



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Березин, О канонических преобразованиях
в представлении вторичного квантования, *Докл.
АН СССР*, 1963, том 150, номер 5, 959–962

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

16 января 2025 г., 17:18:04



Ф. А. БЕРЕЗИН

О КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ
ВТОРИЧНОГО КВАНТОВАНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 I 1963)

1. Рассмотрим гильбертово пространство с инволюцией L . Пусть $\hat{a}(f)$, $\hat{a}^*(f)$, $f \in L$, — линейные функционалы в L со значениями в множестве линейных операторов в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Будем предполагать, что операторы $\hat{a}^*(f)$, $\hat{a}(f)$ удовлетворяют обычным (фермиевским или бозевским) соотношениям коммутации, что они образуют неприводимое семейство, и что в пространстве \mathcal{H} существует вакуумный вектор $\hat{\Phi}_0$: $\hat{a}(f)\hat{\Phi}_0 = 0$.

Пусть Φ, Ψ — операторы в L , имеющую общую всюду плотную область определения D , снабженную собственной топологией и инвариантную относительно инволюции. Пространство непрерывных линейных функционалов на D обозначим \tilde{L} .

Будем предполагать, что \tilde{L} содержит L в качестве плотного множества. Значение элемента $F \in \tilde{L}$ на $\varphi \in D$ будем обозначать так же, как скалярное произведение в L : $F(\varphi) = (F, \varphi^*)$ (* — инволюция в L). Определим операторы $\overline{\Phi}, \overline{\Psi}$: $f\overline{\Phi} = (f^*\Phi)^*$, $f\overline{\Psi} = (f^*\Psi)^*$, $f \in L$.

Рассмотрим операторные линейные функционалы в D :

$$\hat{b}(f) = \hat{a}(f\Phi) + \hat{a}^*(f\Psi) + (F, f^*), \quad \hat{b}^*(f) = \hat{a}(f\overline{\Psi}) + \hat{a}^*(f\overline{\Phi}) + (f, F). \quad (1)$$

Если преобразование (1) обратимо и операторы в $\hat{b}(f)$, $\hat{b}^*(f)$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы $\hat{a}(f)$, $\hat{a}^*(f)$, то оно называется л и н е й н ы м к а н о н и ч е с к и м п р е о б р а з о в а н и е м. В фермиевском случае $F = 0$.

Хорошо известно, что если пространство L конечномерно, то в пространстве \mathcal{H} существует унитарный оператор \hat{U} , порождающий преобразование (1):

$$\hat{b}(f) = \hat{U}\hat{a}(f)\hat{U}^{-1}, \quad \hat{b}^*(f) = \hat{U}\hat{a}^*(f)\hat{U}^{-1}. \quad (2)$$

В общем случае это не всегда так. Условимся называть каноническое преобразование с о б с т в е н н ы м, если существует унитарный оператор, удовлетворяющий условию (2), и несобственным в противном случае. Известно ⁽¹⁾, что для того, чтобы каноническое преобразование (1) было собственным, необходимо и достаточно, чтобы оператор Ψ был оператором Гильберта — Шмидта и чтобы функционал F принадлежал L^* .

Отметим, что для того чтобы преобразование (1) было каноническим, между операторами Φ и Ψ должны быть выполнены определенные соотношения. Эти соотношения приводят к тому, что в случае, когда преобразование является собственным, оператор Φ ограничен**. Таким образом, в этом случае область D , на которой определены операторные функционалы $\hat{b}(f)$ и $\hat{b}^*(f)$, совпадает с L .

Пусть \mathcal{A} — некоторое каноническое преобразование, задаваемое операторами Φ, Ψ и функционалом F , определенными на области D . Рассмотрим последовательность канонических преобразований \mathcal{A}_n , обладающих следующими свойствами: 1) все операторы Φ_n, Ψ_n и функционалы F_n определены на области D ; 2) при $n \rightarrow \infty$ $\|\Phi_n f - \Phi f\| \rightarrow 0$, $\|\Psi_n f - \Psi f\| \rightarrow 0$, где f — произвольный элемент D ; $F_n \rightarrow F$ в сильной топологии пространства \tilde{L} .

В этом случае преобразование \mathcal{A} будем называть п р е д е л о м п р е о б р а з о в а н и я \mathcal{A}_n .

* В ⁽¹⁾ эта теорема доказана для однородных преобразований, однако тем же методом может быть получен общий результат.

** В фермиевском случае операторы Φ и Ψ ограничены для любого канонического преобразования.

Т е о р е м а 1. Каждое линейное каноническое преобразование есть предел собственных линейных канонических преобразований.

2. Пусть \mathcal{A}_n — последовательность собственных канонических преобразований, сходящаяся к несобственному преобразованию \mathcal{A} ; \hat{U}_n — унитарные операторы в \mathcal{H} , осуществляющие преобразования \mathcal{A}_n .

О п р е д е л е н и е. Оператор \hat{A} в \mathcal{H} , определенный на области $D_{\hat{A}}$, выдерживает несобственное каноническое преобразование \mathcal{A} , если при любом n операторы $\hat{U}_n \hat{A} \hat{U}_n^{-1}$ определены на $D_{\hat{A}}$, при любом $f \in D_{\hat{A}}$ существует в сильном смысле предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{U}_n \hat{A} \hat{U}_n^{-1} f$, и этот предел не зависит от выбора последовательности канонических преобразований \mathcal{A}_n , сходящейся к \mathcal{A} . В этом пункте мы опишем множество ограниченных операторов, выдерживающих все (линейные) канонические преобразования в фермиевском случае.

Рассмотрим операторы

$$\hat{p}(f) = \hat{a}(f) + \hat{a}^*(f), \quad \hat{q}(f) = \frac{1}{i}(\hat{a}(f) - \hat{a}^*(f)). \quad (3)$$

Для дальнейшего удобно вместо операторных функционалов рассматривать операторные обобщенные функции. Рассмотрим в связи с этим реализацию пространства L с помощью функций с суммируемым квадратом на некоторм множестве M , снабженном мерой; предположим, что при этой реализации инволюция в L переходит в комплексное сопряжение.

Определим операторную обобщенную функцию $\hat{p}(x)$ с помощью равенства $\hat{p}(f) = \int \hat{p}(x) f(x) dx$. Аналогично определяются операторные обобщенные функции $\hat{q}(x)$, $\hat{a}(x)$, $\hat{a}^*(x)$.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы ограниченный оператор \hat{A} выдерживал все канонические преобразования, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде сильно сходящегося ряда

$$\hat{A} = \sum \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int K_{mn}(x_1 \dots x_m | y_1 \dots y_n) \times \\ \times \hat{p}(x_1) \dots \hat{p}(x_m) \hat{q}(y_1) \dots \hat{q}(y_n) d^m x d^n y, \quad (4)$$

где $K_{mn}(x_1 \dots x_m | y_1 \dots y_n)$ — суммируемые с квадратом функции, антисимметричные отдельно по $x_1 \dots x_m$ и по $y_1 \dots y_n$ и удовлетворяющие условию $\sum \int |K_{mn}(x_1 \dots x_m | y_1 \dots y_n)|^2 d^m x d^n y < \infty$.

Множество операторов вида (4) образует кольцо, которое мы обозначим через \mathfrak{B} . В \mathfrak{B} можно ввести след согласно формуле $\text{sp}_1 \hat{A} = K_{00}$.

Нетрудно проверить, что при этом выполняется обычное требование: при любых $\hat{A}_1, \hat{A}_2 \in \mathfrak{B}$

$$\text{sp}_1 \hat{A}_1 \hat{A}_2 = \text{sp}_1 \hat{A}_2 \hat{A}_1.$$

Отметим, что если пространство L имеет размерность $N < \infty$, то \mathfrak{B} есть кольцо всех матриц порядка 2^N и введенный след отличается от обычного множителем: $\text{sp}_1 \hat{A} = \frac{1}{2^N} \text{sp} \hat{A}$.

Приведем идею доказательства достаточности. Введем в \mathfrak{B} скалярное произведение $(A_1, A_2) = \text{sp}_1(A_1 \hat{A}_2^*)$. Пополнение \mathfrak{B} по этому скалярному произведению обозначим $\overline{\mathfrak{B}}$.

Нетрудно проверить, что каждое каноническое преобразование \mathcal{A} порождает в гильбертовом пространстве $\overline{\mathfrak{B}}$ унитарный оператор. Этот оператор обозначим $U_{\mathcal{A}}$. Нетрудно проверить, далее, что если $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}$ в смысле определения, данного в п. 1, то $U_{\mathcal{A}_n} \rightarrow U_{\mathcal{A}}$ в сильном смысле.

Топология гильбертова пространства $\overline{\mathfrak{B}}$ не совпадает ни с какой естественной топологией в пространстве операторов. Следовательно, в $\overline{\mathfrak{B}}$ могут существовать элементы, не отвечающие операторам в \mathcal{H} .

Сформулируем в связи с этим общую лемму, которая служит завершением доказательства достаточности и представляет кроме того самостоятельный интерес.

Л е м м а. Пусть $\hat{A}_n \in \mathfrak{B}$ — последовательность операторов, нормы которых ограничены общей константой c . Тогда, если $\hat{A}_n \rightarrow \hat{A} \in \mathfrak{B}$ в том смысле, что $(\hat{A} - \hat{A}_n, \hat{A} - \hat{A}_n) \rightarrow 0$, то $\hat{A} \in \mathfrak{B}$, $\hat{A}_n \rightarrow \hat{A}$ в сильном смысле и $\|\hat{A}\| \leq c$.

3. Остановимся на связи между нормальной формой оператора и записью его в виде (4). Рассмотрим внешние алгебры \mathfrak{G}_a и \mathfrak{G}_p с образующими (функциями с антикоммутирующими значениями) $a(x)$, $a^*(x)$ и $p(x)$, $q(x)$ соответственно: $\{a(x), a^*(x')\} = \{a(x), a(x')\} = \{a^*(x), a^*(x')\} = \{p(x), p(x')\} = \{p(x), q(x')\} = \{q(x), q(x')\} = 0$. Записи каждого оператора в нормальной форме и в виде (4) поставим в соответствие элементы алгебр \mathfrak{G}_a и \mathfrak{G}_p (функционалы):

$$A(a^*, a) = \sum \int L_{mn}(x_1 \dots x_m | y_1 \dots y_n) a^*(x_1) \dots a^*(x_m) a(y_1) \dots a(y_n) d^m x d^n y; \quad (5)$$

$$\mathfrak{A}(p, q) = \sum \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \int K_{mn}(x_1 \dots x_m | y_1 \dots y_n) \times \\ \times p(x_1) \dots p(x_m) q(y_1) \dots q(y_n) d^m x d^n y \quad (6)$$

(функции K_{mn} в (6) те же, что в (4). Относительно функционалов $A(a^*, a)$ см. (2)).

Используя континуальный интеграл по антикоммутирующим переменным (2), связь между $A(a^*, a)$ и $\mathfrak{A}(p, q)$ можно записать в виде*:

$$\mathfrak{A}(p, q) = \int \exp \left[-i \int \left(q(x) + \frac{a^*(x) - a(x)}{i\sqrt{2}} \right) \left(p(x) - \frac{a(x) + a^*(x)}{\sqrt{2}} \right) dx \right] \times \\ \times A \left(\frac{a^*}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \Pi da^* da. \quad (7)$$

Обращение этой формулы опускаем.

Каноническое преобразование (1) порождает соотношение между операторами $\hat{p} = \hat{a} + \hat{a}^*$, $\hat{q} = \frac{1}{i}(\hat{a} - \hat{a}^*)$ и $\hat{p}' = \hat{b} + \hat{b}^*$, $\hat{q}' = \frac{1}{i}(\hat{b} - \hat{b}^*)$. Заменив в этом отношении \hat{p} , \hat{q} , \hat{p}' , \hat{q}' на p , q , p' , q' , мы получим линейное преобразование в алгебре \mathfrak{G}_p :

$$p' = Ap + Bq, \quad q' = Cp + Dq,$$

где A, B, C, D — операторы, выражающиеся определенным образом, через Φ, Ψ .

Оказывается, что функционал $\mathfrak{A}(p, q)$, соответствующий преобразованному оператору \hat{A} , выражается через функционал $\mathfrak{A}(p, q)$, соответствующий оператору \hat{A} , по формуле

$$\mathfrak{A}(p, q) = \mathfrak{A}(p', q'),$$

т. е. преобразование функционалов $\mathfrak{A}(p, q)$ сводится к замене переменных**.

Отметим, что в виде (4) может быть записан не всякий оператор. Напри-

* Напомним определение интеграла. В случае, если грассманова алгебра \mathfrak{G} имеет конечное число образующих x_1, \dots, x_N , интеграл определяется следующим образом: $\int dx_i = 0$, $\int x_i dx_i = 1$, символы dx_i антикоммутируют между собой и с x_k , кратный интеграл понимается как повторный. Континуальный интеграл есть предел n -кратных интегралов при $n \rightarrow \infty$.

** В отличие от функционалов $\mathfrak{A}(p, q)$ функционалы $A(a^*, a)$ преобразуются по довольно сложным формулам, содержащим континуальное интегрирование (см. (2)).

мер, оператор $\hat{A} = \int K(x, y) \hat{a}^*(x) \hat{a}(y) dx dy$ представим в виде (4) тогда и только тогда, когда $K(x, y)$ — ядро оператора с абсолютно сходящимся следом. То же самое относится к оператору $\hat{A} = \exp \left\{ i \int K(x, y) a^*(x) a(y) dx dy \right\}$. Таким образом, если $K(x, y)$ есть ядро самосопряженного, но не ядерного оператора, то \hat{A} представляет собой пример ограниченного оператора, не выдерживающего всех канонических преобразований.

4. Перейдем к бозевскому случаю. Рассмотрим линейное пространство \tilde{L} , состоящее из пар вещественных функций $(p(x), q(x))$. Предположим, что в пространстве \tilde{L} сосредоточена вероятностная мера μ^* . Поставим в соответствие каждому оператору \hat{A} , записываемому в нормальной форме, функционал на \tilde{L} :

$$\mathfrak{A}(p, q) = \int \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \left[\left(p - i \frac{b + b^*}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(q + \frac{b^* - b}{\sqrt{2}} \right)^2 dx \right] \right\} \times \\ \times A \left(\frac{ib^*}{\sqrt{2}}, \frac{ib}{\sqrt{2}} \right) \Pi db^* db, \quad (8)$$

где $A(a^*, a)$ — функционал, отвечающий нормальной форме \hat{A}^{**} .

Обращение формулы (8) опускаем.

Континуальный интеграл в этой формуле понимается как предел конечнократных, причем в конечномерной аппроксимации

$$b = \xi + i\eta, b^* = \xi - i\eta, \Pi db^* db = \pi^{-nd} d^n \xi d^n \eta, \Pi dp dq = (2\pi)^{-nd} p^n d^n q.$$

Так же как и в фермиевском случае, каноническое преобразование (1) порождает соотношение между операторами $\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^*)$, $\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^*)$

и $\hat{p}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b} + \hat{b}^*)$, $\hat{q}' = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{b} - \hat{b}^*)$. Заменяя в этом соотношения \hat{p} , \hat{q} , \hat{p}' , \hat{q}' на p , q , p' , q' , мы получим линейное преобразование в \tilde{L} :

$$p'(x) = \int (A(x, y) p(y) + B(x, y) q(y)) dy + f_1(x); \\ q'(x) = \int (C(x, y) p(y) + D(x, y) q(y)) dy + f_2(x). \quad (9)$$

Теорема 3. Пусть оператору \hat{A} отвечает функционал $\mathfrak{A}(p, q)$, суммируемый с квадратом по мере $\mu(p, q)$, квазиинвариантной относительно преобразования (9). Тогда оператор \hat{A} выдерживает каноническое преобразование (1) и преобразованному оператору отвечает функционал $\mathfrak{A}(p', q) = \mathfrak{A}(p', q')$.

Таким образом, преобразование функционала $\mathfrak{A}(p, q)$ сводится к замене переменных.

Поступило
10 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ К. О. Friedrichs, *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*, N. Y., 1953. ² Ф. А. Березин, ДАН, 137, № 2 (1961). ³ Р. А. Минлос, Тр. Моск. матем. общ., 8, 497 (1959). ⁴ Е. Вигнер, *Phys. Rev.*, 40, 749 (1932).

* Такая ситуация возможна, если, например, \tilde{L} есть пространство, сопряженное к ядерному (²).

** Функционал $A(a^*, a)$ определяется так же, как аналогичный функционал в фермиевском случае, с той лишь разницей, что $a(x)$, $a^*(x)$ — обычные комплекснозначные функции (²). В случае конечного числа степеней свободы запись операторов с помощью функций $\mathfrak{A}(p, q)$ впервые рассматривались Вигнером (⁴).