A. Y. Plushkevichene, On elimination of cut-type rules from Robinson and Presburger axiomatic systems, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 186–199

А.Ю.Плюшкевичене

ОБ УСТРАНЕНИИ ПРАВИЛ ТИПА СЕЧЕНИЯ ИЗ АКСИОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ РОБИНСОНА И ПРЕСБУРГЕРА*)

I. Как следует из [I] , для произвольных аксиоматически заданных теорий с равенством можно указать способы устранения широкого класса правил типа сечения. В настоящей заметке на примере арифметических исчислений Робинсона и Пресбургера показано,что сочетание общих методов заметки [I] с рассмотрением специфических особенностей исследуемых теорий позволяет построить исчисления, существенно лучше приспособенные для поиска вывода. Для арифметической системы Робинсона строится исчисление, не содержащее правил типа сечения. При этом устраняется правило типа сечения, соответствующее уравнивающей аксиоме, в которой все дизъюнктивные члены имеют вид равенства двух термов. Правила такого типа не устраняются на основе методов заметки [I] . Из возможности построения исчисления, не содержащего правил типа сечения, следует доказательство непротиворечивости рассматриваемого исчисления. Исследование конкретных аксиоматических теорий позволяет также избежать неприятных эффектов (связанных со сложностью оперирования с вариантом - (см. [2]), возникающих для некоторых аксиоматических теорий (в частности, для исчисления Пресбургера).

2. Рассмотрим вариант системы Р.Робинсона, построенный в [3] и обозначенный посредством R_3 . В исчислении R_3 следующим аксиомам соответствуют правила (I) и (2):

---

*) Основные результаты заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 19 мая 1970 г.

$$1. \to \forall x\,(x = Pd(x')) \qquad 2. \to \forall x\,(x + 0 = x)$$

$$3. \to \forall x_1 x_2\,(x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)') \qquad 4. \to \forall x\,(x \cdot 0 = 0)$$

$$5.\ \forall x_1 x_2\,(x_1 \cdot x_2' = (x_1 \cdot x_2) + x_1).$$

Pd – одноместный функциональный символ предшествования; следующим двум аксиомам соответствуют правила типа сечения:

$$6. \to \forall x\,(x' \neq 0) \qquad 7. \to \forall x\,(x = 0 \vee x = (Pd(x))').$$

Введем исчисление R, получаемое из R_3:

(а) заменой правила

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ t' = 0}{\Gamma \to \Delta} \tag{3}$$

следующими схемами аксиом

$$\Gamma_1, t^{\overbrace{/\ldots/}^{k+1\ \text{раз}}} = 0^{\overbrace{/\ldots/}^{k\ \text{раз}}},\quad \Gamma_2 \to \Delta, \tag{4}$$

$$\Gamma_1, 0^{\overbrace{/\ldots/}^{k\ \text{раз}}} = t^{\overbrace{/\ldots/}^{k+1\ \text{раз}}},\quad \Gamma_2 \to \Delta, \tag{5}$$

где $k \geqslant 0$;

(в) введением дублирования главной формулы в правилах для равенства и в правилах (I) и (2) (см.[2]). Правила полученные из правил вида (I) и (2) введением дублирования главной формулы, будем обозначать в дальнейшем через (I^*) и (2^*) соответственно.

Как следует из [2] имеет место следующая

Теорема I. Исчисления R_3 и R равнообъемны.

Обозначим через R^* исчисление, получаемое из R заменой правила

$$\frac{t=0,\ \Gamma\to\Delta;\quad t=(Pd(t))',\ \Gamma\to\Delta}{\Gamma\to\Delta} \tag{6}$$

следующими правилами вывода:

$$\frac{\Gamma_1\to\Delta_1;\ \Gamma_2\to\Delta_2}{\Gamma\to\Delta}, \tag{7}$$

где для некоторого t $\frac{\Gamma_1\to\Delta_1}{\Gamma\to\Delta}$ совпадает с таким правилом (1^*) или (2^*), которое соответствует равенству $t=0$; $\Gamma_2\to\Delta_2$ получается из $\Gamma\to\Delta$ аналогично (с использованием равенства $t= =(Pd(t))'$) . Точнее

$$\Gamma,\Delta \doteq \Sigma_1,[A|^{\alpha}_{p_i}],\Sigma_2,[B|^{\beta}_{p_j}],\Sigma_3;$$

$$\Gamma_i,\Delta_i \doteq \Sigma_1,[A|^{\alpha}_{p_i'}],[A|^{\alpha}_{p_i}],\Sigma_2,[B|^{\beta}_{p_j}],\Sigma_3;$$

$$\Gamma_j,\Delta_j \doteq \Sigma_1,[A|^{\alpha}_{p_i}],\Sigma_2,[B|^{\beta}_{p_j'}],[B|^{\beta}_{p_j}],\Sigma_3,$$

где $i\in\{1,2\}$, $j\in\{1,2\}$, $i\neq j$,

$$p_1\in\{0,t\},\quad p_1'\in\{0,t\},\quad p_1\neq p_1',$$

$$p_2\in\{t,(Pd(t))'\},\ p_2'\in\{t,(Pd(t))'\},\quad p_2\neq p_2',$$

A и B могут совпадать.

<u>Теорема 2.</u> И с ч и с л е н и я R и R^* р а в н о о б ъ - е м н ы .

3. Для доказательства теоремы 2 введем некоторые вспомогательные понятия и обозначения. Выражение $t^{[m]}$, где t - произ-

вольный терм, а $m \geqslant 0$, будет обозначать терм $t^{\overbrace{\prime \ldots \prime}^{m \text{ раз}}}$

Введем следующее исчисление, обозначаемое посредством S выводимыми объектами которого являются объекты вида $t \Rightarrow 0^{[k]}$ где $\Rightarrow$ новый формальный символ.

Аксиома : $0 \Rightarrow 0$

Правила вывода:

I. $\dfrac{p \Rightarrow 0^{[k]}}{p' \Rightarrow 0^{[k+1]}}$, где $k \geqslant 0$;

2. $\dfrac{p \Rightarrow 0^{[r]} \; ; \; q \Rightarrow 0^{[s]}}{p + q \Rightarrow 0^{[r+s]}}$, где $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$;

3. $\dfrac{p \Rightarrow 0^{[k+1]}}{\operatorname{Pd} p \Rightarrow 0^{[k]}}$, где $k \geqslant 0$;

4. $\dfrac{p \Rightarrow 0}{v \cdot p \Rightarrow 0}$, где v произвольный терм;

5. $\dfrac{p \Rightarrow 0^{[r]} ; \; q \Rightarrow 0^{[s]}}{p \cdot q \Rightarrow 0^{[r \cdot s]}}$,где $r \geqslant 0$, $s \geqslant 1$.

Легко видеть что проблема выводимости в исчислении S разрешима.

Все подтермы терма v в правиле 4 исчисления S будем называть о с о б е н н ы м и термами. Выражение $\vdash t \Rightarrow 0^{[k]}$ будет означать, что объект $t \Rightarrow 0^{[k]}$ выводим в исчислении S. Если в исчислении R^* можно построить фигуру V , состоящую только из n применений правил (I^*) и (2^*) и такую, что для некоторых A и α при любом i , $1 \leqslant i \leqslant n$, главная формула $[A|^{\alpha}_{t_i}]$ i-го применения правила в V является предком (см.

[4]) произвольного вхождения формулы вида $[A|^{\alpha}_{t_1}]$ в нижнюю секвенцию фигуры $\mathfrak{V}$, то будем говорить, что существует а к с и о м н а я   д е д у к ц и я   т е р м а t_1 и з   т е р м а t_{n+1}.

<u>Теорема 3</u>. Д л я   т о г о ,   ч т о б ы $\vdash t \Rightarrow 0^{[k]}$ $(k \geqslant 0)$ н е о б х о д и м о   и   д о с т а т о ч н о ,   ч т о б ы   с у щ е с т в о в а л а   а к с и о м н а я   д е д у к ц и я   т е р м а t и з   т е р м а $0^{[k]}$.

Для доказательства теоремы 3 используются следующие леммы.

<u>Лемма I.</u> Для любого $k \geqslant 0$, если $\vdash [A|^{\alpha}_{z}] \Rightarrow 0^{[k]}$ и в данном выводе в исчислении S все применения правила 4 таковы, что z не является особенным термом, то $\vdash z \Rightarrow 0^{[\ell]}$ $(\ell \geqslant 0)$.

<u>Лемма 2</u>. Для любого $k \geqslant 0$, если

$$\vdash [A|^{\alpha}_{z}] \Rightarrow 0^{[k]}, \quad \vdash z \Rightarrow 0^{[\ell]}, \quad \vdash x \Rightarrow 0^{[\ell]}, \text{ то}$$

$$\vdash [A|^{\alpha}_{x}] \Rightarrow 0^{[k]}.$$

Заметим, что используя теорему 3 и лемму I, можно дать другое, более простое чем в [2], доказательство равнообъемности исчислений R_3 и R.

Лемма I существенно используется для доказательства леммы 3 (см. ниже).

Вывод в исчислении R_3 или R будем называть р е г у л я р н ы м (см. аналогичное определение в [I]), если все применения правил (6) находятся над применениями логических правил, но ниже всех применений правил для равенства и правил вида (I) и ( ), а также всех применений правил (3). Легко видеть, что произвольный вывод в исчислении R_3 или R можно перестроить в регулярный вывод в том же исчислении и с той же последней секвенцией. Имеет место следующая, важная для доказательства теоремы 2,

<u>Лемма 3.</u> По произвольному регулярному выводу $\mathfrak{V}$ в исчислении R_3 можно построить вывод $\mathfrak{V}^*$ в исчислении R с той же последней секвенцией, в котором главная формула любой антецедент-

ной аксиомы может быть предком формулы вида $t=(Pd(t))'$ только тогда, когда $\vdash t\Rightarrow 0^{[k]}$ $(k\geqslant 0)$.

4. Применение правила (6) будем называть вырожденным, если $\vdash t\Rightarrow 0^{[k]}$ $(k\geqslant 0)$. Применение правила (6) будем называть нормальным, если ни одна боковая формула этого применения не является потомком (см. [4]) главной формулы антецедентной аксиомы. Невырожденное применение правила (6) будем называть особенным, если лишь левая боковая формула этого применения является потомком главной формулы антецедентной аксиомы.

Лемма 4. Произвольный регулярный вывод $\mathfrak{V}$ в исчислении R можно перестроить в вывод в том же исчислении с той же последней секвенцией, в котором все применения правила (6) либо особенные, либо нормальные.

Наметим план доказательства леммы 4. Согласно теореме I данный вывод $\mathfrak{V}$ в исчислении R перестраиваем в вывод $\mathfrak{V}'$ в исчислении R_3. Вывод $\mathfrak{V}'$, согласно лемме 3, перестраиваем в вывод $\mathfrak{V}^*$. В выводе $\mathfrak{V}^*$ все применения правила (6) либо вырожденные, либо особенные, либо нормальные. Возможность перестройки вывода $\mathfrak{V}^*$ в вывод, не содержащий вырожденных применений правила (6), доказывается, путем поочередного устранения вырожденных применений правила (6), с уменьшением при этом общего числа применений правил (6). На каждом шаге устранения вырожденного применения правила (6) рассматриваемое применение правила выносится над всеми другими применениями правил (6). При этом может появиться несколько применений правила (6) с теми же боковыми формулами, что и рассматриваемое применение, однако все эти применения устраняются одинаково на этом шаге (аналогичная перестройка вывода делается при доказательстве леммы 5).

Потомок некоторой формулы, не имеющий потомков в данном выводе, будет называться основным потомком формулы.

Лемма 5. Произвольный прополотый вывод в исчислении R можно перестроить в вывод, содержащий лишь нормальные применения правила (6).

Для доказательства леммы 5 используется лемма 4. Кроме того, показывается, что вывод левой посылки особенного применения правила (6) можно перестроить в вывод, в котором главная формула аксиомы имеет того же основного потомка, что и главная формула аксиомы в правой посылке.

Применение правила для равенства в выводе в исчислении будем называть **п р и в е д е н н ы м**, если вспомогательная формула $\mathfrak{A}$ и все ее потомки совпадают с подформулой конечной секвенции или основного потомка формулы $\mathfrak{A}$. Произвольный регулярный вывод в исчислении R, в котором над применениями правил (6) находятся лишь применения правил (I^*) и (2^*) и приведенных правил для равенства, будем называть **п р и в е д е н н ы м в ы в о д о м**.

Лемма 6. Произвольный вывод в исчислении R можно перестроить в приведенный вывод с той же последней секвенцией и с теми же основными потомками главных формул аксиом, что и в исходном выводе. Любой прополотый приведенный вывод в исчислении R не содержит применений правил для равенства и правил (I^*) и (2^*), главная формула которых не является потомком главной формулы аксиомы.

Заметим, что лемма 6 тривиально обобщается на случай произвольного исчисления, соответствующего аксиоматически заданной теории с равенством.

Приведенный вывод, в котором применения правила (6) только нормальные, будем называть **н о р м а л ь н ы м в ы в о д о м**.

Лемма 7. Произвольный вывод в исчислении R можно перестроить в нормальный вывод в том же исчислении с той же последней секвенцией.

Для доказательства леммы 7 используются леммы 5 и 6.

Пусть $R^{*'}$ - исчисление, получаемое из R^* заменой правила (7) правилом (7′), которое получается из (7) путем введения боковых формул из правила (6).

Лемма 8. Произвольный вывод в исчислении R можно пере -

строить в вывод в исчислении $R^{*'}$ с той же последней секвенцией.

Для доказательства леммы 8 используется лемма 7.

<u>Лемма 9.</u> Произвольный вывод в исчислении $R^{*'}$ можно перестроить в вывод в исчислении R^{*} с той же последней секвенцией.

Используя леммы 8 и 9, можно получить доказательство теоремы 2. Как следствие из теорем I и 2, получаем непротиворечивость арифметической системы Р.Робинсона.

<u>Замечание I.</u> Обозначим посредством R^{+} исчисление, получаемое из исчисления R^{*} путем удаления аксиомы (4) или аксиомы (5). Используя методику, применяемую при доказательстве теоремы 2, можно доказать равнообъемность исчислений R_3 и R^{+}. Однако, заметим, что для поиска вывода удобнее пользоваться исчислением R^{*}.

5. Рассмотрим вариант арифметической системы Пресбургера [5]. Исчисление, построенное по этой системе в соответствии с [3] обозначим посредством $\mathfrak{P}$. В исчислении $\mathfrak{P}$ правила вида (I) и (2) соответствуют следующим аксиомам:

I) $\rightarrow \forall x_1 x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$;

2) $\rightarrow \forall x_1 x_2 x_3 (x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$;

3) $\rightarrow \forall x (x + 0 = x)$;

4) $\rightarrow \forall x_1 x_2 (x_1 + \varphi(x_1, x_2) = x_2)$, где φ - двухместный функциональный символ вычитания; правила типа сечения в исчислении $\mathfrak{P}$ соответствуют следующим аксиомам:

5) $\rightarrow \forall x_1 x_2 ((\alpha x_1 \neq \alpha x_2) \vee (x_1 = x_2))$;

6) $\rightarrow \forall x \left(\bigvee_{i=0}^{(\alpha-1)} (\alpha g_\alpha(x) + i = x) \right)$;

7) $\rightarrow \forall x (\alpha x + 1 \neq 0)$,

где $\alpha = 2, 3, \ldots$, αx означает $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{\alpha \text{ раз}}$,

g_α - одноместный функциональный знак.

Допустимыми значениями предметных переменных в этой системе являются целые числа.

Как следует из заметки [I], можно построить исчисление T_1, равнообъемное исчислению $\mathfrak{N}$. В исчислении T_1 правило типа сечения, соответствующее аксиоме 5)[*] заменяется однопосылочным правилом вида (5), вводящим в посылку лишь подтерм аксиомы, имеющей вид равенства, а правило типа сечения, соответствующее аксиоме 7), заменяется схемой аксиом вида (6). Однако при этом правила, получаемые по схеме правил (5), и аксиомы, получаемые по схеме (6), практически необозримы из-за сложности определения вариантов формул $\alpha x_1 = \alpha x_2$ и $\alpha x + 1 = 0$ по данной системе специфических аксиом. Более глубокий анализ исчисления $\mathfrak{N}$ показал, что достаточно ввести правило IO (см. ниже), чтобы иметь исчисление, хорошо приспособленное к поиску вывода, и избежать присоединения большого количества правил вида (5) и аксиом вида (6).

Введем исчисление $\mathfrak{N}'$, получаемое из $\mathfrak{N}$ следующими преобразованиями I) - 3):

I) **заменой правила**

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \alpha t + 1 = 0}{\Gamma \to \Delta} \tag{8}$$

следующими схемами аксиом

$$\begin{gathered} \Gamma_1, \alpha t + 1 = 0, \Gamma_2 \to \Delta \\ \Gamma_1, 0 = \alpha t + 1, \Gamma_2 \to \Delta \end{gathered} \tag{9}$$

и следующим правилом вывода

$$\frac{\Gamma_1, \tau = p, \quad \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, t + \tau = t + p, \Gamma_2 \to \Delta} \tag{IO}$$

---

[*] Вопрос об устранении правила типа сечения, соответствующего аксиоме 6) в этой заметке не рассматривается. Отметим лишь, что устранение правила типа сечения такого вида для исчисления Р.Робинсона проведено в п.п. 2-4 настоящей заметки.

2) заменой правила

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ \alpha\tau = \alpha s;\quad \tau = s,\ \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta} \qquad (II)$$

правилом вывода

$$\frac{\Gamma_1,\ \tau = s,\ \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1,\ \alpha\tau = \alpha s,\ \Gamma_2 \to \Delta} \qquad (I2)$$

3) заменой правил для равенства и правил вида (I) и (2) правилами, в которых дублируется антецедентная главная формула (см. п.2 настоящей заметки).

Теорема 4. Исчисления $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ равнообъемны.

Наметим доказательство этой теоремы. Исходя из вида специфических аксиом I)—4), которым соответствуют правила вида (I) и (2) в исчислении $\mathfrak{N}$, можно доказать следующую лемму.

Лемма I0. (а) По выводу, состоящему только из применений правил вида (I) и (2), секвенции $\to \alpha p = \alpha q$ в исчислении $\mathfrak{N}$ можно построить вывод в том же исчислении секвенции $\to p = q$, состоящий только из применений правил вида (I) и (2); (в) Нельзя построить вывод секвенции $\to \alpha t + 1 = 0$ в исчислении $\mathfrak{N}$, состоящий только из применений правил вида (I) и (2),

Применение правила (II) будем называть вырожденным, если левая посылка этого применения имеет вид $\to \alpha p = \alpha q$ и выводима в исчислении $\mathfrak{N}$, применяя только правила вида (I) и (2).

Лемма II. Произвольный прополотый вывод в исчислении $\mathfrak{N}$ можно перестроить в вывод с той же последней секвенцией и в том же исчислении, не содержащий вырожденных применений правила (II).

Лемма II доказывается индукцией по числу вырожденных применений правила (II). При устранении каждого вырожденного применения правила (II) используется лемма I0 (а) и устранимость правила сечения в исчислении $\mathfrak{N}$ (см. [3]).

Лемма I2. Вывод в исчислении $\mathfrak{N}$, последний шаг которого состоит в применении правила (8), выше которого есть только применения правил для равенства и правил вида (I) и (2), можно перестроить в вывод в исчислении $\mathfrak{N}'$ с той же самой последней секвенцией.

Доказательство: Можно считать, что в данном выводе все применения правил для равенства и правил вида (I) и (2) являются сукцедентными и односторонними (например, левосторонними). Тогда данный вывод имеет вид:

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{c} \Gamma_1,\ \tau=s\ ,\ \Gamma_2\rightarrow\Delta,\ 0=0 \\ \cdots \\ \Gamma_1,\ \tau=s,\ \Gamma_2\rightarrow\Delta, \alpha t+1=0 \end{array}\right.$$
$$\frac{\Gamma_1,\ \tau=s,\ \Gamma_2\rightarrow\Delta, \alpha t+1=0}{\Gamma_1\ ,\ \tau=s, \Gamma_2\rightarrow 0} \qquad (8)$$

Как следует из леммы IO (b) антецедент последней секвенции данного вывода не пуст[ж)]. Перестроим этот вывод в вывод в исчислении $\mathfrak{N}'$ с той же последней секвенцией.

$$\Gamma_1, \alpha t+1=0, \Gamma_2\ ,\ \tau=s\ , \sum{}'\rightarrow\Delta$$
$$\cdots$$
$$\frac{\Gamma_1,\ 0=0,\ \Gamma_2\ ,\ \tau=s,\ \sum\rightarrow\Delta}{\dfrac{\Gamma_1,\ \tau+0=\tau+0,\ \Gamma_2,\ \tau=s\ ,\sum\rightarrow\Delta}{\dfrac{\Gamma_1,\ \tau+0=s+0\ ,\ \Gamma_2,\ \tau=s,\ \tau+0=s\rightarrow\Delta}{\dfrac{\Gamma_1\ ,\ \tau+0=s\ ,\ \Gamma_2\ ,\ \tau=s\rightarrow\Delta}{\Gamma_1\ ,\ \tau=s\ ,\ \Gamma_2\rightarrow\Delta}\ (2^*)_3\rightarrow}\ (2^*)_3\rightarrow}\ =\rightarrow}$$

где $\sum \rightleftharpoons\ \tau+0=s\ ,\ \tau+0=s+0\ ,\ \sum' \rightleftharpoons \sum\sum_1$, где $\sum_1$ возникает из-за дублирования главных формул в выводе $\mathcal{D}'$.

Через $\mathcal{D}'$ обозначен вывод, получаемый из вывода $\mathcal{D}$ очевидным образом. Через $(2^*)_i$ здесь и в дальнейшем обозначено применение правила (2^*), соответствующего специфической аксиоме i .

Лемма I3. Прополотый вывод, последний шаг которого состоит в применении невырожденного правила (II), посылки которого есть выводы в исчислении $\mathfrak{N}'$ (без применения логических правил и правил, вводящих аксиому 6), можно перестроить в вывод в исчислении

ж) Заметим, что тот же факт следует из непротиворечивости исчисления $\mathfrak{N}$.

$\mathfrak{N}'$ с той же последней секвенцией.

<u>Доказательство</u>: Рассмотрим вывод левой посылки применения правила (II). Так как рассматриваемый вывод прополотый, то вывод левой посылки должен кончаться аксиомой вида $\Pi \to \Delta, \tau = \tau$, причем $\alpha p = \alpha q$ является основным потомком главной формулы аксиомы. Можно считать, что в выводе левой посылки внизу находятся лишь применения антецедентных правил, а начиная с некоторой секвенции, содержащей в антецеденте все формулы, входящие в последнюю секвенцию, вывод сукцедентный и односторонний.

Действительно, в исчислении $\mathfrak{N}'$ в правилах для равенства и в правилах (1^*) и (2^*) в антецеденте дублируется главная формула, а в случае применений правил (10) и (12) главная формула хотя и не дублируется, но может быть восстановлена. (Нетрудно доказать, что правила $\dfrac{t+p=t+q,\ p=q \to}{p=q \to}$ и $\dfrac{\alpha p=\alpha q,\ p=q \to}{p=q \to}$ производны в исчислении $\mathfrak{N}'$).

Рассматриваемый вывод имеет вид:

$$\dfrac{\mathfrak{D}_1\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{D}_2\left\{\begin{array}{l} \Gamma_1, \tau=s, \Gamma_2, \Sigma \to \Delta, \alpha q = \alpha q \\ \quad \dots \\ \Gamma_1, \tau=s, \Gamma_2, \Sigma \to \Delta, \alpha p = \alpha q \end{array}\right. \\ \quad \dots \\ \Gamma_1, \tau=s, \Gamma_2 \to \Delta, \alpha p = \alpha q; \end{array}\right. \qquad \mathfrak{D}_3\left\{\begin{array}{l} \dots \\ p=q, \Gamma_1, \tau=s, \Gamma_2 \to \Delta \end{array}\right.}{\Gamma_1, \tau=s, \Gamma_2 \to \Delta}$$

где Σ - боковые формулы применений правил в $\mathfrak{D}_1$ и формулы, появляющиеся из-за дублирования при восстановлении главных формул правил (10) и (12).

Так как рассматриваемое применение правила (II) не вырожденное, то антецедент левой посылки не пуст. Перестроим данный вывод в вывод в исчислении $\mathfrak{N}$ с той же последней секвенцией.

$$\dfrac{\mathfrak{D}_3'\left\{\begin{array}{l} \quad \dots \\ \Gamma_1, p=q, \Gamma_2, \tau=s, \Pi', \Sigma \to \Delta \end{array}\right.}{} \ (12)$$

$$
\begin{array}{ll}
\hline & (12) \\
\mathfrak{D}_2' \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1, \alpha p = \alpha q, \Gamma_2, \tau = s, \Pi', \Sigma \to \Delta \\ \qquad \cdots \\ \Gamma_1, \alpha p = \alpha p, \Gamma_2, \tau = s, \Pi, \Sigma \to \Delta \end{array} \right. & \\
\mathfrak{D}_1' \left\{ \begin{array}{l} \qquad \cdots \\ \Gamma_1, \alpha p = \alpha p, \Gamma_2, \tau = s, \Pi \to \Delta \end{array} \right. & \\
\hline \Gamma_1, \alpha p + \varphi(\alpha p, \tau) = \alpha p + \varphi(\alpha p, \tau), \Gamma_2, \tau = s, \Pi \to \Delta & (10) \\
\hline \Gamma_1, \alpha p + \varphi(\alpha p, \tau) = \alpha p + \varphi(\alpha p, s), \Gamma_2, \tau = s, \alpha p + \varphi(\alpha p, \tau) = s \to \Delta & {=}{\to} \\
\hline \Gamma_1, \alpha p + \varphi(\alpha p, \tau) = s, \Gamma_2, \tau = s \to \Delta & (2^*)_4 \to \\
\hline \Gamma_1, \tau = s, \Gamma_2 \to \Delta & (2^*)_4 \to
\end{array}
$$

где $\Pi \rightleftharpoons \alpha p + \varphi(\alpha p, \tau) = s, \alpha p + \varphi(\alpha p, \tau) = \alpha p + \varphi(\alpha p, s)$; $\Pi' \rightleftharpoons \Pi, \Pi_1$,

где Π_1 возникает из-за дублирования главных формул в выводе $\mathfrak{D}_2'$. Выводы $\mathfrak{D}_i'$ (i = I,2,3) получаются из выводов $\mathfrak{D}_i$ очевидным образом.

Из лемм II, I2 и I3 вытекает теорема 4.

В заключение автор приносит глубокую благодарность С.Ю.Маслову за внимание к работе и ценные советы при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

I. Плюшкевичене А.Ю. О специализации использования специфических аксиом при поиске вывода в аксиоматических теориях с равенством. Настоящий сборник, I75-I85.

2. Плюшкевичене А.Ю. Устранение правил типа сечения в аксиоматических теориях с равенством. "Зап.научн.семинаров Ленинградск. отд.Матем.ин-та АН СССР", Л., I969, I6,I75-I84.

3. Рогава М.Т. О секвенциальных вариантах прикладных исчислений предикатов. "Зап.научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР", М., I967,,4, I89-200.

4. Клини С.К. Перестановочность применений правил в генценовских исчислениях LK и LJ .Сб."Математическая теория логического вывода, М., 1967, 208-236.

5. Presburger M. Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchen die Addition als einzige Operation hervortritt. "Comtesrendus du I Congress des Mathematiciens des Pays Slaves", Warszawa, 1930, 92-101, 395.