy_d из точки X'_{d-1} , перпендикулярный гиперплоскости, содержащей данный симплекс. Тогда по лемме 2 и замечанию 5 существует точка $X_d \in l$ такая, что $OX_1 \dots X_d - d$ -мерный ортоцентрический симплекс с ортоцентром X_d . Построим полярю X_d^* .

Предложение 5. Построенный многогранник Δ с вершинами X_1, \dots, X_d и гранями, ограниченными гиперплоскостями $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_d$ и всеми гранями положительного ортанта, кроме $Oy_1 \dots y_{d-2}y_d$, является автополярным.

Доказательство. Так как данная конструкция продолжает конструкцию меньшей размерности, гиперплоскости $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{d-1}$, ограничивающие соответственно поляры X_1, \dots, X_{d-1} , действительно образуют грани Δ . Остается показать, что гиперплоскость π_d , ограничивающая полярю X_d^* , проходит через X_1, \dots, X_{d-1} , а значит, не образует новых вершин.

По построению для всех $i = 1, \dots, d-1$ вершина X_d принадлежит π_i , следовательно, $X_i \in \pi_d$ по свойству поляр. Также по определению полярю π_d должна быть перпендикулярна OX_d . Так как $X_d -$ ортоцентр $OX_1 \dots X_d$, то $OX_d \perp (X_1 \dots X_d)$. Объединяя полученные утверждения, заключаем, что гиперплоскости $(X_1 \dots X_d)$ и π_d совпадают.

При данном построении доказательство автополярности Δ аналогично доказательству автополярности в примере 6. Таким образом,

$$\Delta^* = \bigcap_{i=1}^d X_i^* = \Delta \quad \square$$

5.2. Автополярный многогранник в \mathbb{R}_+^d с $n > d$ вершинами.

1. Пусть вершины X_1, \dots, X_{d-1} уже построены, лежат в $Oy_1 \dots y_{d-1}$ и соответствуют первым $d-1$ вершинам при построении автополярного многогранника с d вершинами в \mathbb{R}_+^{d-1} .

2. Тогда $OX_1 \dots X_{d-1} - (d-1)$ -мерный ортоцентрический симплекс с ортоцентром X'_{d-1} , который лежит во внутренности данного симплекса. Точка X'_{d-1} есть пересечение $Oy_1 \dots y_{d-1}$ с π_1, \dots, π_{d-1} .

3. Восстановим луч l в направлении оси Oy_d из точки X'_{d-1} , перпендикулярный гиперплоскости, содержащей данный симплекс. По замечанию 6 из леммы 2 на l можно выбрать вершину X_d таким образом, чтобы $OX_1 \dots X_d$ был d -мерным ортоцентрическим симплексом с ортоцентром X'_d на интервале $(X'_{d-1}X_d)$. Построим полярю X_d^* .

4. Рассмотрим построение вершины X_{d+k} для $k \geq 1$.

(а) Если $n = d + k$, то X_{d+k} выбирается таким образом, чтобы симплекс $OX_{k+1} \dots X_{d+k-1}X_{d+k}$ был ортоцентрическим с ортоцентром X_{d+k} . Строим полярю X_{d+k}^* и получаем, что гиперплоскость π_{d+k} есть $(OX_{k+1} \dots X_{d+k-1}X_{d+k})$.

(б) Если $n > d + k$, то X_{d+k} выбирается таким образом, чтобы симплекс $OX_{k+1} \dots X_{d+k-1}X_{d+k}$ был ортоцентрическим с ортоцентром X'_{d+k} , лежащем на интервале $(X'_{d+k-1}X_{d+k})$. Строим полярю X_{d+k}^* . Тогда гиперплоскость π_{d+k} есть $OX_{k+1} \dots X_{d+k-1}X'_{d+k}$.

Таким образом, на данном этапе построения имеем ровно $d + k$ вершин.

Теорема 5. Построенный многогранник Δ с вершинами X_1, X_2, \dots, X_n и гранями, ограниченными гиперплоскостями $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ и всеми гранями положительного ортанта, кроме $Oy_1 \dots y_{d-2}y_d$, является автополярным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На шаге 3 гиперплоскость π_d должна быть перпендикулярна OX_d и проходить через точки X_1, \dots, X_{d-1} , потому что $X_d \in \pi_i$ для всех $i = 1, \dots, d-1$. Так как $X_i X'_d \perp OX_d$, гиперплоскость $(X_1 \dots X_{d-1} X'_d)$ перпендикулярна OX_d , значит, она есть в точности π_d . Таким образом, на данном этапе построения имеем ровно d вершин.

При каждом следующем шаге появляется ровно одна новая вершина и все π_i образуют грани Δ . Значит, при рассмотрении Δ^* поляры всех вершин X_i перейдут в какие-то грани Δ . Таким образом,

$$\Delta^* = \bigcap_{i=1}^n X_i^* = \Delta.$$

Теорема доказана. \square

Таким образом, для $d \geq 2$ существует бесконечная серия не изоморфных друг другу автополярных многогранников в \mathbb{R}_+^d , причем для любого $n \geq 1$ существует многогранник ровно с n вершинами. Несмотря на возможность менять некоторые параметры при построении, все многогранники с n вершинами в размерности d будут иметь один комбинаторный тип.

Полная классификация автополярных многогранников приведена только в \mathbb{R}_+^2 [5]. Возникает вопрос о получении подобной классификации в более высоких размерностях. Сформулируем следующую проблему.

Проблема 1. Существуют ли автополярные многогранники в \mathbb{R}_+^d при $d \geq 3$, отличные (т. е. комбинаторно неэквивалентные) от тех, которые приведены в разд. 4 и 5?

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю В. Ю. Протасову за ценные советы при проведении научного исследования и рекомендации по оформлению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Merikoski J. K. On I_{p_1, p_2} antinorms of nonnegative matrices // Linear Algebra Appl. 1990. V. 140. P. 31–44.
2. Bourin J.-C., Hiai F. Anti-norms on finite von Neumann algebras // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 2015. V. 51, N 2. P. 207–235.
3. Guglielmi N., Zennaro M. Canonical construction of polytope Barabanov norms and anti-norms for sets of matrices // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2015. V. 36, N 2. P. 634–655.
4. Guglielmi N., Zennaro M. An antinorm theory for sets of matrices: Bounds and approximations to the lower spectral radius // Linear Algebra Appl. 2020. V. 607. P. 89–117.
5. Protasov V. Yu. Antinorms on cones: duality and applications // Linear Multilinear Algebra. 2021. DOI: 10.1080/03081087.2021.1988885.
6. Moszyńska M., Richter W-D. Reverse triangle inequality, antinorms and semi-antinorms // Studia Sci. Math. Hung. 2012. V. 49, N 1. P. 120–138.
7. Guglielmi N., Protasov V. Yu. Exact computation of joint spectral characteristics of linear operators // Found. Comput. Math. 2013. V. 13, N 1. P. 37–97.
8. Guglielmi N., Laglia L., Protasov V. Yu. Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS // Found. Comput. Math. 2017. V. 17. P. 567–623.
9. Fornasini E., Valcher M. E. Stability and stabilizability criteria for discrete-time positive switched systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. V. 57, N 5. P. 1208–1221.

10. Fornasini E., Valcher M. E. Asymptotic stability and stabilizability of special classes of discrete-time positive switched systems // *Linear Alg. Appl.* 2013. V. 438, N 4. P. 1814–1831.
11. Барабанов Н. Е. Об абсолютном характеристическом показателе класса линейных нестационарных систем дифференциальных уравнений // *Сиб. мат. журн.* 1988. Т. 29, № 4. С. 12–22.
12. Blanchini F., Savorgnanb C. Stabilizability of switched linear systems does not imply the existence of convex Lyapunov functions // *Automatica*. 2008. V. 44, N 4. P. 1166–1170.
13. Blondel V. D., Tsitsiklis J. N. The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard – when not impossible – to compute and to approximate // *Math. Control, Signals, Systems*. 1997. V. 10. P. 31–40.
14. Bochi J., Morris I. D. Continuity properties of the lower spectral radius // *Proc. London Math. Soc.* 2014. V. 110, N 2. P. 477–509.
15. Furstenberg H., Kesten H. Products of random matrices // *Ann. Math. Statist.* 1960. V. 31. P. 457–469.
16. Hennion H. Limit theorems for products of positive random matrices // *Ann. Prob.* 1997. V. 25, N 4. P. 1545–1587.
17. Jungers R. M., Protasov V. Yu. Lower and upper bounds for the largest Lyapunov exponent of matrices // *Linear Algebra Appl.* 2013. V. 438. P. 4448–4468.
18. Protasov V. Yu. Invariant functionals of random matrices // *Funct. Anal. Appl.* 2010. V. 44. P. 230–233.
19. Protasov V. Yu. Invariant functionals for the Lyapunov exponents of random matrices // *Sbornik: Mathematics*. 2011. V. 202, N 1. P. 101–126.
20. Protasov V. Yu. Asymptotics of products of nonnegative random matrices // *Funct. Anal. Appl.* 2013. V. 47, N 2. P. 138–147.
21. Oseledets V. I. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems // *Trans. Mosc. Math. Soc.* 1968. V. 19. P. 197–231.
22. Pollicott M. Maximal Lyapunov exponent for random matrix products // *Invent. Math.* 2010. V. 181. P. 209–226.
23. Bourin J.-C., Hiai F. Norm and anti-norm inequalities for positive semi-definite matrices // *Internat. J. Math.* 2011. V. 22, N 8. P. 1121–1138.
24. Bourin J.-C., Hiai F. Jensen and Minkowski inequalities for operator means and anti-norms // *Linear Algebra Appl.* 2014. V. 456. P. 22–53.

Поступила в редакцию 28 апреля 2023 г.

После доработки 28 апреля 2023 г.

Принята к публикации 2 августа 2023 г.

Макаров Максим Сергеевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
maximka1905@mail.ru