И. Т. Зарецкая, А. Г. Руткас, Управляемые и минимальные реализации голоморфных функций в пространстве с индефинитной метрикой,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 74–77

https://www.mathnet.ru/ivm5122

Утверждения п. 1° получены Г. П. Емгушевой и В. А. Ногиным, а п. 2° — Г. П. Емгушевой. Подробные доказательства этих утверждений приведены в [10], [11].

Авторы благодарят проф. С. Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения.— 1-е изд.— Ростов-на-Дону, 1984.— 208 с.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.— 1-е изд.— Минск, 1987.— 688 с.
3. Лизоркин П. И. Описание пространства $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Матем. сб.— 1970.— Т. 81 (123).— № 1.— С. 79—91.
4. Самко С. Г. О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1976.— Т. 40.— № 5.— С. 1143—1172.
5. Самко С. Г. Пространства $L^{\alpha}_{p,r}(R^n)$ и гиперсингулярные интегралы // Studia Math.— 1977.— V. 61.— № 3.— P. 193—230.
6. Ногин В. А. О сходимости гиперсингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 3.— С. 80—82.
7. Ногин В. А., Самко С. Г. О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой // В сб.: Дифференц. и интегр. уравнения и их прилож.— Элиста, 1982.— С. 119—131.
8. Емгушева Г. П., Ногин В. А. Риссовы производные с нестандартным урезанием и их применение к обращению и описанию потенциалов, коммутирующих с растяжениями // ДАН СССР.— 1988.— Т. 300.— № 2.— С. 277—280.
9. Wheeden R. L. A note on a generalized hypersingular integral // Studia Math.—1972.— V. 44.— № 1.—P. 17—26.
10. Емгушева Г. П., Ногин В. А. О сходимости гиперсингулярных интегралов с нестандартным урезанием.— Ростов-на-Дону, 1987.— 40 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 22.05.1987, № 3714— В87.
11. Емгушева Г. П. О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с нестандартным урезанием.— Ростов-на-Дону, 1988.— 12 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 05.04.88, № 2590— В88.

г. Элиста
г. Ростов-на-Дону

Поступила
13.10.1989

И. Т. Зарецкая, А. Г. Руткас

УДК 517.98

УПРАВЛЯЕМЫЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

1°. Пусть $\Theta(\zeta)$ — голоморфная функция, значения которой суть ограниченные линейные операторы $\Theta(\zeta_0): \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ в гильбертовых пространствах F, G. Реализацией функции $\Theta(\zeta)$ называется ее представление

$$\Theta(\zeta) = \Theta_U(\zeta) = S + \zeta G (I - \zeta T)^{-1} F, \ \zeta^{-1} \in \rho(T), \tag{1}$$

с помощью блоков ограниченного оператора (узла)

$$U = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} : H \oplus \mathrm{F} \to H \oplus \mathrm{G}, \tag{2}$$

где H — гильбертово пространство. Если $\|\Theta(\zeta)\| < 1$ в круге $|\zeta| < 1$, то существует представление (1) с унитарным U, и $\Theta(\zeta)$ называется характеристической функцией (х. ф.) сжатия T [1]—[3]. Спектральный анализ сжатия T используется для исследования пассивных систем рассеяния с функцией рассеяния $\Theta(\zeta)$ [3], [4]. Ядро типа Шварца — Пика

$$F(\zeta, \mu) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{I - \Theta^*(\zeta)\Theta(\mu)}{1 - \bar{\zeta}\mu} & \dfrac{\Theta^*(\zeta) - \Theta^*(\mu)}{\bar{\zeta} - \bar{\mu}} \\ \dfrac{\Theta(\zeta) - \Theta(\mu)}{\zeta - \mu} & \dfrac{I - \Theta(\zeta)\Theta^*(\mu)}{1 - \zeta\bar{\mu}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

для сжимающей оператор-функции $\Theta(\zeta)$ эрмитово-неотрицательно ($F \gg 0$ [1]). Для функций рассеяния $\Theta(\zeta)$ непассивных радиофизических систем ядро (3) лишь эрмитово-симметрично и естественным является представление вида (1) в пространстве реализации (2) с индефинитной метрикой [5], [6]. Если узел U (2) является унитарным (сжимающим) по отношению к метрике

Крейна (jh, h_1) пространства H $(j=j^*, j^2=I)$, то реализация (1) называется J-унитарной (J-сжимающей), где $J=j\oplus I_{F(G)}$. Для широкого класса функций $\Theta(\zeta)$, голоморфных в окрестности точки $\zeta=0$, модельное j-пространство H и J-унитарная реализация построены в [7] с помощью ядра (3).

2°. Подпространствами управляемости H_Y, наблюдаемости H_H и главным подпространством H_0 называются соответственно

$$H_Y=V\{T^nFf\},\ H_H=V\{(T^+)^nG^+g\},\ H_0=V\{H_Y,\ H_H\}\ (\forall n\geqslant 0,\ f\in F,\ g\in G). \tag{4}$$

Реализация (1) называется простой, если $H_0=H$, управляемой, если $H_Y=H$, наблюдаемой, если $H_H=H$, минимальной, если $H_Y=H_H=H$. Наша цель — построить такие реализации по известной, напр., из [1] или [7] J-унитарной реализации с избыточным модельным j-пространством H. Метод проектирования, сразу приводящий к цели в дефинитном случае [3], требует здесь некоторой модификации, т. к. подпространства (4) могут быть j-вырожденными или не допускающими j-проектирования.

Через P_M обозначается оператор ортогонального (в гильбертовой метрике) проектирования на подпространство $M\,(\subset H)$.

Лемма 1. *Всякая J-унитарная реализация* (1) *функции* $\Theta(\zeta)$ *в j-пространстве H индуцирует в некотором j-невырожденном подпространстве $\hat{H}\,(\subset H)$ простую реализацию функции* $\Theta(\zeta)$, *унитарную относительно индуцированной в $\hat{H}$ невырожденной метрики* $(Q\hat{h},\ \hat{h})=$ $=(jP_{\hat{H}}\hat{h},\ P_{\hat{H}}\hat{h})$.

Доказательство. Положим $\hat{H}=\overline{P_{H_0}j(H_0)}$, где H_0 — главное подпространство (4), и в качестве оператора Грама Q выберем сужение проекции $P_{H_0}j\,|_{H_0}$ на подпространство $\hat{H}\,(\subset H_0)$. Искомая реализация строится как х. ф. $\Theta(\zeta)=\Theta_{\hat{U}}(\zeta)$, где $\hat{U}=(P_{\hat{H}}\oplus I)\,U\,(P_{\hat{H}}\oplus I)$ — ограниченный Q-унитарный узел.

3°. Реализацию (1) назовем H_Y-приведенной, если j-метрика приводится подпространством H_Y (4): $H=H_Y\oplus D\Rightarrow j=j_Y\oplus j_D$. Здесь из $U^*D\subset D$ (см. (4)) следует $U^+D\subset D$, поэтому ортогональная проекция

$$U_Y=(P_{H_Y}\oplus I_G)\,U\,(P_{H_Y}\oplus I_F) \tag{5}$$

определяет управляемую реализацию $\Theta(\zeta)=\Theta_{U_Y}(\zeta)$ в j_Y-пространстве H_Y $(j_Y^2=I)$.

Пусть подпространство H_Y является j-проекционно полным (но не j-приводящим). Тогда j-проектор $P: H\to H_Y$ $(P^+=P,\ P^2=P)$ определяет j-ортогональное разложение $H=$ $=H_Y[+]D_1$. При замене P_{H_Y} на P в (5) получается узел U_Y, задающий управляемую реализацию $\Theta(\zeta)=\Theta_{U_Y}(\zeta)$ в пространстве H_Y с индуцированной Q-метрикой $(P^*jPh,\ h)$. Введением эквивалентной гильбертовой метрики H_Y превращается в пространство Крейна.

Лемма 2. *Пусть подпространство H_Y* (4) *простой J-унитарной реализации* (1) *j-невырождено. Тогда существует J-унитарная $\hat{H}_Y$-приведенная реализация* $\Theta(\zeta)=\Theta_{\hat{U}}(\zeta)$ *в $\hat{j}$-пространстве $\hat{H}$, которая $(j,\ \hat{j})$-изометрически эквивалентна исходной реализации.*

Доказательство. С помощью блоков метрического оператора $j=\begin{bmatrix} j_0 & j_2 \\ j_2^* & j_3\end{bmatrix}: H_Y\oplus D\to$ $\to H_Y\oplus D$ строится отображение

$$v=\begin{bmatrix} |j_0|^{1/2} & -|j_0|^{1/2}j_2j_3^{-1} \\ 0 & |j_3|^{-1/2}\end{bmatrix}: H_Y\oplus D\to\hat{H}_Y\oplus\hat{D}\doteq\hat{H}.$$

В пространстве $\hat{H}$ метрический оператор $\hat{j}$ задается так: $\hat{j}=vjv^*=\hat{j}_Y\oplus\hat{j}_D$. Искомая $\hat{H}_Y$-приведенная реализация строится с помощью узла $\hat{U}=(v\oplus I_G)\,U\,(v^+\oplus I_F)$. Если блок j_0 (j_3) неограничено обратим[1], то полученный оператор $\hat{U}$ может быть неограниченным, однако ограниченность его проекции $\hat{U}_Y$ в смысле (5) гарантируется.

Теорема 1. *Если значения функции $\Theta(\zeta)$ вполне обратимы, то подпространство управляемости H_Y для любой ее J-унитарной реализации* (1) *j-невырождено и с точностью до $(j, \hat{j})$-изометрического преобразования реализация* (1) *индуцирует управляемую реализацию функции $\Theta(\zeta) = S + \zeta\hat{G}_Y(I-\zeta\hat{T}_Y)^{-1}\hat{F}_Y$.*

4°. Выделение наблюдаемой части J-унитарной реализации функции $\Theta(\zeta) = \Theta_U(\zeta)$ (1) равносильно выделению управляемой части J-унитарной реализации функции $\Theta^+(\overline{\zeta}) = \Theta_{U^+}(\zeta)$.

5°. Для выделения минимальной части реализации $\Theta_U(\zeta)$ (1) воспользуемся разложениями пространств $H = H_Y \oplus D$, $H_Y = H_{YH} \oplus D_{YH}$, где $H_{YH} = P_{H_Y} H_H$. Предположим, что H_Y есть j-проекционно полное подпространство, H_{YH} есть j-невырожденное подпространство. Получив по узлу U сначала узел $\hat{U}$ из леммы 2, а затем еще раз применив лемму 2 для выделения наблюдаемой части в подпространстве управляемости $\hat{H}_Y$, приходим к $\tilde{H}_{YH}$-приведенному J-унитарному узлу $\tilde{U}$. Проекция $U_m = (P_{\tilde{H}_{YH}} \oplus I_{\mathrm{G}})\tilde{U}(P_{\tilde{H}_{YH}} \oplus I_{\mathrm{F}})$ определяет минимальную реализацию нашей функции $\Theta(\zeta) = \Theta_{U_m}(\zeta)$ в пространстве $\tilde{H}_{YH}$.

Теорема 2. *Пусть значения функции $\Theta(\zeta)$ вполне обратимы. Тогда минимальное подпространство H_{YH} для любой ее H_Y-приведенной J-унитарной реализации невырождено.*

Теорема 3. *Пусть для простой J-унитарной реализации* (1) *подпространства H_Y, H_{YH} являются проекционно полными. Тогда ядро Шварца — Пика* (3) *для функции $\Theta(\zeta)$ представляется в виде суммы ядер*

$$F(\zeta, \mu) = \mathrm{L}(\zeta, \mu) + \frac{1}{1-\overline{\zeta}\mu}\mathrm{M}(\zeta, \mu) + \frac{1}{1-\zeta\overline{\mu}}\mathrm{N}(\zeta, \mu). \tag{6}$$

Ядра L, M, N *факторизуются в пространствах $\tilde{H}_{YH}$, $\tilde{D}_{YH}$, $\tilde{D}$ с метрическими сигнатурными операторами j_{YH}, $j_{D_{YH}}$, j_D соответственно:*

$$\mathrm{L}(\zeta, \mu) = A^*_{YH}(\zeta) j_{YH} A_{YH}(\mu), \quad \mathrm{M}(\zeta, \mu) = C^*(\zeta) j_{D_{YH}} C(\mu), \quad \mathrm{N}(\zeta, \mu) = B(\zeta) j_D B^*(\mu).$$

Ядро L называется осцилляционным, а ядра M, N — демпфирующими. В электрических цепях число положительных (отрицательных) квадратов формы $(j_{YH}h, h)$ не превосходит числа пассивных (активных) колебательных элементов, а у форм $(j_{D_{YH}}h, h)$, $(j_D h, h)$ — соответственно числа пассивных (активных) сопротивлений [5], [6].

6°. Если ядро F (3) вполне обратимой функции $\Theta(\zeta)$ имеет конечный ранг индефинитности, то пространство J-унитарной простой реализации H является пространством Понтрягина $\pi_\varkappa$ [7]. Здесь все подпространства H_Y, H_H, H_{YH} являются проекционно полными, так что описанные процедуры выделения управляемой, наблюдаемой, минимальной реализаций корректны вместе с представлением ядра (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ линейных операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1970.— 431 с.

2. Бродский М. С. Унитарные операторные узлы и их характеристические функции / УМН.— 1978.— Т. 33.— № 4 (203).— С. 141—168.

3. Аров Д. З. Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. матем. журн.— 1970.— Т. 22.— № 2.— С. 211—227.

4. Helton J. W. The Characteristic Functions of Operator Theory and Electrical Network Realization // Indiana Univ. Math. J.— 1972.— V. 22.— № 5.— P. 403—414.

[1] В условиях леммы операторы j_0^{-1}, j_3^{-1} существуют, они ограничены либо неограничены одновременно.

5. Руткас А. Г. Свойства функции рассеяния и прохождения волн в структурах с заданной геометрией // ДАН СССР.— 1976.— Т. 23.— № 1.— С. 38—40.
6. Руткас А. Г. Матрицы передачи и рассеяния многополюсника // Мат. моделирование и теория электрических цепей.— Киев, 1978.— Вып. 16.— С. 3—15.
7. Руткас А. Г. Унитарные реализации голоморфных функций в пространстве с индефинитной метрикой // ДАН УССР.— 1984.— № 4.— С. 16—19.

г. Харьков

Поступила
01.02.1990

А. И. Кириллов

УДК 517.982

О СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ L^p В СЛУЧАЕ МЕР НА ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, **B** есть σ-алгебра его борелевских подмножеств, m — мера на **B**, $C(X)$ — банахово пространство непрерывных на X ограниченных функций с топологией равномерной сходимости на X, $C_0(X)$ состоит из функций с компактными носителями, L^p — пополнение $C_0(X)$ по норме

$$\|f\| = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, dm(x)\right)^{1/p},$$

M — пространство классов эквивалентных по отношению $\rho(A, B) = m(A\Delta B)$ множеств из **B** конечной меры m. Расстояние в M определяется функцией ρ.

Вопрос о сепарабельности L^p важен для приложений, и с этой точки зрения он недостаточно освещен в монографиях по функциональному анализу. Известно, что L^p сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно пространство M ([1], с. 174). В частности, L^p сепарабельно, если X — локально-компактное пространство со счетной базой ([2], с. 142) или сепарабельная локально-компактная группа ([1], с. 260). В этой заметке рассматривается случай, когда X — локально выпуклое топологическое векторное пространство, а m — радонова вероятностная мера на **B**. Соответствующее пространство L^2 широко используется в теории представлений непрерывных групп, квантовой теории поля и статистической физике (см., напр., [3], с. 451; [4], гл. 7).

Обозначим через X' топологическое сопряженное к X, через $\langle x', x\rangle$, где $x' \in X'$, $x \in X$, — каноническую билинейную форму двойственности X' и X.

Теорема. *Если X' сепарабельно в сильной топологии, мера m радонова и конечна, то пространство L^p сепарабельно.*

Схема доказательства. Достаточно проверить, что сепарабельно пространство L^2. Для этого, во-первых, из теоремы Стоуна — Вейерштрасса ([2], с. 119) выводим, что если $u \in C_0(X)$ и $\forall x' \in X'$ $(u, \exp(i\langle x', x\rangle)) = 0$, то $u \equiv 0$. Отсюда следует, что линейная оболочка функций $\exp(i\langle x', x\rangle)$ плотна в L^2 (ср. [3], с. 454), и остается показать, что эта линейная оболочка сепарабельна. Всюду плотное в ней счетное множество образуют функции вида $\sum\limits_k (a_k + ib_k)\exp(i\langle x'_k, x\rangle)$, где a_k и b_k — рациональные числа, а $x'_1, x'_2, \ldots$ — последовательность, всюду плотная в X'. Для доказательства этого утверждения используется то, что мера m радонова.

Замечание. Очевидно, что утверждение теоремы справедливо и в случае σ-конечной радоновой меры m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халмош П. Теория меры.— М.: Ин. лит., 1953.— 292 с.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. I. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1977.— 360 с.
3. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М.: Физматгиз, 1961.— 472 с.
4. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе.— Киев, 1988.— 680 с.

г. Москва

Поступила
27.11.1990