



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Юлдашев, А. В. Багрова, Нелокальная задача для смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка в трехмерной области,
Журнал СВМО, 2016, том 18, номер 3, 70–79

<https://www.mathnet.ru/svmo608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

23 апреля 2025 г., 01:26:21



УДК 517.968

Нелокальная задача для смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка в трехмерной области

© Т. К. Юлдашев¹ А. В. Багрова²

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и построения решения нелокальной смешанной задачи для трехмерного однородного смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка. Использован спектральный метод, основанный на разделении переменных. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной задачи и доказана соответствующая теорема.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, уравнение четвертого порядка, трехмерная область, интегральные условия, однозначная разрешимость

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных, краевых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач, в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений.

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [1]– [6]). Исследованию дифференциальных уравнений четвертого порядка посвящено большое количество публикаций многих математиков, в частности работы автора [7]– [10].

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [11]– [13].

Задачи, где меняется тип дифференциального уравнения в рассматриваемой области, имеют важные приложения (см. [14]– [16]). Дифференциальные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов, в частности, в [17]– [26].

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной смешанной задачи для трехмерного смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка. Итак, в трехмерной области $\Omega = \{(t, x, y) \mid -\alpha < t < \beta, 0 < x, y < l\}$ рассматривается смешанное уравнение вида

$$\Im U \equiv U_{tt} - (U_{ttxx} + U_{ttyy}) + (\operatorname{sgn} t)(U_{xx} + U_{yy}) = 0, \quad (1.1)$$

где α , β и l — заданные положительные действительные числа.

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

² Студентка инженерно-экономического института, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, nastyabagrova96@gmail.com

Задача. Найти в трехмерной области Ω функцию $U(t, x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$U(t, x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \{x = 0\} \cup \{x = l\} \cup \{y = 0\} \cup \{y = l\}) \cap C^2(\Omega_+ \cup \Omega_-), \quad (1.2)$$

$$\Im U(t, x, y) \equiv 0, \quad (t, x, y) \in (\Omega_+ \cup \Omega_-), \quad (1.3)$$

$$U(t, 0, y) = U(t, l, y) = U(t, x, 0) = U(t, x, l) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (1.4)$$

$$\int_0^\beta U(t, x, y) t dt = \varphi(x, y), \quad \int_{-\alpha}^0 U(t, x, y) t dt = \psi(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq l, \quad (1.5)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \psi(0, y) = \psi(l, y) = 0$, $\varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = \psi(x, 0) = \psi(x, l) = 0$, $\Omega_- = \{(t, x, y) \mid -\alpha < t < 0, 0 < x, y < l\}$, $\Omega_+ = \{(t, x, y) \mid 0 < t < \beta, 0 < x, y < l\}$.

Отметим, что в двумерном случае уравнение (1.1) при других граничных условиях рассмотрено в [25].

2. Поиск частных решений

Нетривиальные частные решения уравнения (1.1) в области Ω будем искать в виде $U(t, x, y) = T(t)V(x, y)$. Тогда из уравнения (1.1) получаем

$$T''(t)V(x, y) - T''(t)V_{xx}(x, y) - T''(t)V_{yy}(x, y) = -(\operatorname{sgn} t) \left(T(t)V_{xx}(x, y) + T(t)V_{yy}(x, y) \right).$$

Здесь почленно разделим на $-(\operatorname{sgn} t)T(t)V(x, y)$:

$$-\frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn} t)T(t)} + \frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn} t)T(t)} \left(\frac{V_{xx}(x, y)}{V(x, y)} + \frac{V_{yy}(x, y)}{V(x, y)} \right) = \frac{V_{xx}(x, y)}{V(x, y)} + \frac{V_{yy}(x, y)}{V(x, y)}.$$

В последнем равенстве положим, что

$$\frac{V_{xx}(x, y)}{V(x, y)} + \frac{V_{yy}(x, y)}{V(x, y)} = -\mu^2, \quad -\frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn} t)T(t)} + \frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn} t)T(t)} \left(\frac{V_{xx}(x, y)}{V(x, y)} + \frac{V_{yy}(x, y)}{V(x, y)} \right) = -\mu^2,$$

где $-\mu^2$ — постоянная разделения, $0 < \mu$.

Отсюда с учетом граничных условий (1.4) получаем

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) + \mu^2 V(x, y) = 0, \quad 0 < x, y < l, \quad (2.1)$$

$$V(0, y) = V(l, y) = V(x, 0) = V(x, l) = 0, \quad (2.2)$$

$$T''(t) - \lambda^2 T(t) = 0, \quad 0 < t < \beta, \quad (2.3)$$

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad -\alpha < t < 0, \quad (2.4)$$

где $\lambda^2 = \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}$.

Спектральная задача (2.1) и (2.2) имеет решение

$$V_{n,m}(x, y) = X_n(x)Y_m(y), \quad (2.5)$$

где $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$, $Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} y$, $n, m = 1, 2, \dots$; $\mu_{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{l}$.

Тогда общие решения дифференциальных уравнений (2.3) и (2.4) имеют вид

$$T_{n,m}(t) = \begin{cases} a_{n,m}e^{\lambda_{n,m}t} + b_{n,m}e^{-\lambda_{n,m}t}, & t > 0, \\ c_{n,m} \cos \lambda_{n,m}t + d_{n,m} \sin \lambda_{n,m}t, & t < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}$ — произвольные постоянные, $\lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}}$.

Поскольку решения $U_{n,m}(t, x) = T_{n,m}(t) X_n(x) Y_m(y)$ должны удовлетворять условию (1.2), то постоянные $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}$ подберем так, чтобы выполнялись условия

$$T_{n,m}(0+0) = T_{n,m}(0-0), \quad T'_{n,m}(0+0) = T'_{n,m}(0-0). \quad (2.7)$$

Из (2.6) с учетом условий (2.7) получаем, что $c_{n,m} = a_{n,m} + b_{n,m}$ и $d_{n,m} = a_{n,m} - b_{n,m}$. Тогда функции (2.6) принимают вид

$$T_{n,m}(t) = \begin{cases} c_{n,m} \operatorname{ch} \lambda_{n,m}t + d_{n,m} \operatorname{sh} \lambda_{n,m}t, & t > 0, \\ c_{n,m} \cos \lambda_{n,m}t + d_{n,m} \sin \lambda_{n,m}t, & t < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

С учетом функций (2.5) решение задачи (1.2)–(1.5) в трехмерной области Ω , согласно методу Фурье разделения переменных, представим в виде

$$U(t, x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y,$$

где

$$u_{n,m}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

3. Определение коэффициентов Фурье (2.9)

Покажем, что функции (2.9) удовлетворяют уравнениям (2.3), (2.4) в соответствующих интервалах и условию (2.7). Дифференцируя по t равенства (2.9) два раза и учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} u''_{n,m}(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U_{tt}(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttxx} + U_{ttyy} - U_{xx} - U_{yy}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttxx} - U_{xx}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy + \\ &+ \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttyy} - U_{yy}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy, \quad t > 0, \quad (3.1) \\ u''_{n,m}(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U_{tt}(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttxx} + U_{ttyy} + U_{xx} + U_{yy}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttxx} + U_{xx}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy + \\
 &+ \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttyy} + U_{yy}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy, \quad t < 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Интегрируя два раза по частям по x в первых интегралах в правых частях (3.1) и (3.2), затем интегрируя два раза по частям по y во вторых интегралах в правых частях (3.1) и (3.2), с учетом условий (1.4) получаем следующие уравнения

$$u''_{n,m}(t) - \lambda_{n,m}^2 u_{n,m}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.3}$$

$$u''_{n,m}(t) + \lambda_{n,m}^2 u_{n,m}(t) = 0, \quad t < 0, \tag{3.4}$$

где $\lambda_{n,m}^2 = \frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}$, $\mu_{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{l}$.

Дифференциальные уравнения (3.3) и (3.4) при $\lambda = \lambda_{n,m}$ совпадают соответственно с уравнениями (2.3) и (2.4). Далее с учетом условий (1.2) из (2.9) получаем

$$\begin{aligned}
 u_{n,m}(0+0) &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(0+0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\
 &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(0-0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = u_{n,m}(0-0).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Дифференцируя функции (2.9) один раз по t , в силу условий (1.2) имеем

$$\begin{aligned}
 u'_{n,m}(0+0) &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U_t(0+0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\
 &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U_t(0-0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = u'_{n,m}(0-0).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Условия (3.5) и (3.6) совпадают с условиями (2.7). Тогда для задачи (3.3)–(3.6) аналогично формуле (2.8) имеем

$$u_{n,m}(t) = \begin{cases} c_{n,m} \operatorname{ch} \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t, & t > 0, \\ c_{n,m} \cos \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \sin \lambda_{n,m} t, & t < 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Для нахождения постоянных $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$ воспользуемся интегральными условиями (1.5) и формулой (2.9)

$$\begin{aligned}
 \int_0^\beta u_{n,m}(t) t dt &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \int_0^\beta U(t, x, y) t dt \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\
 &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \varphi(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \varphi_{n,m},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\alpha}^0 u_{n,m}(t) t dt &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \int_{-\alpha}^0 U(t, x, y) t dt \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\
 &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \psi(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \psi_{n,m}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

При $t > 0$ из (3.7) и (3.8) получаем

$$\varphi_{n,m} = \int_0^\beta u_{n,m}(t) t dt = \int_0^\beta (c_{n,m} \operatorname{ch} \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t) t dt = c_{n,m} \left[\frac{\beta}{\lambda_{n,m}} \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta - \frac{1}{\lambda_{n,m}^2} (\operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta - 1) \right] + d_{n,m} \left[\frac{\beta}{\lambda_{n,m}} \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta - \frac{1}{\lambda_{n,m}^2} \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta \right]. \quad (3.10)$$

При $t < 0$ из (3.7) и (3.9) получаем

$$\psi_{n,m} = \int_{-\alpha}^0 u_{n,m}(t) t dt = \int_{-\alpha}^0 (c_{n,m} \cos \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \sin \lambda_{n,m} t) t dt = c_{n,m} \left[-\frac{\alpha}{\lambda_{n,m}} \sin \lambda_{n,m} \alpha - \frac{1}{\lambda_{n,m}^2} (\cos \lambda_{n,m} \alpha - 1) \right] + d_{n,m} \left[-\frac{\alpha}{\lambda_{n,m}} \cos \lambda_{n,m} \alpha + \frac{1}{\lambda_{n,m}^2} \sin \lambda_{n,m} \alpha \right]. \quad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$:

$$\begin{cases} c_{n,m} [1 + \lambda_{n,m} \beta \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta - \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta] + \\ + d_{n,m} [\lambda_{n,m} \beta \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta] = \lambda_{n,m}^2 \varphi_{n,m}, \\ c_{n,m} [1 - \lambda_{n,m} \alpha \sin \lambda_{n,m} \alpha - \cos \lambda_{n,m} \alpha] + \\ + d_{n,m} [-\lambda_{n,m} \alpha \cos \lambda_{n,m} \alpha + \sin \lambda_{n,m} \alpha] = \lambda_{n,m}^2 \psi_{n,m}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Система однозначно разрешима, если ее определитель не обращается в нуль при любых $0 < \alpha$ и $0 < \beta$:

$$\Delta_{n,m}(\alpha, \beta) = A_{n,m} [-\lambda_{n,m} \alpha \cos \lambda_{n,m} \alpha + \sin \lambda_{n,m} \alpha] - B_{n,m} [1 - \lambda_{n,m} \alpha \sin \lambda_{n,m} \alpha - \cos \lambda_{n,m} \alpha] \neq 0, \quad (3.13)$$

где $A_{n,m} = 1 + \lambda_{n,m} \beta \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta - \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta$, $B_{n,m} = \lambda_{n,m} \beta \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta$. Так как $0 < \lambda_{n,m} < 1$ и $0 < \beta < \infty$, то $|A_{n,m}| < \infty$, $|B_{n,m}| < \infty$.

Пусть выполняется условие (3.13). Тогда из (3.12) находим

$$c_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)} [\varphi_{n,m} (-\lambda_{n,m} \alpha \cos \lambda_{n,m} \alpha + \sin \lambda_{n,m} \alpha) - \psi_{n,m} B_{n,m}],$$

$$d_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)} [\varphi_{n,m} (\lambda_{n,m} \alpha \sin \lambda_{n,m} \alpha + \cos \lambda_{n,m} \alpha - 1) + \psi_{n,m} A_{n,m}].$$

Подставляя эти коэффициенты в формулы (3.12), получим

$$u_{n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)} \left\{ \varphi_{n,m} [\lambda_{n,m} \alpha (-\operatorname{ch} \lambda_{n,m} t \cos \lambda_{n,m} \alpha + \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t \sin \lambda_{n,m} \alpha) + (\operatorname{ch} \lambda_{n,m} t \sin \lambda_{n,m} \alpha + \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t \cos \lambda_{n,m} \alpha) - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t] + \psi_{n,m} [-\lambda_{n,m} \beta \operatorname{ch} \lambda_{n,m} (t - \beta) - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} (t - \beta) + \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t] \right\}, \quad t > 0, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
 u_{n,m}(t) = & \frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)} \left\{ \varphi_{n,m} \left[-\lambda_{n,m} \alpha \cos \lambda_{n,m}(t - \alpha) + \sin \lambda_{n,m}(t + \alpha) - \sin \lambda_{n,m} t \right] + \right. \\
 & + \psi_{n,m} \left[\lambda_{n,m} \beta (\sin \lambda_{n,m} t \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta) - \cos \lambda_{n,m} t \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta \right] + \\
 & \left. + (\cos \lambda_{n,m} t \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta - \sin \lambda_{n,m} t \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta) + \sin \lambda_{n,m} t \right\}, \quad t < 0. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Теперь предположим, что $\varphi(x, y) \equiv 0$, $\psi(x, y) \equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m} = 0$, $\psi_{n,m} = 0$ и из формул (2.9), (3.14) и (3.15) следует, что

$$\int_0^l \int_0^l U(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y \, dx \, dy = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Отсюда, в силу полноты систем собственных функций $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$, $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} y \right\}$ в $L_2[0, l]$, заключаем, что $U(t, x, y) \equiv 0$ для всех $x, y \in [0, l]$ и $t \in [-\alpha, \beta]$.

4. Существование решения

Рассмотрим случай, когда нарушается условие (3.13). Пусть $\Delta_{n,m}(\alpha, \beta) = 0$ при некоторых значениях α . Это условие эквивалентно равенству

$$(B_{n,m} - A_{n,m} \lambda_{n,m} \alpha) \cos \lambda_{n,m} \alpha + (B_{n,m} + A_{n,m} \lambda_{n,m} \alpha) \sin \lambda_{n,m} \alpha = B_{n,m},$$

где $0 < \lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}} < 1$, $\mu_{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{l}$, $\lambda_{n,m} \rightarrow 1$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Последнее уравнение записываем в следующем виде

$$\cos(\lambda_{n,m} \alpha - \theta_{n,m}) = \frac{B_{n,m}}{\sqrt{(1 + \lambda_{n,m}^2 \alpha^2) (A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2)}},$$

где $\theta_{n,m} = \arcsin \frac{A_{n,m} + B_{n,m} \lambda_{n,m} \alpha}{\sqrt{(1 + \lambda_{n,m}^2 \alpha^2) (A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2)}}$. Данное уравнение имеет две серии решений:

$$\alpha_k = \frac{\theta_{n,m}}{\lambda_{n,m}} \pm \frac{\xi_{n,m}}{\lambda_{n,m}} + \frac{2\pi k}{\lambda_{n,m}}, \quad k \in N,$$

где $\xi_{n,m} = \arccos \frac{B_{n,m}}{\sqrt{(1 + \lambda_{n,m}^2 \alpha^2) (A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2)}}$, N — множество натуральных чисел.

Другие значения α , для которых условие (3.13) выполняется, называются регулярными.

Итак, для регулярных значений α имеют место формулы (3.14), (3.15). Поэтому при выполнении условия (3.13) с учетом частных решений (2.5), (3.14), (3.15) решение задачи (1.2)–(1.5) в трехмерной области Ω можно представить в виде ряда

$$U(t, x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y. \quad (4.1)$$

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ сумма $U(t, x, y)$ ряда (4.1) удовлетворяет условиям (1.2).

Так как $0 < \lambda_{n,m} < 1$, то для любых n и m справедливы оценки

$$|u_{n,m}(t)| \leq C_1 (|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|), \quad (4.2)$$

$$|u'_{n,m}(t)| \leq C_2 (|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|), \quad (4.3)$$

$$|u''_{n,m}(t)| \leq C_3 (|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|), \quad (4.4)$$

где $0 < C_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 3}$.

Действительно, так как $0 < \lambda_{n,m} < 1$, $\lambda_{n,m} \rightarrow 1$ при $n, m \rightarrow \infty$, то для регулярных значений α на основании формул (3.14) и (3.15) найдем

$$|u_{n,m}(t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}| (\alpha + 2) e^\beta + |\psi_{n,m}| e^\beta], & t > 0, \\ \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}| (\alpha + 1) + |\psi_{n,m}| ((\beta + 1) e^\beta + 1)], & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.2), где $C_0 = |\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)| > 0$, $C_1 = \frac{1}{C_0} \max \{(\alpha + 2) e^\beta; (\beta + 1) e^\beta + 1\}$.

Дифференцируя выражения (3.14), (3.15), получаем

$$|u'_{n,m}(t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}| (\alpha + 1) e^\beta + |\psi_{n,m}| (1 + e^\beta)], & t > 0, \\ \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}| (\alpha + 1) + |\psi_{n,m}| (1 + (1 + \beta) e^\beta)], & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.3), где $C_2 = \frac{1}{C_0} \max \{(\alpha + 1) e^\beta; 1 + (1 + \beta) e^\beta\}$.

Дифференцируя выражения (3.14), (3.15) два раза, получаем

$$|u''_{n,m}(t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}| (\alpha + 2) e^\beta + |\psi_{n,m}| e^\beta], & t > 0, \\ \frac{1}{C_0} [2|\varphi_{n,m}| \alpha + |\psi_{n,m}| (1 + (1 + \beta) e^\beta)], & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.4), где $C_3 = \frac{1}{C_0} \max \{(\alpha + 2) e^\beta; 1 + (1 + \beta) e^\beta\}$.

Условие А. Пусть функции $\varphi(x, y) \in C^3([0; l] \times [0; l])$, $\psi(x, y) \in C^3([0; l] \times [0; l])$ на сегменте $[0; l]$ имеют кусочно-непрерывные производные четвертого порядка и $\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \psi(0, y) = \psi(l, y) = 0$, $\varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = \psi(x, 0) = \psi(x, l) = 0$, $\varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xx}(l, y) = \psi_{xx}(0, y) = \psi_{xx}(l, y) = 0$, $\varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yy}(x, l) = \psi_{yy}(x, 0) = \psi_{yy}(x, l) = 0$.

Пусть выполняются условия А. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m} &= - \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{p_{n,m}}{n^4}, \quad \varphi_{n,m} = - \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{p_{n,m}}{m^4}, \\ \psi_{n,m} &= - \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{q_{n,m}}{n^4}, \quad \psi_{n,m} = - \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{q_{n,m}}{m^4} \end{aligned}$$

и

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}^2 \leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\varphi_{xxxx}(x, y)]^2 dx dy,$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}^2 \leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\varphi_{yyyy}(x, y)]^2 dx dy,$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} q_{n,m}^2 \leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\psi_{xxxx}(x, y)]^2 dx dy,$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} q_{n,m}^2 \leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\psi_{yyyy}(x, y)]^2 dx dy.$$

С помощью этих оценок нетрудно убедиться, что ряд (4.1) равномерно сходится в области Ω .

Таким образом доказано, что справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. Пусть выполняются условия А. Тогда задача (1.2)–(1.5) однозначно разрешима в области Ω , если выполняется условие (3.13).

Дата поступления 21.10.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р., “О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне”, *Журн. СВМО*, **12:3** (2010), 37 – 42.
2. Турбин М. В., “Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 246 – 257.
3. Шабров С. А., “Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 1, 232 – 250.
4. Шабров С. А., “Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 168 – 179.
5. Узем Дж., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977, 622 с.
6. Benney D. J., Luke J. C., “Interactions of permanent waves of finite amplitude”, *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309 – 313.
7. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.
8. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение”, *Вестник ТомГУ. Математика и Механика*, **14:2** (2011), 59 – 69.

9. Юлдашев Т.К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14:2** (2012), 137 – 142.
10. Юлдашев Т.К., “Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 180 – 189.
11. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделирование*, **12:1** (2000), 94 – 103.
12. Иванчов Н.И., “Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **40:4** (2004), 547 – 564.
13. Пулькина Л. С., “Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени”, *Изв. вузов. Математика*, 2012, № 10, 32 – 44.
14. Гельфанд И. М., “Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений”, *УМН*, **14:3** (1959), 3 – 19.
15. Франкль Ф.И., *Избранные труды в газовой динамике*, Наука, М., 1973, 711 с.
16. Уфлянд Я. С., “К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях”, *Инженерно-физический журнал*, **7:1** (1964), 89 – 92.
17. Апаков Ю. П., “Трехмерный аналог задачи Трикоми для парабологиперболического уравнения”, *Сиб. журн. индустр. математики*, **14:2** (2011), 34 – 44.
18. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М., *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа*, Фан, Ташкент, 1986, 220 с.
19. Моисеев Е.И., “О разрешимости одной нелокальной краевой задачи”, *Дифференц. уравнения*, **37:11** (2001), 1565 – 1567.
20. Репин О. А., “Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе-Лыкова”, *Дифференц. уравнения*, **38:10** (2002), 1412 – 1417.
21. Сабитов К.Б., *К теории уравнений смешанного типа*, Физматлит, М., 2014, 301 с.
22. Сабитова Ю.К., “Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии”, *Математические заметки*, **98:3** (2015), 393 – 406.
23. Салахитдинов М. С., Уринов А. К., *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром*, Фан, Ташкент, 1997, 165 с.
24. Юлдашев Т.К., “О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15:3** (2013), 158 – 163.
25. Юлдашев Т.К., “Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка”, *Известия ИМИ УдГУ*, **47:1** (2016), 119 – 128.

26. Юлдашев Т. К., “Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска”, *Вестник ВолГУ. Серия 1: Математика. Физика*, **33:2** (2016), 13 – 26.

Nonlocal problem for a mixed type fourth order differential equation in three dimensional domain

© Т. К. Yuldashev³ A. V. Bagrova⁴

Abstract. This article considers solvability of nonlocal mixed-value problem for a three-dimensional homogeneous mixed-type fourth-order differential equation. Solution construction for such equation is examined, too. Spectral method based on separation of variables is used in the article. The criterion of one-value solvability of the problem considered is installed. Under this criterion one-valued solvability of the problem is proved.

Key Words: mixed-type differential equation, fourth-order equation, three-dimensional domain, integral conditions, one-valued solvability

³ Associate professor of Higher Mathematics Department, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com

⁴ Student of Institute of Engineering and Economy, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, nastyabagrova96@gmail.com