



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Юров, Сингулярный интеграл с логарифмическим весом,  
*Матем. заметки*, 1979, том 26, выпуск 1, 61–70

<https://www.mathnet.ru/mzm6840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

23 апреля 2025 г., 20:24:20



## СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ВЕСОМ

П. Г. Юров

В теории интегральных уравнений (см. [1], [2]) изучаются сингулярные интегралы вида

$$(S_m \varphi)(x) = \int_a^b \ln^m \frac{b-t}{t-a} \cdot \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

В опубликованной недавно работе [3] для интеграла (1) при  $\varphi(t) \equiv 1$  указываются рекуррентные соотношения. В настоящей статье уточняются результаты, полученные в работах [4] — [6] на основе теории, построенной А. О. Гельфондом [7, гл. V, § 7], и приводятся явные выражения некоторых интегралов типа (1).

1. В пп. 1—3 описывается аналитический аппарат, используемый для решения поставленной задачи.

Пусть степенной ряд

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_0)^n \quad (2)$$

определяет целую функцию  $f(w)$ ; положим

$$w = (2\pi i)^{-1} \ln u,$$

$$w_0 = (2\pi i)^{-1} \ln r \quad (0 < r < 1/2, \quad r/2 \leq u \leq 3r/2) \quad (3)$$

(имеются в виду вещественные значения  $\ln u$  и  $\ln r$ ).

**ЛЕММА 1.** Для целой функции  $f(w)$ , удовлетворяющей условию

$$|f(x + iy)| \leq M_1 e^{\nu|y|} \quad (0 \leq \nu < 2\pi, \quad |x| \leq (\ln 2) / \pi, \quad -\infty < y < +\infty), \quad (4)$$

где  $M_1 = \text{const}$ , справедлива оценка

$$\left| \frac{f((\ln u)/(2\pi i)) - f((\ln r)/(2\pi i))}{u - r} \right| = O\left(\frac{1}{r^{\lambda+1}}\right) \quad (r \rightarrow 0, 0 \leq \lambda < 1), \quad (5)$$

в которой  $\lambda = (2\pi)^{-1} \cdot \nu$ .

**Доказательство.** Учитывая (4), оценим рост функции  $f(w)$  при  $r \rightarrow 0$  в круге

$$D_\rho = \{z: |z - w_0| \leq \rho\},$$

где  $\rho = (\ln 2)/\pi$ :

$$|f(z)| = |f(w_0 + \rho e^{i\varphi})| \leq M_1 \exp\{(\nu/(2\pi)) |\ln(1/r) + 2\pi \rho \sin \varphi|\} \leq 4M_1 r^{-\lambda}$$

( $0 \leq \lambda < 1$ ). Применяя теперь к коэффициентам ряда (2) неравенство Коши, получим

$$|c_k| \leq M(\rho) \rho^{-k} \leq 4M_1 r^{-\lambda} \cdot \rho^{-k} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где обозначено

$$M(\rho) = \max |f(z)|, \quad z \in \partial D_\rho.$$

Принимая во внимание (3) и (6), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{\ln u}{2\pi i}\right) - f\left(\frac{\ln r}{2\pi i}\right) \right| &\leq \\ &\leq \left| \ln \frac{u}{r} \right| \frac{4M_1}{2\pi \rho r^\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|\ln(u/r)|}{2\pi \rho}\right)^{k-1} \leq \\ &\leq \frac{4M_1}{\ln 2} \cdot r^{-\lambda} \cdot \left| \ln \frac{u}{r} \right|, \end{aligned}$$

откуда

$$\left| \frac{f(w) - f(w_0)}{u - r} \right| \leq \left| \frac{\ln(1 + (u - r)/r)}{u - r} \right| \frac{4M_1}{\ln 2} r^{-\lambda} = M_2 r^{-\lambda-1},$$

где  $M_2$  не зависит от  $u$  и  $r$ . Лемма доказана.

2. Пусть  $K_\sigma^2$  — класс  $\{f(z)\}$  целых функций конечной степени  $\sigma$ , подчиненных условиям

$$h[(-1)^k \pi/2] = \mu_k < 2\pi \quad (k = 1, 2), \quad (7)$$

где  $h(\theta)$  — индикатор целой функции  $f(z)$  [8, стр. 72]:

$$h(\theta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \ln |f(re^{i\theta})|.$$

Условия (7) выполняются, например, для любой целой функции  $f(z)$  степени  $\sigma < 2\pi$ .

Как известно, для  $f(z) \in K_\sigma^2$ ,  $f(z) \not\equiv 0$ ,

$$\max \{\mu_1, \mu_2\} \equiv \mu \geq 0. \quad (8)$$

Далее везде предполагается, что  $f(z) \not\equiv 0$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Если  $f(z) \in K_\sigma^2$  ( $0 \leq \sigma < \infty$ ), то, как показано в [6], из ограничений (7), наложенных на рост  $f(z)$  вдоль мнимой оси, т. е. при  $x = 0$ , вытекает неравенство (4) для любых вещественных  $x$ ,  $|x| \leq a < \infty$ .

Обозначим через  $L$  луч  $\{(x, y): 0 \leq x < \infty, y = 0\}$  и через  $D$  — открытую область плоскости  $z$  с границей  $L$ . Полагая

$$\tilde{f}(x) = f(\ln x / (2\pi i)) \quad (0 < x < \infty, -\infty < \ln x < \infty), \quad (9)$$

рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) \equiv \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x)}{(x - z_0)(x - z)} dx \quad (z \in D) \quad (10)$$

( $z_0 = \text{const}$ ,  $z_0 \in D$ ). Если  $z = t \in L$  ( $0 < t < \infty$ ), то сингулярный интеграл (10) понимается в смысле главного значения по Коши. Получим сначала грубую оценку для  $\Phi(z)$ , исходя из соотношения (8).

**ЛЕММА 2.** Если  $f(z) \in K_\sigma^2$ , то для интеграла (10) верна оценка

$$\Phi(z) = \begin{cases} O(|z|^{-\lambda}), & z \rightarrow 0, \\ O(|z|^\lambda), & z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\lambda = \text{const}$ ,  $0 < \lambda < 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $2\pi > \nu > \mu$ , где  $\mu$  — число, указанное в (8). Из (7) следует, что при всех  $x > 0$  таких, что  $|\ln x| \geq R(\nu)$ , будет

$$|\tilde{f}(x)| = |f((\ln x) / (2\pi i))| < e^{\lambda|\ln x|} \quad (\lambda = \nu/(2\pi), 0 < \lambda < 1). \quad (12)$$

Таким образом, несобственный интеграл (10) сходится при всех  $z$ ,  $z \neq 0, \infty$ .

Исследуем сначала поведение  $\Phi(z)$  при  $z \rightarrow 0$  ( $z = re^{i\theta}$ ,  $|\theta| \leq \delta$ )<sup>1)</sup>. Запишем интеграл (10) в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\tilde{f}(x) dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\tilde{f}(x) dx}{x-z_0} + \\ + \frac{z-z_0}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\tilde{f}(x) dx}{(x-z)(x-z_0)}.$$

Так как два последних слагаемых ограничены при  $z \rightarrow 0$ , остается оценить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\tilde{f}(x) dx}{x-z} = \left\{ \int_0^{0,5r} + \int_{0,5r}^{1,5r} + \int_{1,5r}^1 \right\} \frac{\tilde{f}(x) dx}{x-z} = \\ \equiv \omega_1(z) + \omega_2(z) + \omega_3(z).$$

Считая  $r = |z|$  настолько малым, что при  $0 < x \leq r/2$  выполняется (12), найдем, что

$$|\omega_1(z)| \leq \int_0^{0,5r} |\tilde{f}(x)/(x-z)| dx \leq \\ \leq (2/r) \int_0^{0,5r} x^{-\lambda} dx = 2^\lambda / (1-\lambda) \cdot r^{-\lambda}. \quad (13)$$

Поскольку  $|\tilde{f}(x)| \leq Ax^{-\lambda}$  при  $3r/2 \leq x \leq 1$  ( $A = \text{const}$ ), то, полагая  $x = ur$ , преобразуем  $\omega_3(z)$  так:

$$|\omega_3(z)| \leq A \int_{1,5r}^1 \frac{dx}{x^\lambda |x - re^{i\theta}|} \leq \frac{A}{r^\lambda} \int_{1,5}^\infty \frac{du}{u^\lambda |u - e^{i\theta}|} = A_1 r^{-\lambda}. \quad (14)$$

( $A_1 = \text{const}$ ). Представляя  $\omega_2(z)$  в виде

$$\omega_2(z) = \int_{0,5r}^{1,5r} (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(r)) dx / (x-z) + \\ + \tilde{f}(r) \int_{0,5r}^{1,5r} dx / (x-z) \equiv I_1(z) + I_2(z),$$

установим в соответствии с (7), что

$$|I_2(z)| = |\tilde{f}(r)| \ln((1,5 - e^{i\theta}) / (0,5 - e^{i\theta})) \leq \\ \leq A_2 r^{-\lambda} (A_2 = \text{const}). \quad (15)$$

Для интеграла  $I_1(z)$  на основании леммы 1 и замечания 1

<sup>1)</sup> При  $z \rightarrow 0$  и  $0 < \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta$  оценка интеграла (10) не вызывает затруднений.

будем иметь

$$I_1(z) \leq \int_{0,5r}^{1,5r} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(r)| dx / |x - r| \leq \\ \leq M_2 r^{-\lambda-1} \int_{0,5r}^{1,5r} dx = M_2 r^{-\lambda}. \quad (16)$$

Из неравенств (13) — (16) вытекает утверждение леммы для  $z \rightarrow 0$ .

Если  $z \rightarrow \infty$ , то, заменяя переменные по формулам

$$x = u^{-1}, \quad z = w^{-1}, \quad z_0 = w_0^{-1},$$

получим

$$\frac{z - z_0}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{\tilde{f}(x) dx}{(x - z_0)(x - z)} = - \frac{w - w_0}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f[-(\ln u)/(2\pi i)]}{(u - w_0)(u - w)} du;$$

тем самым этот случай сводится к уже рассмотренному. Лемма доказана.

С помощью грубой оценки (11) далее (в теореме 1) будут найдены точные представления для  $\Phi(z)$ .

3. Проведя разрез вдоль  $L$ , фиксируем непрерывную в области  $D$  (п. 2) ветвь  $\ln z$ , считая, что  $\arg z = 0$  на верхнем берегу разреза. Предположим, что  $f(w)$  — заданная целая функция класса  $K_\sigma^2$ . Введем аналитическую в  $D$  функцию

$$\tilde{f}(z) = f((\ln z) / (2\pi i)) \quad (z \in D), \quad (17)$$

граничным значением которой на верхнем берегу  $L$  является функция  $\tilde{f}(x)$ , указанная в (9).

Как и в [4] — [6], поставим вопрос о нахождении представления для интеграла (10). Лемма 2 позволяет устранить излишнее предположение о поведении  $\Phi(z)$  в окрестностях концов контура, сделанное в работах [4] — [6], и сформулировать теорему 1 из [6] следующим образом.

**ТЕОРЕМА 1.** Если  $f(z) \in K_\sigma^2$ ,  $F(z) \in K_\sigma^2$  и удовлетворяют разностному уравнению

$$F(z + 1) - F(z) = f(z), \quad (18)$$

то при  $z_0 \in D$  справедливы равенства

$$\frac{z - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x) dx}{(x - z_0)(x - z)} = -F\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) + F\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right) \quad (z \in D), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{t - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x) dx}{(x - z_0)(x - t)} = \\ & = -\frac{1}{2} f\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) - F\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) + F\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right) \quad (t \in L, t \neq 0, \infty). \end{aligned} \quad (20)$$

Теорема 1 доказана в [6] (при более общих предположениях относительно контура  $L$ ).

Отметим частные случаи формул (19), (20).

1) Если  $z_0 = re^{i\varphi}$ ,  $0 < \varphi \leq \pi$ ,  $z = \bar{z}_0$ , то

$$\frac{r \sin \varphi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x) dx}{x^2 - 2xr \cos \varphi + r^2} = F\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i} + \frac{\pi - \varphi}{\pi}\right) - F\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right), \quad (21)$$

или, в других обозначениях ( $z_0 = x + iy$ ,  $z = x - iy$ ,  $y > 0$ ),

$$\frac{y}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(u) du}{(u - x)^2 + y^2} = F\left[\frac{\ln(x - iy)}{2\pi i}\right] - F\left[\frac{\ln(x + iy)}{2\pi i}\right]; \quad (22)$$

отсюда, при  $\varphi = \pi/2$  (или  $x = 0$ ,  $y > 0$ ),

$$\frac{r}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x) dx}{x^2 + r^2} = F\left(\frac{\ln r}{2\pi i} + \frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{\ln r}{2\pi i} + \frac{1}{4}\right). \quad (23)$$

2) Если  $z = t$ ,  $t \in L$  ( $0 < t < \infty$ ), а  $z_0 = -t$ , то, поскольку  $\ln(-1) = \pi i$ ,

$$\frac{t}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(x) dx}{x^2 - t^2} = F\left(\frac{\ln t}{2\pi i} + \frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right). \quad (24)$$

**З а м е ч а н и е.** 2. Обратим внимание на то, что при доказательстве леммы 2 фактически не было использовано допущение  $\sigma < \infty$ . Это дает возможность ввести вместо  $K_\sigma^2$  ( $0 \leq \sigma < \infty$ ) более широкий класс целых функций.

Однако уже функция  $f(z) = e^{2\pi iz}$  (степени  $\sigma = 2\pi$ ) не удовлетворяет условию (7) на луче  $\arg z = -\pi/2$ , т. е.  $e^{2\pi iz} \notin K_{2\pi}^2$  (и интеграл (10) оказывается расходящимся). Для таких функций (как, впрочем, и для  $f(z) \in K_\sigma^2$ ) рассматривают интеграл (см. [9], [10])

$$\Phi_q(z) = \frac{(z - z_0)^{q+1}}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{f[(2\pi i)^{-1} \ln x]}{(x - z_0)^{q+1}(x - z)} dx \quad ([\sigma/2\pi] \leq q < \infty), \quad (25)$$

где  $q$  — целое неотрицательное число, а  $[\sigma]$  — целая часть  $\sigma$ . Можно показать, что если  $F(z)$  — решение уравнения (18), то при некоторых ограничениях функция

$$P_q(z) \equiv \Phi_q(z) + F((\ln z)/(2\pi i))$$

является целой. Мы не будем здесь на этом останавливаться, так как ниже понадобится только случай  $q = 0$ , когда, в силу теоремы 1, целая функция

$$P_0(z) \equiv \text{const} = F[(2\pi i)^{-1} \ln z_0].$$

4. Нам потребуются некоторые следствия теоремы 1. Простейшие разностные уравнения

$$F(z+1) - F(z) = (m+1)z^m, \quad \Psi(z+1) - \Psi(z) = e^{\pm \pi i z} z^m \quad (26)$$

удовлетворяются при натуральном  $m$  целыми функциями

$$F(z) = B_{m+1}(z), \quad \Psi(z) = -(1/2)E_m(z) \cdot e^{\pm \pi i z}; \quad (27)$$

здесь  $B_{m+1}(z)$  — многочлен Бернулли [11, стр. 335] и  $E_m(z)$  — многочлен Эйлера [11, стр. 363]. Знаки в показателе берутся или только верхние, или только нижние.

Легко проверить, что условия теоремы 1 выполняются. Поэтому справедливы следующие предложения.

**С л е д с т в и е 1.** Если  $m$  — натуральное число и  $z_0 \in D$ , то для  $z \in D$

$$\begin{aligned} \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln^m x dx}{(x - z_0)(x - z)} = \\ = -\frac{(2\pi i)^m}{m+1} \left\{ B_{m+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) - B_{m+1}\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

а для  $t \in L$  ( $0 < t < \infty$ )

$$\begin{aligned} \frac{t - z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln^m x dx}{(x - z_0)(x - t)} = \\ = -\frac{(2\pi i)^m}{m+1} \cdot \left\{ B_{m+1}^*\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) - B_{m+1}\left(\frac{\ln z_0}{2\pi i}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$B_{m+1}^*(w) \equiv B_{m+1}(w) + (1/2)(m+1)w^m. \quad (30)$$

Последнее означает, что многочлен  $B_{m+1}^*(w)$  получается путем отбрасывания у многочлена Бернулли  $B_{m+1}(w)$  члена степени  $m$ .



Дифференцирование по  $z$  тождества (28) приводит к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln^m x}{(x-z)^2} dx = -\frac{(2\pi i)^{m-1}}{z} \cdot B_m \left( \frac{\ln z}{2\pi i} \right),$$

откуда, при  $z = -1$ ,

$$\int_0^\infty \frac{\ln^m x}{(x+1)^2} dx = (2\pi i)^m B_m \left( \frac{1}{2} \right). \quad (31)$$

Заметим, что  $B_m(1/2) = 0$  при нечетном  $m$ .

**С л е д с т в и е 2.** Если  $m \in \mathbb{N}$ ,  $z_0 \in D$  и  $t \in L$  ( $0 < t < \infty$ ), то

$$\begin{aligned} \frac{t-z_0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{x^{\pm 1/2} \ln^m x}{(x-z_0)(x-t)} dx = \\ = \frac{(2\pi i)^m}{2} \left\{ t^{\pm 1/2} \cdot E_m^* \left( \frac{\ln t}{2\pi i} \right) - z_0^{\pm 1/2} E_m \left( \frac{\ln z_0}{2\pi i} \right) \right\}, \quad (32) \end{aligned}$$

где

$$E_m^*(w) \equiv E_m(w) - w^m. \quad (33)$$

Укажем еще интегральное представление натуральной степени логарифма:

$$\left( \frac{\ln t}{2\pi i} \right)^m = \frac{t+1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{E_m^* [(2\pi i)^{-1} \ln x]}{(x+1)(x-t)} dx + E_m \left( \frac{1}{2} \right).$$

Это непосредственно следует из свойств многочленов  $E_m(z)$ .

5. Перейдем к конечному контуру — отрезку  $[a, b]$  вещественной оси и найдем явные выражения сингулярного интеграла (1) в следующих случаях:

$$\varphi(t) \equiv 1; \quad \varphi(t) \equiv ((b-t)/(t-a))^{\pm 1/2};$$

$$\varphi(t) = [(b-t)(t-a)]^{-1/2}; \quad \varphi(t) = ((b-t)/(t-a))^{\rho}.$$

**ТЕОРЕМА 2.** Если  $m \in \mathbb{N}$  и  $a < x < b$ , то

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln^m \frac{b-t}{t-a} \cdot \frac{dt}{t-x} = \\ = \frac{(2\pi i)^{m+1}}{m+1} \cdot \left\{ B_{m+1}^* \left( \frac{\ln((b-x)/(x-a))}{2\pi i} \right) - B_{m+1} \left( \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (34) \end{aligned}$$

где  $B_{m+1}^*(w)$  — многочлен, определенный в (30).

Доказательство. Положим в равенстве (29)  $z_0 = -1$ , тогда

$$\frac{t+1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln^m x dx}{(x+1)(x-t)} = -\frac{(2\pi i)^m}{m+1} \cdot \left[ B_{m+1}^* \left( \frac{\ln t}{2\pi i} \right) - B_{m+1} \left( \frac{1}{2} \right) \right].$$

Проводя здесь замену переменных

$$x(u-a) = b-u, \quad t(v-a) = b-v$$

$$(a < u < b, a < v < b),$$

придем к (34). Теорема доказана.

Подчеркнем, что значения логарифма  $\ln [(b-u) \cdot (u-a)^{-1}]$  ( $a < u < b$ ) вещественны.

Получим еще одну полезную формулу, сделав подстановку  $(u-a)x = b-u$  в интеграле из (31):

$$\int_a^b \ln^m ((b-x)/(x-a)) dx = (2\pi i)^m (b-a) B_m(1/2).$$

Аналогично (с использованием (32)) доказывается  
ТЕОРЕМА 3. Если  $m \in \mathbb{N}$  и  $a < x < b$ , то

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\pm 1/2} \cdot \ln^m \frac{b-t}{t-a} \cdot \frac{dt}{t-x} = \\ = -\frac{(2\pi i)^{m+1}}{2} \left\{ \left( \frac{b-x}{x-a} \right)^{\pm 1/2} \cdot E_m^* \left( \frac{\ln ((b-x)/(x-a))}{2\pi i} \right) - \right. \\ \left. - (-1)^{\pm 1/2} E_m \left( \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (35) \end{aligned}$$

где  $E_m^*(w)$  — многочлен, определенный в (33).

С л е д с т в и е 3. Если  $m \in \mathbb{N}$  и  $a < x < b$ , то

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\ln^m \frac{b-t}{t-a}}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} \cdot \frac{dt}{t-x} = \\ = -\frac{(2\pi i)^{m+1}}{2\sqrt{(b-x)(x-a)}} E_m^* \left( \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b-x}{x-a} \right). \quad (36) \end{aligned}$$

Действительно, достаточно сложить почленно равенства (35), отвечающие знаку «+» или знаку «-» в показателе.

ТЕОРЕМА 4. Если  $m \in \mathbb{N}$ ,  $|\operatorname{Re} \rho| < 1$ ,  $\rho \neq 0, \pm 1/2$ ;  
 $a < x < b$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{b-t}{t-a}\right)^\rho \ln^m \left(\frac{b-t}{t-a}\right) \frac{dt}{t-x} = \frac{1}{2} \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^\rho \ln^m \frac{b-x}{x-a} +$$

$$+ \frac{(2\pi i)^m e^{-i\pi\rho}}{2i \sin \pi\rho} \left\{ \left(\frac{b-x}{x-a}\right)^\rho \sum_{n=0}^m C_m^n H_n(q) \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{b-x}{x-a}\right)^{m-n} - \right.$$

$$\left. - e^{i\pi\rho} \sum_{n=0}^m C_m^n H_n(q) \cdot 2^{n-m} \right\}, \quad (37)$$

где  $C_m^n$  — биномиальные коэффициенты,  $q = \exp(-2\pi i\rho)$ ,  
 $H_0(q) \equiv 1$ ,  $H_n(q) = (q-1)^{-n} (A_{n,1} + A_{n,2}q + \dots$   
 $\dots + A_{n,n}q^{n-1})$   
 и  $A_{n,k}$  — числа Эйлера [12, стр. 254].

Доказательство. Соответствующее этому случаю разностное уравнение решено в [4].

Новочеркасский политехнический институт

Поступило  
 12.VII.1977

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, М., «Наука», 1977.
- [2] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1968.
- [3] Килбас А. А., Дифференцирование особых интегралов и вычисление определенных интегралов, Вестник БГУ, Сер. I, 1 (1977), 78—80.
- [4] Юров П. Г., Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях, Изв. АН БССР, Сер. физ.-матем. наук, № 3 (1967), 67—74.
- [5] Юров П. Г., О представлении интегралов типа Коши, Матем. заметки, 6, № 1 (1969), 55—63.
- [6] Юров П. Г., О несобственном интеграле типа Коши, Изв. Сев.-Кав. научн. центра высш. шк., Сер. естеств. наук, № 4 (1975), 108—109.
- [7] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М., «Наука», 1967.
- [8] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.
- [9] Говоров Н. В., Об ограниченных решениях однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка, Теор. функц., функц. анализ и их прилож., № 11 (1970), 3—34.
- [10] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
- [11] Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби. Справочная математическая библиотека, М., Физматгиз, 1961.
- [12] Ригордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, М., ИЛ, 1963.