V. L. Selivanov, Boolean Hierarchies of Partitions over a Reducible Base, *Algebra Logika*, 2004, Volume 43, Number 1, 77–109

Алгебра и логика, 43, N 1 (2004), 77—109

УДК 510.532+510.54

БУЛЕВЫ ИЕРАРХИИ РАЗБИЕНИЙ НАД РЕДУЦИРУЕМОЙ БАЗОЙ*)

В. Л. СЕЛИВАНОВ

Введение

Пусть M — множество, $P(M)$ — класс всех подмножеств множества M, $\mathcal{L}$ ($\subseteq P(M)$) — класс подмножеств, замкнутый относительно операций $\cup, \cap$ и содержащий множества $\varnothing, M$; для краткости назовем такой класс $\mathcal{L}$ *базой*. Известно, что существует естественная классификация (называемая *булевой* или *разностной иерархией* над $\mathcal{L}$) элементов булевой алгебры, порожденной классом $\mathcal{L}$ в классе $P(M)$. Имеется естественное взаимнооднозначное соответствие между классом $P(M)$ и множеством 2^M всех функций $\nu : M \to 2 = \{0, 1\}$ (в этой статье натуральное число $k \in \omega$ отождествляется с множеством $\{0, \ldots, k-1\}$). Существует ли естественное расширение понятия булевой иерархии на подмножества множества k^M, т. е. на случай, когда вместо числа 2 берется произвольное k, $1 < k < \omega$?

Ответ на этот вопрос некоторое время назад предложил К. В. Вагнер. Соответствующая иерархия, обозначенная $BH_k(\mathcal{L})$, получила название *булевой иерархии k-разбиений над* $\mathcal{L}$, поскольку элементы множества k^M находятся в естественном взаимнооднозначном соответствии с k-разбиениями множества M (т. е. попарно не пересекающимися множествами $A_0, \ldots, A_{k-1}$ с условием $A_0 \cup \ldots \cup A_{k-1} = M$). Эта иерархия изучалась в

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Немецкого Исследовательского Сообщества (DFG), Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 00-01-00810, и РФФИ—ИНТАС, проект IR-97-139.

[1, 2], причем основное внимание уделялось базе $\mathcal{L} = NP$, и была впоследствии дополнена [3, 4] до так называемой *расширенной булевой иерархии k-разбиений над* $\mathcal{L}$, обозначенной $RBH_k(\mathcal{L})$. Оказалось, что для случая произвольной базы, а также для случая базы NP, структура иерархий разбиений является довольно сложной.

В настоящей статье рассматриваются булевы иерархии разбиений над базами $\mathcal{L}$, обладающими *свойством редукции* (для краткости назовем такие базы *редуцируемыми*); это означает, что для любых $A, B \in \mathcal{L}$ существуют непересекающиеся $A', B' \in \mathcal{L}$, для которых $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ и $A' \cup B' = A \cup B$.

Будет показано, что над редуцируемыми базами структура $(RBH_k(\mathcal{L}); \subseteq)$ устроена намного проще, чем в общем случае (например, она оказывается нётеровым частичным порядком). Это позволяет достаточно хорошо понять эту структуру над некоторыми важными базами, например, над решеткой рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств и над решеткой открытых множеств бэровского пространства. Для случая р.п. множеств устанавливается тесная связь булевой иерархии разбиений с результатами работ [5—7] по теории полных нумераций. Это свидетельствует о том, что определения булевых иерархий разбиений, которые предложили К. Вагнер и С. Косуб, "правильны".

В § 1 приведем необходимые в дальнейшем результаты о частично упорядоченных множествах (ч.у.м.), в § 2 дадим точные определения булевых иерархий k-разбиений и необходимые в дальнейшем сведения о них. В § 3 докажем основные результаты об иерархиях над произвольной редуцируемой базой. Далее рассмотрим иерархии над конкретными редуцируемыми базами: в § 4 — над р.п. множествами, в § 5 — над открытыми множествами бэровского пространства, в § 6 — над регулярными открытыми множествами канторовского пространства.

§ 1. Ч.у.м. и леса

Будем использовать некоторые стандартные обозначения и терминологию о ч.у.м., которые можно найти в любой книге на эту тему (см., напр.,

[8]). Ч.у.м. $(P; \leq)$ часто будем обозначать просто P. Любое подмножество множества P можно считать ч.у.м. относительно индуцированного частичного порядка. В частности, это относится к конусам $\check{x} = \{y \in P \mid x \leq y\}$ и $\hat{x} = \{y \in P \mid y \leq x\}$, задаваемым произвольным элементом $x \in P$.

Для конечного ч.у.м. P через $h(P)$ обозначается *высота* ч.у.м. P, т. е. число элементов в самой длинной цепи в P. Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant h(P)$, пусть $P(i) = \{x \in P \mid h(\check{x}) = i\}$. Тогда $P(1), \ldots, P(h(P))$ является разбиением множества P на уровни; заметим, что $P(1)$ — множество всех максимальных элементов ч.у.м. P. Для любого $x \in P$ через $x\!\downarrow$ обозначается множество всех непосредственных предшественников (или *сыновей*) элемента x в P, т. е. $x\!\downarrow = \{y < x \mid \neg\exists z(y < z < x)\}$. Заметим, что $x\!\downarrow = \varnothing$ тогда и только тогда, когда x есть минимальный элемент ч.у.м. P.

Лесом называется ч.у.м., в котором любой конус $\check{x}$ является цепью; *деревом* — лес, имеющий наибольший элемент (называемый *корнем* этого дерева). Любой конечный лес однозначно представим в виде непересекающегося объединения конечных деревьев, корни которых являются максимальными элементами этого леса. *Собственным* называем лес, не являющийся деревом.

Опишем способ построения леса по любому заданному конечному ч.у.м.

ЛЕММА 1.1. *Для любого конечного ч.у.м. P найдутся конечный лес F и монотонная функция f из F на P такие, что $h(F) = h(P)$, f задает биекцию между $F(1)$ и $P(1)$, а также биекцию между $x\!\downarrow$ и $f(x)\!\downarrow$ для любого $x \in F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим лес F уровень за уровнем следующим образом. Пусть $F(1)$ — любое множество, находящееся во взаимнооднозначном соответствии с $P(1)$, и пусть $f : F(1) \to P(1)$ — любое такое соответствие; все элементы множества $F(1)$ попарно несравнимы в ч.у.м. F. Если $h(P) = 1$, построение закончено. В противном случае, для любого $x \in F(1)$, для которого $f(x)$ не является минимальным в P, найдем множество Q_x, находящееся во взаимнооднозначном соответствии с множеством $f(x)\!\downarrow$; множества Q_x выбираются не пересекающимися попарно и с множеством $F(1)$. Элементы множества Q_x объявляем сыновьями элемента x в ч.у.м. F. Положим $F(2) = \cup\{Q_x \mid x \in F(1)\}$ и продолжим f на множество $F(2)$ так, чтобы получилась биекция между $x\downarrow = Q_x$ и $f(x)\downarrow$ для всех $x \in F(1)$. Заметим, что при таком определении $f(F(1)) = P(1)$ и $P(2) \subseteq f(F(2)) \subseteq P(2) \cup \ldots \cup P(h(P))$. Продолжая построение, после $h(P)$ шагов получим искомые лес $F = F(1) \cup \ldots \cup F(h(P))$ и монотонную функцию f из F на P. Лемма доказана.

Объект $(P;, \leq, c)$, состоящий из ч.у.м. $(P; \leq)$ и функции *разметки* $c : P \to k$, называют *k-ч.у.м.* Обозначение k-ч.у.м. часто сокращаем до (P, c). Обычно рассматривается только случай $k \in \omega$, $k = \{0, \ldots, k-1\}$, хотя вместо k можно выбирать произвольное множество *меток*. Например, любой конечный ч.у.м. P можно рассматривать как P-ч.у.м. (P, id) с тождественной разметкой $\mathrm{id} : P \to P$. *Морфизмом* $f : (P; \leq, c) \to (P'; \leq', c')$ между k-ч.у.м. называется монотонная функция $f : (P; \leq) \to (P'; \leq')$, сохраняющая разметку, т. е. удовлетворяющая соотношению $c = c' \circ f$. Любое подмножество P' в k-ч.у.м. (P, c) можно рассматривать как k-ч.у.м. (P', c), называемый *k-под-ч.у.м.* в (P, c) (здесь и ниже стараемся по возможности избегать громоздких обозначений для ограничений функций вроде $c\lceil_{P'}$). Заметим: если (P, c) является k-лесом, то для любого $P' \subseteq P$ структура (P', c) также является k-лесом. Из леммы 1.1 следует

ЛЕММА 1.2. *Для любого конечного k-ч.у.м.* (P, c) *найдутся конечный k-лес* (F, d) *и морфизм f из* (F, d) *на* (P, c) *со свойствами, указанными в формулировке леммы* 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F и f такие, как в доказательстве леммы 1.1. Взяв в качестве d отображение $c \circ f$, получим объекты с требуемыми свойствами.

Пусть $\mathcal{P}_k$, $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{T}_k$ и $\mathcal{F}_k$ обозначают соответственно классы конечных k-ч.у.м., конечных k-решеток, конечных k-деревьев и конечных k-лесов. Определим квазипорядок $\leq$ на классе $\mathcal{P}_k$ следующим образом (см. также [1, 3]): $(P, c) \leq (P', c')$, если существует морфизм из (P, c) в (P', c'). Через $\equiv$ обозначается отношение эквивалентности на $\mathcal{P}_k$, индуцированное квазипорядком $\leq$.

В [1, 3] содержится информация о структуре квазипорядков $(\mathcal{P}_k; \leq)$ и $(\mathcal{L}_k; \leq)$. В этом параграфе установим некоторые факты о структуре $(\mathcal{F}_k; \leq)$. Сначала рассмотрим минимальные k-леса, т. е. k-леса, не эквивалентные (по отношению $\equiv$) никакому k-лесу меньшей мощности. Мощность множества F обозначим $|F|$. Далее будут рассматриваться только конечные k-леса, поэтому прилагательное "конечный" обычно будет опускаться.

ЛЕММА 1.3. *Для любого k-леса (F, c) равносильны следующие условия*:

(i) (F, c) *минимален*;

(ii) *любой эндоморфизм леса (F, c) инъективен*;

(iii) $(F, c) \not\leq (F', c)$ *для любого собственного подмножества $F' \subset F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i)→(iii). Пусть, напротив, $(F, c) \leq (F', c)$. Имеем $(F', c) \leq (F, c)$ (можно взять тождественное вложение). Поэтому $(F, c) \equiv (F', c)$ и $|F'| < |F|$, получаем противоречие.

(iii)→(ii). Предположим, что существует неинъективный эндоморфизм $f : (F, c) \to (F, c)$. Положив $F' = f(F)$, получим противоречие.

(ii)→(i). Предположим противное, т. е. $(F, c) \equiv (G, d)$ для некоторого k-леса (G, d) с условием $|G| < |F|$. Выберем соответствующие морфизмы $f : (F, c) \to (G, d)$ и $g : (G, d) \to (F, c)$. Тогда $g \circ f$ не является инъективным эндоморфизмом из (F, c), получаем противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.4. (i) *Любой тривиальный* (*т. е. одноэлементный*) *k-лес минимален.*

(ii) *Нетривиальное k-дерево (T, c) минимально тогда и только тогда, когда $\forall x \in T(1)\, \forall y \in T(2)(c(x) \neq c(y))$ и k-лес $(T \setminus T(1), c)$ минимален.*

(iii) *Собственный k-лес минимален тогда и только тогда, когда все его k-деревья минимальны и попарно $\leq$-несравнимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что теорема дает индуктивное описание (индукция ведется по мощности) минимальных k-лесов. Доказательство теоремы также ведется по индукции.

(i) Это утверждение, являющееся базисом индукции, очевидно.

Возьмем теперь произвольный k-лес, имеющий хотя бы два элемента, и рассмотрим случаи, когда он является k-деревом (T, c) (утверждение (ii)) и собственным k-лесом (F, c) (утверждение (iii)).

(ii) Предположим, что (T, c) минимально, выберем произвольные $x \in T(1)$, $y \in T(2)$ и проверим, что $c(x) \neq c(y)$. Пусть, напротив, $c(x) = c(y)$. Рассмотрим эндоморфизм дерева (T, c), переводящий y в x и тождественный на $T \setminus \{y\}$. Этот эндоморфизм неинъективен, что противоречит лемме 1.3. Если (T, c) минимально, то минимален и лес $(T \setminus T(1), c)$, в противном случае по лемме 1.3 нашелся бы неинъективный эндоморфизм g дерева $(T \setminus T(1), c)$. Тогда отображение $g \cup \{(x, x)\}$, где x есть корень дерева T, было бы неинъективным эндоморфизмом дерева (T, c), что противоречит лемме 1.3.

Теперь предположим, что истинна правая часть утверждения (ii) и докажем, что дерево (T, c) минимально. По лемме 1.3 достаточно проверить, что любой эндоморфизм f дерева (T, c) тождествен, т. е. $f(x) = x$ для любого $x \in T$. Пусть сначала $x \in T(1)$ (т. е. x является корнем). Предположим, что $f(x) \neq x$, тогда $f(x) < x$ и, следовательно, $f(x) \leq y \leq x$ для единственного $y \in T(2)$. Имеем $c(x) = c(f(x)) \neq c(y)$ и $f(x) < y < x$. Из монотонности f получаем $f^2(x) \leq f(y) \leq f(x)$ и, из условия на метки, $c(f^2(x)) = c(f(x)) \neq c(y) = c(f(y))$. Отсюда $f^2(x) < f(y) < f(x)$. Продолжая рассуждение, получим противоречие с конечностью множества T.

Итак, f тождественно на $T(1)$. Пусть теперь $x \in T(2)$. Случай $f(x) > x$ невозможен по условию на метки, поэтому $f(x) \leq y$ для единственного $y \in T(2)$. Случай $y \neq x$ невозможен, иначе ограничение $f\lceil_{\hat{x}}$ устанавливало бы соотношение $(\hat{x}, c) \leq (\hat{y}, c)$ что противоречит утверждению (iii) и предположению индукции. Поэтому $f(x) \leq x$ и, следовательно, $f\lceil_{\hat{x}}$ является эндоморфизмом $(\hat{x}, c)$. По индукции отображение $f\lceil_{\hat{x}}$ является тождественным, что завершает доказательство утверждения (ii).

(iii) Предположим сначала, что (F, c) минимален; надо проверить, что все k-деревья $(\hat{x}, c)$, $x \in F(1)$, минимальны и попарно не сравнимы. Пусть $(\hat{x}, c)$ не минимально. По лемме 1.3 найдется неинъективный эндоморфизм g дерева $(\hat{x}, c)$. Положим $f(a) = g(a)$ для $a \leq x$ и $f(a) = a$

для $a \in F \setminus \hat{x}$. Тогда f является неинъективным эндоморфизмом (F, c); получаем противоречие.

Предположим теперь, что $(\hat{x}, c) \leq (\hat{y}, c)$ для некоторых $x, y \in F(1)$, $x \neq y$, и пусть g — соответствующий морфизм. Определяя f как и выше, получим неинъективный эндоморфизм (F, c), приходим к противоречию.

Остается проверить, что условие в правой части утверждения (iii) влечет минимальность леса (F, c). Как и выше, легко показать, что любой эндоморфизм дерева (F, c) тождествен. По лемме 1.3, (F, c) минимален. Теорема доказана.

Доказательства теоремы дает и следующую дополнительную информацию о минимальных k-лесах.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. (i) *k-лес минимален тогда и только тогда, когда любой его эндоморфизм тождествен.*

(ii) *Любые два минимальных эквивалентных k-леса изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Достаточность следует из леммы 1.3, необходимость — из доказательства теоремы 1.4.

(ii) Пусть (F, c) и (G, d) — минимальные эквивалентные k-леса. Рассмотрим морфизмы $f : (F, c) \to (G, d)$ и $g : (G, d) \to (F, c)$. Тогда $g \circ f$ и $f \circ g$ являются эндоморфизмами лесов (F, c) и (G, d) соответственно. По утверждению (i) оба эндоморфизма тождественны. Поэтому f является изоморфизмом. Доказательство закончено.

Из теоремы 1.4 вытекает следующая

ЛЕММА 1.6. *Для любого k-дерева (T, c) существует только конечное число (с точностью до $\equiv$) k-деревьев (S, d) с условием $(S, d) \leq (T, c)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по $|T|$, базис индукции тривиален (одноэлементные k-деревья являются в точности минимальными элементами квазипорядка $(\mathcal{F}_k, \leq)$). Пусть $|T| > 1$. По индукции множество k-деревьев $\mathcal{U} = \{(U, e) \mid \exists x \in T(2)((U, e) \leq (\hat{x}, c))\}$ конечно с точностью до отношения $\equiv$. Пусть $\mathcal{V}$ — конечное множество минимальных k-деревьев таких, что любой элемент из $\mathcal{V}$ эквивалентен некоторому элементу из $\mathcal{U}$ и наоборот.

Достаточно проверить, что следующие два множества k-деревьев конечны с точностью до отношения $\equiv$:

$\mathcal{S}_0 = \{(S,d) \mid (S,d) \leq (T,c) \wedge d(s) \neq c(t)\}$,

$\mathcal{S}_1 = \{(S,d) \mid (S,d) \leq (T,c) \wedge d(s) = c(t) \wedge (S,d)$ минимально$\}$,

где s и t — корни деревьев S и T соответственно. Имеем $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{U}$, поскольку, с учетом $d(s) \neq c(t)$, любой морфизм $f : (S,d) \to (T,c)$ является морфизмом $f : (S,d) \to (\hat{x},c)$ для некоторого $x \in T(2)$. Поэтому множество $\mathcal{S}_0$ конечно с точностью до отношения $\equiv$.

Пусть теперь $(S,d) \in \mathcal{S}_1$ и $f : (S,d) \to (T,c)$. Согласно теореме 1.4 для любого $y \in S(2)$ справедливо $f(y) < t$ и, значит, $(\hat{y},d) \in \mathcal{U}$. Поэтому достаточно показать, что существует только конечное с точностью до отношения $\equiv$ число минимальных k-деревьев (S,d), для которых $(\hat{y},d) \in \mathcal{V}$ при всех $y \in S(2)$. По теореме 1.4(ii) все k-деревья $(\hat{y},d)$ попарно несравнимы по отношению $\leq$. Поэтому множество $\mathcal{S}_1$ конечно. Лемма доказана.

Обратимся к основному результату этого параграфа. Напомним (см., напр., [9]), что квазипорядок называется *нётеровым*, если в нем нет бесконечно убывающих цепей и бесконечных антицепей. Любой нётеров квазипорядок P имеет *высоту* $h(P)$ — наибольший ординал, изоморфно вложимый в P (это определение согласуется с данным выше определением высоты конечного ч.у.м.). С любым квазипорядком можно связать также его *ширину* $w(P)$: если P имеет антицепи с любым конечным числом элементов, то $w(P) = \omega$, в противном случае $w(P)$ — наибольшее натуральное число n такое, что P имеет антицепь с n элементами.

Выше рассматривались только непустые ч.у.м., но иногда (как в следующей теореме) технически удобно рассматривать также пустой k-ч.у.м. $\varnothing$. При этом предполагается, что $\varnothing \leq P$ для любого $P \in \mathcal{P}_k$.

ТЕОРЕМА 1.7. (i) *Для любого $k \geqslant 2$ структура $(\mathcal{F}_k; \leq)$ является нётеровым квазипорядком высоты ω.*

(ii) *$w(\mathcal{F}_2) = 2$ и $w(\mathcal{F}_k) = \omega$ при $k > 2$.*

(iii) *Для любого $k \geqslant 2$ структура $(\mathcal{F}_k \cup \{\varnothing\}; \leq)$ (точнее, соответствующий фактор-ч.у.м.) является дистрибутивной решеткой, в которой любое непустое подмножество имеет инфимум.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) То, что квазипорядок нётеров, сразу следует из известной теоремы, которую получил Крускал [10]. Отсюда и из леммы Кенига следует, что $h(\mathcal{F}_k) = \omega$ тогда и только тогда, когда фактор-ч.у.м. $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ квазипорядка $(\mathcal{F}_k, \leq)$ бесконечен и для любого $x \in \widetilde{\mathcal{F}}_k$ множество $\hat{x}$ конечно. Любая альтернирующая k-цепь (т. е. k-цепь, в которой любые два соседних элемента имеют различные метки) является (минимальным) k-деревом. Легко показать [4], что такие цепи задают бесконечно много элементов в $\widetilde{\mathcal{F}}_k$.

Остается проверить, что под любым k-лесом существует только конечное число k-лесов (с точностью до отношения $\equiv$). Сначала сделаем несколько простых наблюдений.

Пусть $F = T_0 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ обозначает джойн, т. е. непересекающееся объединение, некоторых k-деревьев $T_0, \ldots, T_n$. Тогда F является k-лесом, деревья которого (с точностью до изоморфизма) есть в точности $T_0, \ldots, T_n$. Конечно, любой k-лес изоморфен джойну своих деревьев. Операция джойна применима также к k-лесам, причем джойн любых двух k-лесов есть их супремум по отношению $\leq$. Итак, $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ является верхней полурешеткой. Любое k-дерево T задает $\sqcup$-неразложимый элемент квазипорядка $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ (другими словами, если $T \leq G \sqcup H$ для k-лесов G и H, то $T \leq G$ или $T \leq H$) и, обратно, любой $\sqcup$-неразложимый элемент $\widetilde{\mathcal{F}}_k$ задается некоторым k-деревом.

Пусть теперь G и H — это k-леса, представленные в виде джойнов своих k-деревьев, т. е. $G = G_0 \sqcup \ldots \sqcup G_m$ и $H = H_0 \sqcup \ldots \sqcup H_n$. Из сделанных выше замечаний следует, что $G \leq H$ тогда и только тогда, когда $\forall i \leqslant m$ $\exists j \leqslant n (G_i \leq H_j)$. Другими словами, нижний конус $\hat{H}$ — это (с точностью до отношения $\equiv$) верхняя полурешетка, порожденная множеством k-деревьев (T, c) таких,что $(T, c) \leq H_j$ для некоторого $j \leqslant n$. По лемме 1.6 множество $\hat{H}$ (с точностью до отношения $\equiv$) конечно.

(ii) Из теоремы 1.4 следует, что минимальные 2-деревья — это в точности альтернирующие 2-цепи. Ясно, что для каждой альтернирующей 2-цепи существует единственная несравнимая с ней альтернирующая 2-цепь [4]. Как замечено там же, для любых $k > 2$ и $n \in \omega$ найдутся n попарно несравнимых альтернирующих k-цепей.

(iii) Как было замечено выше, $\mathcal{F}_k \cup \{\varnothing\}$ является верхней полурешеткой. Надо проверить, что любое непустое подмножество $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}_k \cup \{\varnothing\}$ имеет инфимум. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{S}$ замкнуто вверх. В силу (i), множество $\mathcal{S}$ представимо в виде $\mathcal{S} = \check{F}_0 \cup \ldots \cup \check{F}_n$ для конечного числа лесов F_i. Достаточно показать, что множество $\{F_0, \ldots, F_n\}$ имеет инфимум, поскольку он совпадает с инфимумом множества $\mathcal{S}$. Ясно, что $\inf(F_0, \ldots, F_n) = \sup(\hat{F}_0 \cap \ldots \cap \hat{F}_n)$; супремум существует, так как в силу (i) и наличия пустого леса $\varnothing$ множество $\hat{F}_0 \cap \ldots \cap \hat{F}_n$ непусто и (с точностью до отношения $\equiv$) конечно.

Остается проверить дистрибутивность. Как известно (см. напр., [11]), дистрибутивность равносильна тому, что для любых $F, G, H \in \mathcal{F}_k \cup \{\varnothing\}$ с условием $F \leq G \sqcup H$ существуют $G' \leq G$ и $H' \leq H$, для которых $F \equiv G' \sqcup \sqcup H'$. Предположим, что $F \neq \varnothing$ (в противном случае требуемое очевидно), тогда $F \equiv F_0 \sqcup \ldots \sqcup F_l$ для подходящих k-деревьев $F_0, \ldots, F_l$. Как замечено выше, $\forall i \leqslant l (F_i \leq G \vee F_i \leq H)$. Пусть

$$I = \{i \leqslant l \mid F_i \leq G\}, \quad J = \{i \leqslant l \mid F_i \leq H\},$$

$$G' = \sqcup\{F_i \mid i \in I\}, \quad H' = \sqcup\{F_i \mid i \in J\}$$

(в случае $I = \varnothing$ полагаем $G' = \varnothing$ и аналогично для J). Тогда G' и H' имеют требуемые свойства. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Структуры $(\mathcal{P}_k; \leq)$ и $(\mathcal{L}_k; \leq)$ устроены сложнее, чем $(\mathcal{F}_k; \leq)$. Например, в [4] была построена бесконечная убывающая цепь в $\mathcal{P}_2$. Этот пример легко изменить так, чтобы получить бесконечную антицепь в $\mathcal{P}_2$, а также бесконечные убывающую цепь и антицепь в $\mathcal{L}_3$. Итак, структуры $\mathcal{P}_k$ $(k \geqslant 2)$ и $\mathcal{L}_k$ $(k \geqslant 3)$ не являются нётеровыми квазипорядками.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Для любого $k \geqslant 2$ множество $\mathcal{F}_k$ не является начальным сегментом квазипорядка $(\mathcal{P}_k; \leq)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = (\{0, 1, 2\}; \leq, c)$ — 2-цепь, где $\leq$ имеет естественную интерпретацию, а c определяется с помощью равенств $c(0) = c(2) = 0$, $c(1) = 1$. Пусть $P = (\{0, 1, 2, 3\}; \leq, d)$ — 2-ч.у.м., в котором

$0 < 1$, $2 < 3$, $2 < 1$, а $d(0) = d(3) = 0$, $d(1) = d(2) = 1$. Легко проверить, что $P < T$ и P не эквивалентно никакому 2-лесу.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Упомянутый выше пример из [4] бесконечной убывающей цепи в $\mathcal{P}_2$ таков, что все ее члены не превосходят T, где T — 2-цепь из предыдущего доказательства. Поэтому квазипорядок $\{P \in \mathcal{P}_2 \mid P \leq T\}$ не является нётеровым.

§ 2. Булевы иерархии разбиений

В этом параграфе даются точные определения булевых иерархий разбиений, упоминавшихся во введении, и устанавливаются некоторые используемые в дальнейшем результаты.

Пусть $P = (P; \leq)$ — конечный ч.у.м., и $\mathcal{L} \subseteq P(M)$ — база. Функцию вида $S : P \to \mathcal{L}$ назовем P-*последовательностью* и обозначим либо через букву S, либо более подробно $\{S_p\}_{p \in P}$. P-последовательность S назовем *монотонной*, если она является монотонным отображением из $(P; \leq)$ в $(\mathcal{L}; \subseteq)$, и *допустимой*, если $\bigcup\limits_x S_x = M$ и $S_x \cap S_y = \cup\{S_z \mid z \leq x, y\}$. Заметим: любая допустимая P-последовательность монотонна; если F является лесом, то F-последовательность S допустима тогда и только тогда, когда она монотонна, $\bigcup\limits_x S_x = M$ и $S_x \cap S_y = \varnothing$ для любых x, y, несравнимых в F.

Через $H(P, \mathcal{L})$ обозначается множество всех допустимых P-последовательностей, а через $\mathcal{L}(P)$ — множество всех P-разбиений $\{T_x\}_{x \in P}$ множества M таких, что $\cup\{T_y \mid y \leq x\} \in \mathcal{L}$ для любого $x \in P$.

Для любой P-последовательности S определим отображение $\tilde{S} : P \to P(M)$ посредством $\tilde{S}_x = S_x \setminus \cup\{S_y \mid y < x\}$. Заметим, что это обозначение $\tilde{S}$ несколько отличается от применяемого в [1, 3] для того, чтобы подчеркнуть его связь с подобным определением из [12], использовавшимся в контексте так называемой тонкой иерархии.

ЛЕММА 2.1. *Отображение $S \mapsto \tilde{S}$ устанавливает биекцию между множествами $H(P, \mathcal{L})$ и $\mathcal{L}(P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в неявном виде содержится в [1, 3].

В следующей лемме (а также в некоторых аналогичных утверждениях ниже), которая также известна из [1, 3], разбиение $\{\tilde{S}_x\}$ отождествляется с функцией из M в P, переводящей любое $m \in M$ в единственный элеиент $x \in P$, удовлетворяющий соотношению $m \in \tilde{S}_x$.

ЛЕММА 2.2. *Если P, Q — конечные ч.у.м., и $f : P \to Q$ — монотонная функция, то $f \circ \tilde{S} \in \mathcal{L}(Q)$ для любого $S \in H(P, \mathcal{L})$.*

Пусть $\mathcal{L}(P, c) = \{c \circ \tilde{S} \mid S \in H(P, \mathcal{L})\}$ для конечного k-ч.у.м. (P, c). Заметим, что $\mathcal{L}(P, c) \subseteq k^M$, т. е. $\mathcal{L}(P, c)$ является классом k-разбиений множества M.

Следующая лемма также содержится в [1, 3]. Здесь приводится ее короткое доказательство, имеющее отношение и к некоторым последующим результатам.

ЛЕММА 2.3. *Пусть (P, c) и (Q, d) — конечные k-ч.у.м. Если $(P, c) \leq (Q, d)$, то $\mathcal{L}(P, c) \subseteq \mathcal{L}(Q, d)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : (P, c) \to (Q, d)$ — морфизм, тогда, в частности, имеем $c = d \circ f$. Возьмем любой элемент из $\mathcal{L}(P, c)$, он имеет вид $c \circ \tilde{S}$ для некоторого $S \in H(P, \mathcal{L})$. По лемме 2.2, $f \circ \tilde{S} \in \mathcal{L}(Q)$. Поэтому $c \circ \tilde{S} = d \circ (f \circ \tilde{S}) \in \mathcal{L}(Q, d)$.

Теперь можно привести определение иерархий разбиений из [1, 3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. (i) *Булева иерархия k-разбиений над $\mathcal{L}$* — это совокупность классов $BH_k(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(P, c) \mid (P, c) \in \mathcal{L}_k\}$.

(ii) *Расширенная булева иерархия k-разбиений над $\mathcal{L}$* — это совокупность классов $RBH_k(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(P, c) \mid (P, c) \in \mathcal{P}_k\}$.

Булева иерархия $BH_k(\mathcal{L})$ в приведенном определении выглядит на первый взгляд как произвольное и немотивированное ограничение расширенной булевой иерархии $RBH_k(\mathcal{L})$. На самом деле исходное определение булевой иерархии из [1], равносильное приведенному выше, дается в терминах булевых функций и является весьма естественным. По техническим причинам здесь не используется это исходное определение. Дополнительное обсуждение имеется в [4].

Используя обозначения из предыдущего параграфа, добавим к определенным выше иерархиям совокупности

$$FBH_k(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(P,c) \mid (P,c) \in \mathcal{F}_k\} \text{ и } TBH_k(\mathcal{L}) = \{\mathcal{L}(P,c) \mid (P,c) \in \mathcal{T}_k\}.$$

Из леммы 2.3 вытекает, что ч.у.м. $(RBH_k(\mathcal{L}); \subseteq)$ является гомоморфным образом квазипорядка $(\mathcal{P}_k; \leq)$, аналогично и для других трех иерархий. Отсюда для иерархии FBH получаем важное

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Для любых $k \in \omega$ и базы $\mathcal{L}$ ч.у.м. $(FBH_k(\mathcal{L}); \subseteq)$ является нётеровым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.3 ч.у.м. $(FBH_k(\mathcal{L}); \subseteq)$ является гомоморфным образом нётерова квазипорядка $(\mathcal{F}_k; \leq)$. Как известно [9], гомоморфный образ нётерова квазипорядка является нётеровым квазипорядком.

Следствие показывает, что иерархия $FBH_k(\mathcal{L})$ ближе (по сравнению с иерархиями из определения 2.4) к иерархиям из дескриптивной теории множеств и теории вычислимости, где уровни иерархий всегда образуют нётеров ч.у.м. по включению. Поэтому подструктуры $FBH_k(\mathcal{L})$ и $TBH_k(\mathcal{L})$ обладают лучшими свойствами, чем структура $RBH_k(\mathcal{L})$.

Из предыдущего параграфа следует, что нет причин, по которым ч.у.м. $(BH_k(\mathcal{L}); \subseteq)$ и $(RBH_k(\mathcal{L}); \subseteq)$ были бы нётеровыми над любой базой $\mathcal{L}$ (хотя, насколько известно автору, до сих пор нет и обратного примера). В следующем параграфе покажем, что над редуцируемыми базами ситуация обстоит намного лучше.

§ 3. Булевы иерархии разбиений над редуцируемой базой

ТЕОРЕМА 3.1. *Если база $\mathcal{L}$ редуцируема, то $RBH_k(\mathcal{L}) = FBH_k(\mathcal{L})$.*

Перед тем, как доказывать теорему, установим пару лемм. Пусть $\{A_x\}_{x \in X}$ — последовательность элементов множества $\mathcal{L}$, занумерованная элементами конечного множества X. *Редуктом для* $\{A_x\}_{x \in X}$ называется последовательность $\{A'_x\}_{x \in X}$ попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{L}$

такая, что $A'_x \subseteq A_x$ для любого $x \in X$ и $\bigcup_x A'_x = \bigcup_x A_x$. Следующее утверждение проверяется индукцией по $|X|$.

ЛЕММА 3.2. *Если $\mathcal{L}$ редуцируема, то для любой конечной X-последовательности множеств из $\mathcal{L}$ найдется редукт.*

ЛЕММА 3.3. *Пусть $\mathcal{L}$ — редуцируемая база, P — конечный ч.у.м., и F, f — объекты из леммы* 1.1. *Тогда* $\mathcal{L}(F, f) = \mathcal{L}(P, \mathrm{id})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что (F, f) и (P, id) рассматриваются в этом доказательстве как P-ч.у.м., см. § 1. По лемме 2.3 включение слева направо справедливо над любой базой $\mathcal{L}$. Остается построить по любому $S \in H(P, \mathcal{L})$ функцию $T \in H(F, \mathcal{L})$ так, чтобы $f \circ \tilde{T} = \tilde{S}$. Построим $T : F \to \mathcal{L}$ индукцией по уровням $F(1), F(2), \ldots$ ч.у.м. F (см. док-во леммы 1.1). Для уровня $F(1)$ выберем редукт $\{S'_p\}_{p \in P(1)}$ для последовательности $\{S_p\}_{p \in P(1)}$ и положим $T_x = S'_{f(x)}$ для любого $x \in F(1)$. Пусть теперь $y \in F(2)$, тогда $y \in x\downarrow$ для единственного $x \in F(1)$. Выберем редукт $\{S'_p\}_{p \in f(x)\downarrow}$ для $\{S_p\}_{p \in f(x)\downarrow}$ и положим $T_y = T_x \cap S'_{f(y)}$ для любого $y \in x\downarrow$. Продолжая далее, получим функцию $T : F \to \mathcal{L}$.

Заметим, что $T_y \subseteq T_x$ для всех $y < x$ из F (включение достаточно проверить для случая $y \in x\downarrow$, а это очевидно по построению). Далее,

$$\cup\{T_x \mid x \in F(1)\} = \cup\{S'_{f(x)} \mid x \in F(1)\} = \cup\{S_p \mid p \in P(1)\} = M.$$

Наконец, проверим, что $T_y \cap T_{y_1} = \varnothing$, если y, y_1 несравнимы в F. Сначала рассмотрим случай, когда y, y_1 принадлежат разным деревьям леса F. В этом случае существуют единственные $x \geq y$ и $x_1 \geq y_1$ с условием $x \neq x_1$, $x, x_1 \in F(1)$. Имеем $T_x = S'_{f(x)}$ и $T_{x_1} = S'_{f(x_1)}$, поэтому T_x и T_{x_1} не пересекаются (поскольку $\{S'_p\}_{p \in P(1)}$ есть редукт для $\{S_p\}_{p \in P(1)}$). По монотонности $T_y \subseteq T_x$ и $T_{y_1} \subseteq T_{x_1}$, поэтому T_y и T_{y_1} также не пересекаются.

Пусть теперь y, y_1 принадлежат одному дереву леса F; тогда в F существует супремум $x = y \cup y_1$. Возьмем единственные $z, z_1 \in x\downarrow$ такие, что $y \leq z \leq x$ и $y_1 \leq z_1 \leq x$. По построению $T_z = T_x \cap S'_{f(z)}$ и $T_{z_1} = T_x \cap S'_{f(z_1)}$. Множества $S'_{f(z)}$ и $S'_{f(z_1)}$ не пересекаются, поскольку они — различные члены некоторого редукта. Поэтому T_z, T_{z_1} не пересекаются, а следовательно (в силу монотонности), не пересекаются и T_y, T_{y_1}.

Таким образом, $T \in H(F, \mathcal{L})$. Рассмотрим разбиение $\{\tilde{T}_x\}_{x \in F}$. Утверждаем, что $\tilde{T}_x \subseteq \tilde{S}_{f(x)}$ для любого $x \in F$. В самом деле, возьмем любое $a \in \tilde{T}_x = T_x \setminus \cup\{T_y \mid y < x\}$. Тогда $a \in S_{f(x)}$, поскольку $T_x \subseteq S_{f(x)}$ по построению T. Покажем, что $a \notin \cup\{S_z \mid z < f(x)\}$. Предположим противное. Тогда, в силу монотонности S, $a \in S_z$ для некоторого $z \in f(x)\downarrow$. Напомним, что (по лемме 1.1) f устанавливает биекцию между $x\downarrow$ и $f(x)\downarrow$, причем $T_y = T_x \cap S'_{f(y)}$ для любого $y \in x\downarrow$, а $\cup\{S_z \mid z \in f(x)\downarrow\} = \cup\{S'_z \mid z \in f(x)\downarrow\}$. Поэтому $a \in T_y$ для некоторого $y \in x\downarrow$. Получаем противоречие.

Теперь ясно, что для любого $y \in P$ выполняется равенство $\tilde{S}_y = \cup\{\tilde{T}_x \mid f(x) = y\}$, эквивалентное равенству $f \circ \tilde{T} = \tilde{S}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.1. Включение $FBH_k(\mathcal{L}) \subseteq RBH_k(\mathcal{L})$ тривиально, поскольку любой k-лес является k-ч.у.м. Возьмем любой класс из $RBH_k(\mathcal{L})$, он имеет вид $\mathcal{L}(P, c)$ для подходящего конечного k-ч.у.м. (P, c). Пусть F, f — объекты из леммы 1.1. Достаточно установить, что $\mathcal{L}(F, c \circ f) = \mathcal{L}(P, c)$. Поскольку $f : (F, c \circ f) \to (P, c)$ и по лемме 1.3, имеем $\mathcal{L}(F, c \circ f) \subseteq \mathcal{L}(P, c)$.

Для проверки обратного включения возьмем произвольный элемент из $\mathcal{L}(P, c)$, он имеет вид $c \circ \tilde{S}$ для некоторого $S \in H(P, \mathcal{L})$. По доказательству леммы 3.3 найдется $T \in H(F, \mathcal{L})$ с условием $f \circ \tilde{T} = \tilde{S}$. По доказательству леммы 2.3 выполняются $c \circ f \circ \tilde{T} = c \circ \tilde{S}$ и $(c \circ f) \circ \tilde{T} \in \mathcal{L}(F, c \circ f)$. Отсюда $c \circ \tilde{S} \in \mathcal{L}(F, c \circ f)$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 и следствия 2.5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Над любой редуцируемой базой $\mathcal{L}$ ч.у.м. $(RBH_k(\mathcal{L}); \subseteq)$ является нётеровым.*

В силу теоремы 3.1, $BH_k(\mathcal{L}) \subseteq FBH_k(\mathcal{L})$, если $\mathcal{L}$ редуцируема. Следующий результат дает описание классов $BH_k(\mathcal{L})$ в терминах классов $FBH_k(\mathcal{L})$.

ТЕОРЕМА 3.5. *Если $\mathcal{L}$ редуцируема, то $BH_k(\mathcal{L})$ совпадает с совокупностью классов вида $\mathcal{L}(T, d)$, где (T, d) — конечное k-дерево, все листья (т. е. минимальные элементы) которого имеют одну и ту же метку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $\mathcal{L}(T, d) \in BH_k(\mathcal{L})$, если (T, d)

имеет указанное свойство. Если T является цепью, то оно является также решеткой, и утверждение тривиально. В противном случае добавим к T наименьший элемент и пометим его меткой, которая расположена на листьях дерева T; полученный k-ч.у.м. обозначим (P, c). Заметим, что P является решеткой, поэтому $\mathcal{L}(P, c) \in BH_k(\mathcal{L})$. Пусть теперь $(F, c \circ f)$ — k-лес, построенный из (P, c) как при доказательстве леммы 1.2. Тогда $(F, c \circ f)$ — k-дерево, полученное из (T, d) добавлением единственного сына к любому листу дерева T и присоединением к нему метки листа. Ясно, что $(F, c \circ f) \equiv (T, d)$, откуда $\mathcal{L}(T, d) = \mathcal{L}(F, c \circ f) = \mathcal{L}(P, c) \in BH_k(\mathcal{L})$.

Обратно, возьмем любой класс из $BH_k(\mathcal{L})$, он имеет вид $\mathcal{L}(P, c)$ для некоторой конечной k-решетки (P, c). Опять рассмотрим k-лес $(F, c \circ f)$ из леммы 1.2. Ч.у.м P имеет наибольший элемент (поэтому F является деревом) и наименьший элемент b с меткой $c(b)$. Тогда любой лист x дерева F имеет метку $c(b)$ (иначе выполнялось бы $f(x) > b$, и по построению F можно было бы добавить сына x к F; получили бы противоречие). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Пусть $\mathcal{L}$ — редуцируемая база, (P, c) — k-ч.у.м. с наименьшим и наибольшим элементами. Тогда $\mathcal{L}(P, c) \in BH_k(\mathcal{L})$.*

§ 4. Булевы иерархии разбиений над рекурсивно перечислимыми множествами

В этом параграфе рассмотрим частный случай, когда $M = \omega$ и $\mathcal{L}$ совпадает с решеткой $\mathcal{E}$ всех р.п. подмножеств ω. Известно, (см., напр., [13]), что $\mathcal{E}$ является редуцируемой базой. Естественным образом можно отождествить k-разбиения множества ω с элементами множества k^ω, т. е. с нумерациями вида $\nu : \omega \to k = \{0, \ldots, k-1\}$. Покажем, что в этом случае существуют тесные взаимосвязи объектов, изучавшихся выше, с некоторыми хорошо развитыми разделами теории нумераций [11, 14, 15], а именно: с вычислимыми и с полными нумерациями.

Напомним некоторые определения. *Нумерация* — это произвольная функция с областью определения ω. Нумерация $\nu : \omega \to \mathcal{E}$ *вычислима*, если множество $\{(n,x) \mid x \in \nu_n\}$ р.п. Для любых семейства $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ р.п. множеств и отображения $c : \mathcal{A} \to k$ через $C(\mathcal{A})$ обозначается множество всех вычислимых нумераций вида $\nu : \omega \to \mathcal{A}$. Положим $C(\mathcal{A}, c) = \{c \circ \circ \nu \mid \nu \in C(\mathcal{A})\}$. Любое семейство $\mathcal{A}$ р.п. множеств частично упорядочено отношением включения; через $\sqsubseteq$ обозначается двойственный частичный порядок на $\mathcal{A}$, т. е. $(\mathcal{A}; \sqsubseteq) = (\mathcal{A}; \supseteq)$.

Свяжем введенные понятия с понятиями из § 2. Для любого разбиения $S \in \mathcal{E}(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ через ν_S обозначается соответствующая нумерация, т. е. для любых $A \in \mathcal{A}$ и $n \in \omega$ условия $\nu_S(n) = A$ и $n \in S_A$ равносильны.

ЛЕММА 4.1. *Для любых конечного семейства $\mathcal{A}$ р.п. множеств и разметки $c : \mathcal{A} \to k$ отображение $S \mapsto \nu_S$ устанавливает биекцию между $\mathcal{E}(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ и $C(\mathcal{A})$, а также между $\mathcal{E}(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c)$ и $C(\mathcal{A}, c)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из известных результатов теории нумераций (см, напр., [11, гл. 1, § 6, предлож. 1]) вытекает, что нумерация $\nu : \omega \to \mathcal{A}$ вычислима тогда и только тогда, когда индексное множество $\nu^{-1}(\{X \in \mathcal{A} \mid A \subseteq X\})$ р.п. для любого $A \in \mathcal{A}$. Сравнивая это утверждение с определением множества $\mathcal{L}(P; \leq)$ в § 2, сразу получаем первое утверждение. Второе утверждение вытекает из первого.

Описание булевых иерархий разбиений над р.п. множествами в терминах вычислимых нумераций дает

ТЕОРЕМА 4.2. (i) *$RBH_k(\mathcal{E})$ — это совокупность всех классов вида $C(\mathcal{A}, c)$, где $\mathcal{A}$ — конечное семейство р.п. множеств и $(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c) \in \mathcal{P}_k$.*

(ii) *$BH_k(\mathcal{E})$ — это совокупность всех классов вида $C(\mathcal{A}, c)$, где $\mathcal{A}$ — конечное семейство р.п. множеств и $(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c) \in \mathcal{L}_k$.*

(iii) *$FBH_k(\mathcal{E})$ — это совокупность всех классов вида $C(\mathcal{A}, c)$, где $\mathcal{A}$ — конечное семейство р.п. множеств и $(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c) \in \mathcal{F}_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) По лемме 4.1 любой класс $C(\mathcal{A}, c)$ принадлежит совокупности $RBH_k(\mathcal{E})$. Необходимо проверить, что любой класс из $RBH_k(\mathcal{E})$, имеющий по определению 2.4 вид $\mathcal{E}(P; \leq, d)$ для некоторого $(P; \leq, d) \in \mathcal{P}_k$, совпадает с $C(\mathcal{A}, c)$ для подходящего конечного $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. Без ограничения общности можно предполагать, что $P \subseteq \omega$, поскольку любой конечный k-ч.у.м. изоморфен некоторому k-ч.у.м. с таким свойством. Пусть теперь $\mathcal{A} = \{\check{x} \mid x \in P\}$. Тогда $\mathcal{A}$ есть конечное семейство (конечных) р.п. множеств и $(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ изоморфно $(P; \leq)$. Поэтому $(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c)$ изоморфно $(P; \leq, d)$ для некоторого $c : \mathcal{A} \to k$. По леммам 4.1 и 2.3, $\mathcal{E}(P; \leq, d) \simeq \mathcal{E}(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c)$ и отображение $S \mapsto \nu_S$ устанавливает биекцию между $\mathcal{E}(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c)$ и $C(\mathcal{A}, c)$.

Утверждения (ii) и (iii) доказываются аналогично.

Из теорем 4.2 и 3.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *$RBH_k(\mathcal{E})$ совпадает с совокупностью классов $C(\mathcal{A}, c)$, где $\mathcal{A}$ — конечное семейство р.п. множеств и $(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c) \in \mathcal{F}_k$.*

Напомним еще несколько определений из теории нумераций. Нумерация μ *сводится* к нумерации ν $(\mu \leq \nu)$, если $\mu = \nu \circ f$ для подходящей рекурсивной функции f. Нумерации μ и ν *эквивалентны* $(\mu \equiv \nu)$, если $\mu \leq \nu$ and $\nu \leq \mu$. Класс $\mathcal{C}$ нумераций называется *главным идеалом*, если он замкнут вниз и имеет наибольший элемент по отношению $\leq$, т. е. $\mathcal{C} = \{\mu \mid \mu \leq \nu\}$ для подходящей нумерации ν.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Любой класс из $RBH_k(\mathcal{E})$ является главным идеалом квазипорядка $(k^\omega; \leq)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [11, гл. 1, § 2, предлож. 4], что для любого конечного семейства $\mathcal{A}$ р.п. множеств класс $C(\mathcal{A})$ является главным идеалом. Для любого $c : \mathcal{S} \to k$ класс $C(\mathcal{S}, c)$ также будет главным идеалом, поскольку $\mu \leq \nu$ влечет $c \circ \mu \leq c \circ \nu$. Остается применить теорему 4.2.

Определим бинарную операцию $\oplus$ прямой суммы нумераций:

$$(\mu \oplus \nu)(2n) = \mu(n), \quad (\mu \oplus \nu)(2n+1) = \nu(n).$$

При любом множестве S структура $(S^\omega; \leq, \oplus)$ вызывает интерес специалистов по теории нумераций. Обогатим эту структуру унарными операциями p_s для всех $s \in S$ следующим образом (подробнее см. в [5]). Пусть υ — универсальная частично рекурсивная функция [13]. Конкретный пример такой функции задается при помощи соотношения $\upsilon\langle n, x\rangle = \phi_n(x)$, где $\langle , \rangle$ — рекурсивная спаривающая функция, а $\{\phi_n\}$ — стандартная нумерация всех частично рекурсивных функций. Для любой нумерации ν

определим нумерацию $p_s(\nu)$ как

$$[p_s(\nu)](n) = \begin{cases} s, & \text{если } \upsilon(n) \text{ не определено,} \\ \nu\upsilon(n) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Сформулируем некоторые известные свойства получаемой таким образом структуры $(S^\omega; \leq, \oplus, p_s)$. Доказательства содержатся в [5, 14, 15]. Некоторые из них нетривиальны и используют вариант теоремы Клини о рекурсии для полных нумераций.

ЛЕММА 4.5. *Имеют место следующие свойства*:

1) $\leq$ — *квазипорядок, и* $\oplus$ — *операция супремума для* $\leq$;

2) $\nu \leq p_s(\nu)$, $\mu \leq \nu \to p_s(\mu) \leq p_s(\nu)$, $p_s(p_s(\nu)) \leq p_s(\nu)$;

3) $p_s(\mu) \leq p_t(\nu) \wedge s \neq t \to p_s(\mu) \leq \nu$;

4) $p_s(\mu) \leq \nu \oplus \xi \to p_s(\mu) \leq \nu \vee p_s(\mu) \leq \xi$;

5) *если* $f : S \to T$, *то* $f \circ (\mu \oplus \nu) = (f \circ \mu) \oplus (f \circ \nu)$ *и* $f \circ p_s(\nu) = p_{f(s)}(f \circ \nu)$.

С любым конечным семейством $\mathcal{A}$ р.п. множеств, для которого $(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ является лесом, свяжем нумерацию $\nu_{\mathcal{A}}$ индукцией по $|\mathcal{A}|$ следующим образом:

если $\mathcal{A} = \{A\}$ одноэлементно, то $\nu_{\mathcal{A}}(n) = A$ для любого $n \in \omega$;

если $\mathcal{A}$ — собственный лес, то $\nu_{\mathcal{A}} = \nu_{\mathcal{A}_0} \oplus \ldots \oplus \nu_{\mathcal{A}_n}$, где $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ — деревья леса $\mathcal{A}$;

если $\mathcal{A}$ — нетривиальное дерево, то $\nu_{\mathcal{A}} = p_A(\nu_{\mathcal{A}_0} \oplus \ldots \oplus \nu_{\mathcal{A}_n})$, где A — корень дерева $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_i = \hat{A}_i$ для сыновей $A_0, \ldots, A_n$ корня A (в случае $n = 0$ сумма отождествляется с $\nu_{\mathcal{A}_0}$).

Заметим, что нумерация $\nu_{\mathcal{A}}$ определена только с точностью до отношения $\equiv$ (например, определение использует ассоциативность и коммутативность операции $\oplus$ по модулю $\equiv$, вытекающие из леммы 4.5). Следующий результат дополняет следствие 4.4, поскольку дает явное описание наибольшей нумерации в $C(\mathcal{A})$.

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть* $\mathcal{A}$ — *конечное семейство р.п. множеств такое, что* $(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ *является лесом. Тогда* $\nu_{\mathcal{A}}$ *является наибольшим элементом в* $C(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является рутинным упражнением из теории нумераций, поэтому приведем только схему рассуждения. Индукцией по $|\mathcal{A}|$ проверяем сначала, что $\nu_{\mathcal{A}} \in C(\mathcal{A})$ (т. е. нумерация $\nu_{\mathcal{A}}$ вычислима), затем — что $\mu \leq \nu_{\mathcal{A}}$ для любого $\mu \in C(\mathcal{A})$. Доказательство не использует лемму 4.5, а только определения операций $p_s(\nu), \oplus$ и хорошо известные свойства нумерации ϕ.

Рассмотрим структуру $(k^{\omega}; \leq, \oplus, p_0, \ldots, p_{k-1})$, где $k = \{0, \ldots, k-1\}$. С любым конечным k-лесом $F = (F; \leq, c)$ свяжем нумерацию $\nu_F \in k^{\omega}$ индукцией по $|F|$ следующим образом:

если $F = \{x\}$ одноэлементно, то $\nu_F(n) = c(x)$ для любого $n \in \omega$;

если F — собственный лес, то $\nu_F = \nu_{F_0} \oplus \ldots \oplus \nu_{F_n}$, где $F_0, \ldots, F_n$ — деревья леса F;

если F — нетривиальное дерево, то $\nu_F = p_{c(x)}(\nu_{F_0} \oplus \ldots \oplus \nu_{F_n})$, где x — корень дерева F, а $F_i = \hat{x}_i$ для сыновей $x_0, \ldots, x_n$ корня x (в случае $n = 0$ сумма отождествляется с ν_{F_0}).

Нумерация ν_F тесно связана с нумерацией $\nu_{\mathcal{A}}$ для подходящего $\mathcal{A}$. А именно, выберем семейство $\mathcal{A}$ р.п. множеств такое, что $(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ изоморфно $(F; \leq)$, и пусть f — изоморфизм (см. док-во теор. 4.2). Из свойства 5 леммы 4.5 следует, что $\nu_F = c \circ f \circ \nu_{\mathcal{A}}$. Отсюда и по теореме 4.6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.7. *Класс нумераций $\mathcal{E}(F, c) \subseteq k^{\omega}$ является главным идеалом, и ν_F — наибольший элемент в $\mathcal{E}(F, c)$.*

Основным результатом этого параграфа является

ТЕОРЕМА 4.8. *Для любых конечных k-лесов $F = (F, c)$ и $G = (G, d)$, $(F, c) \leq (G, d)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}(F, c) \subseteq \mathcal{E}(G, d)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из леммы 2.3. Остается проверить достаточность. По следствию 4.7 достаточно показать, что из $F \not\leq G$ следует $\nu_F \not\leq \nu_G$. Это проверяется индукцией по $|F|+|G|$, причем базис индукции (т. е. F и G одноэлементны) тривиален. При $|F| + |G| > 2$ рассмотрим следующие 3 случая.

С л у ч а й 1: F — собственный лес с деревьями $F_0, \ldots, F_m$. По доказательству теоремы 1.7, $F_i \not\leq G$ для некоторого $i \leqslant m$. По индукции

$\nu_{F_i} \not\leq \nu_G$ для некоторого $i \leqslant m$. По свойству 1, $\nu_{F_i} \leq \nu_F = \nu_{F_0} \oplus \ldots \oplus \nu_{F_m}$. Следовательно, $\nu_F \not\leq \nu_G$.

Случай 2: F — дерево, а G — собственный лес с деревьями $G_0, \ldots, G_n$. Из доказательства теоремы 1.7 следует, что $F \not\leq G_j$ для всех $j \leqslant n$. По индукции $\nu_F \not\leq \nu_{G_j}$ для всех $j \leqslant n$. По свойству 4, $\nu_F \not\leq \nu_G = \nu_{G_0} \oplus \ldots \oplus \nu_{G_n}$.

Случай 3: F и G являются k-деревьями с корнями x и y соответсвенно. Имеем $\nu_F = p_{c(x)}(\nu_{F_0} \oplus \ldots \oplus \nu_{F_m})$ и $\nu_G = p_{d(y)}(\nu_{G_0} \oplus \ldots \oplus \nu_{G_n})$, где F_i, G_j такие же, как и в приведенных выше определениях. Предположим, рассуждая от противного, что $\nu_F \leq \nu_G$. Если $c(x) \neq d(y)$, то, по свойству 3, $\nu_F \leq \nu_{G \setminus \{y\}}$. По индукции $F \leq G \setminus \{y\}$. Отсюда $F \leq G$, приходим к противоречию.

Наконец, пусть $c(x) = d(y)$. По свойству 2, $\nu_{F \setminus \{x\}} \leq \nu_G$. По индукции $F \setminus \{x\} \leq G$. Пусть f — морфизм из $(F \setminus \{x\}; c)$ в (G, d). Тогда $f \cup \{(x, y)\}$ — морфизм из (F, c) в (G, d). Отсюда $F \leq G$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Таким образом, ч.у.м. $(FBH_k(\mathcal{E}); \subseteq) = (RBH_k(\mathcal{E}); \subseteq)$ изоморфен фактор-ч.у.м. квазипорядка $(\mathcal{F}_k; \leq)$ из §1. Это дает много информации о булевой иерархии разбиений над р.п. множествами. Например, $(RBH_2(\mathcal{E}); \subseteq)$ есть нётеров ч.у.м. ширины 2 и высоты ω. На самом деле из свойств разностной иерархии Ершова над $\mathcal{E}$ (см. [5, 7, 16]) следует, что этот ч.у.м. совпадает с ч.у.м., образованным конечными уровнями разностной иерархии (надо только добавить Δ-уровни).

При $k > 2$, $(RBH_k(\mathcal{E}); \subseteq)$ есть нётеров ч.у.м. высоты ω и неограниченной ширины, образующий (с присоединенным внешним образом наименьшим элементом) даже дистрибутивную решетку. По теореме 4.6 все классы этой иерархии являются главными идеалами, наибольшие элементы которых имеют естественные описания. Это в точности элементы подалгебры алгебры $(k^\omega; \oplus, p_0, \ldots, p_{k-1})$, порожденной константными нумерациями $\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}$ такими, что $\nu_i(n) = i$, $n \in \omega$. Данная подалгебра была введена и изучалась в [5—7]. В этом параграфе о ней получены новые результаты, которые очевидным образом релятивизуются для решетки множеств, р.п. относительно любого оракула. В частности, они справедливы для любого уровня Σ_ρ гиперарифметической иерархии подмножеств ω (ρ — рекурсивный ординал, $0 < \rho < \omega_1^{CK}$). Справедлива, в частности, следующая

ТЕОРЕМА 4.9. *Для любых $k \geqslant 2$ и $0 < \rho < \omega_1^{CK}$ структура $(RBH_k(\Sigma_\rho); \subseteq)$ изоморфна фактор-структуре квазипорядка $(\mathcal{F}_k; \leq)$, а следовательно, и структуре $(RBH_k(\mathcal{E}); \subseteq)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. Можно показать, что при $1 < \rho < \omega_1^{CK}$ классы из $TBH_k(\Sigma_\rho)$ являются, а из $FBH_k(\Sigma_\rho) \setminus TBH_k(\Sigma_\rho)$ не являются главными идеалами по отношению сводимости нумераций. Таким образом, классы из $TBH_k(\Sigma_\rho)$ обобщают Σ- и Π-уровни, а из $FBH_k(\Sigma_\rho) \setminus TBH_k(\Sigma_\rho)$ — Δ-уровни иерархии Ершова над Σ_ρ.

§ 5. Булевы иерархии разбиений над открытыми множествами

В этом параграфе обсуждаются булевы иерархии разбиений над базой $\mathbf{\Sigma_1}$ открытых множеств в бэровском и канторовском пространствах. Известно (см., напр., [17]), что эта база редуцируема.

Напомним, что бэровское пространство определено на множестве $\mathbf{B} = \omega^\omega$, а канторовское — на множестве $\mathbf{C} = m^\omega$, $1 < m < \omega$. Топология на $\mathbf{B}$ (на $\mathbf{C}$) задается базисом открытых множеств вида $\check{\sigma} = \{\alpha \in \mathbf{B} \mid \sigma \subseteq \alpha\}$, где σ — конечная (возможно, пустая) последовательность натуральных чисел (соответственно, чисел из m), а $\sigma \subseteq \alpha$ означает, что σ является начальным сегментом α (функция α при этом рассматривается как ω-последовательность). Ниже иногда используем без напоминания некоторые стандартные и очевидные обозначения, связанные с конкатенацией последовательностей. Как хорошо известно, канторовское пространство для различных m одно и то же с точностью до гомеоморфизма.

Подробно рассмотрим лишь случай бэровского пространства, случай канторовского пространства отличается незначительно. Некоторые доказательства этого параграфа проводятся как в предыдущем, поэтому используются обозначения и формулировки из § 4. Поскольку в § 4 основную роль играли понятия и результаты теории нумераций, по аналогии вводятся понятия и результаты, в которых вместо ω используются множества $\mathbf{B}$ или $\mathbf{C}$. Насколько известно автору, соответствующие результаты в литературе в явном виде не описаны (исключением является рукопись [18], в которой кратко изложена, среди прочего, часть приводимого далее материала).

Аналогом понятия нумерации является понятие *бэризации* (или, в случае канторовского пространства, *канторизации*), т. е. отображения ν с областью определения $\mathbf{B}$ ($\mathbf{C}$). В [18] соответствующие объекты назывались параметризациями. Для любого множества S через $S^{\mathbf{B}}$ обозначается множество всех бэризаций вида $\nu : \mathbf{B} \to S$. Будем говорить, что бэризация μ *сводится* к бэризации ν (и обозначать $\mu \leq \nu$), если $\mu = \nu \circ f$ для подходящей непрерывной функции $f : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$. Бэризации μ и ν *эквивалентны* ($\mu \equiv \nu$), если $\mu \leq \nu$ и $\nu \leq \mu$.

На множестве $\mathbf{B} = \omega^\omega$ в § 4 определена операция $\alpha \oplus \beta$ прямой суммы нумераций. Она задает гомеоморфизм пространств $\mathbf{B} \times \mathbf{B}$ и $\mathbf{B}$, поэтому иногда вместо $\alpha \oplus \beta$ удобнее использовать обозначение $\langle \alpha, \beta \rangle$. Любой бэризации вида $\nu : \mathbf{B} \to S^{\mathbf{B}}$ сопоставим бэризацию $U_\nu \in S^{\mathbf{B}}$ по правилу $U_\nu \langle \alpha, \beta \rangle = \nu_\alpha(\beta)$. В случае $S = 2 = \{0, 1\}$ множество $S^{\mathbf{B}}$ отождествляется с $P(\mathbf{B})$, отношение сводимости бэризаций переходит в отношение сводимости Уэджа $\leq_W$ [17], а бэризация U_ν естественным образом отождествляется с универсальным множеством $\{\langle \alpha, \beta \rangle \mid \beta \in \nu_\alpha\}$ бэризации ν.

Бэризацию $\nu : \mathbf{B} \to P(\mathbf{B})$ назовем *вычислимой*, если $U_\nu \in \mathbf{\Sigma}_1$. Заметим, что если ν вычислима, то $\mathrm{rng}(\nu) \subseteq \mathbf{\Sigma}_1$. Определим бинарную операцию $\oplus$ на бэризациях:

$$(\mu \oplus \nu)((2n) * \alpha) = \mu(\alpha) \text{ и } (\mu \oplus \nu)((2n+1) * \alpha) = \nu(\alpha),$$

где $n * \alpha$ — конкатенация числа n и функции α. В частности, эта операция определена на множестве $2^{\mathbf{B}} = P(\mathbf{B})$, т. е. применима к подмножествам бэровского пространства.

Пусть $\mathcal{A}$ — конечное семейство открытых множеств. Через $C(\mathcal{A})$ обозначается множество всех вычислимых бэризаций вида $\alpha : \mathbf{B} \to \mathcal{A}$. Для любого разбиения $S \in \mathbf{\Sigma}_1(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ через ν_S обозначается соответствующая бэризаация, т. е. для любых $A \in \mathcal{A}$ и $\alpha \in \mathbf{B}$ условия $\nu_S(\alpha) = A$ и $\alpha \in S_A$ равносильны. Лемме 4.1 аналогична следующая

ЛЕММА 5.1. *Для любых конечного семейства $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{\Sigma}_1$ и разметки $c : \mathcal{A} \to k$ отображение $S \mapsto \nu_S$ ($S \mapsto c \circ \nu_S$) задает биекцию между $\mathbf{\Sigma}_1(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ и $C(\mathcal{A})$ (соответственно, между $\mathbf{\Sigma}_1(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c)$ и $C(\mathcal{A}, c)$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом леммы 2.1 достаточно проверить, что бэризация $\nu : \mathbf{B} \to \mathcal{A}$ вычислима тогда и только тогда, когда $\nu^{-1}(\check{A}) \in \mathbf{\Sigma}_1$ для любого $A \in \mathcal{A}$, где $\check{A} = \{X \in \mathcal{A} \mid A \subseteq X\}$. Пусть $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_n\}$. Выберем конечные множества $F_i \subseteq A_i$ ($i \leqslant n$) такие, что из $F_i \subseteq A_j$ следует $A_i \subseteq A_j$, а из $A_i \subseteq A_j$ следует $F_i \subseteq F_j$ (построение таких множеств можно найти, напр., в [11, гл. 1, § 2, док-во предлож. 4]).

Предположим сначала, что ν вычислима, т. е. $U_\nu \in \mathbf{\Sigma}_1$, и проверим, что $B_i = \nu^{-1}(\check{A}_i) \in \mathbf{\Sigma}_1$ для любого $i \leqslant n$. Имеем

$$\alpha \in B_i \leftrightarrow A_i \subseteq \nu_\alpha \leftrightarrow F_i \subseteq \nu_\alpha \leftrightarrow \forall \beta \in F_i(\langle \alpha, \beta \rangle \in U_\nu),$$

откуда $B_i \in \mathbf{\Sigma}_1$ (поскольку при любом β отображение $\alpha \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$ непрерывно). Обратно, пусть $B_i \in \mathbf{\Sigma}_1$ при всех $i \leqslant n$. Так же, как в [11, гл. 2, § 6, док-во предлож. 3], проверяется, что

$$U_\nu = \cup_i (B_i \otimes A_i), \text{ где } B \otimes A = \{\langle \beta, \alpha \rangle \mid \beta \in B, \alpha \in A\}.$$

Поэтому $U_\nu \in \mathbf{\Sigma}_1$.

Теореме 4.2 аналогична следующая

ТЕОРЕМА 5.2. (i) *$RBH_k(\mathbf{\Sigma}_1)$ является совокупностью всех классов вида $C(\mathcal{A}, c)$, где $\mathcal{A}$ — конечное семейство открытых множеств и $(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c) \in \mathcal{P}_k$.*

(ii) *$BH_k(\mathbf{\Sigma}_1)$ является совокупностью всех классов вида $C(\mathcal{A}, c)$, где $\mathcal{A}$ — конечное семейство открытых множеств и $(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c) \in \mathcal{L}_k$.*

(iii) *$FBH_k(\mathbf{\Sigma}_1)$ является совокупностью всех классов вида $C(\mathcal{A}, c)$, где $\mathcal{A}$ — конечное семейство открытых множеств и $(\mathcal{A}; \sqsubseteq, c) \in \mathcal{F}_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 4.2, достаточно проверить утверждение (i). По лемме 5.1 любой класс $C(\mathcal{A}, c)$ принадлежит совокупности $RBH_k(\mathbf{\Sigma}_1)$. Остается проверить, что любой класс из $RBH_k(\mathbf{\Sigma}_1)$, по определению 2.4 имеющий вид $\mathbf{\Sigma}_1(P; \leq, d)$ для некоторого $(P; \leq, d) \in \mathcal{P}_k$, совпадает с $C(\mathcal{B}, c)$ для подходящего конечного $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{\Sigma}_1$. Пусть $\mathcal{A}$ — конечное семейство конечных подмножеств множества ω, построенное в доказательстве теоремы 4.2. Сопоставим каждому $A \subseteq \omega$ открыто-замкнутое множество $A^* \subseteq \mathbf{B}$ по правилу $A^* = \{\alpha \in \mathbf{B} \mid \alpha(0) \in \in A\}$. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A}^* = \{A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$, тогда $(\mathcal{B}; \sqsubseteq) \simeq (\mathcal{A}; \sqsubseteq) \simeq (P; \leq)$. Теорема доказана.

Семейства вида $\mathcal{A}^*$ будем называть *простейшими*; они понадобятся нам далее.

Из теорем 5.2 и 3.1 вытекает аналог следствия 4.3. Аналог следствия 4.4 также имеет место, но приводимое ниже доказательство этого следствия отличается от доказательства в § 4. Оно базируется на понятии кратной сводимости последовательностей, изучавшегося в контексте теории вычислимости в [11].

Пусть опять P — конечный ч.у.м. Будем говорить, что P-последовательность $A : P \to \mathbf{\Sigma_1}$ *сводится* к P-последовательности B $(A \leq B)$, если существует непрерывная функция $f : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ такая, что $A_p = f^{-1}(B_p)$ для любого $p \in P$. Заметим, что последовательность, сводящаяся к монотонной (допустимой), является монотонной (допустимой). *Универсальной* монотонной (допустимой) P-последовательностью называется монотонная (допустимая) P-последовательность, к которой сводится произвольная монотонная (допустимая) P-последовательность.

ТЕОРЕМА 5.3. *Для любого конечного ч.у.м. P найдутся универсальные монотонная и допустимая P-последовательности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V — открытое множество, к которому сводится любое другое открытое (в качестве V можно взять универсальное открытое множество [17]) и пусть $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Положим $W_{p_i} = \{\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \mid \alpha_i \in V\}$. Тогда W есть P-последовательность, к которой сводится любая другая. Действительно, пусть S — произвольная

P-последовательность, тогда S_p сводится к V для любого $p \in P$. Пусть g_p — сводящие непрерывные функции. Непрерывная функция $g(\alpha) = \langle g_{p_1}(\alpha), \dots, g_{p_n}(\alpha)\rangle$ осуществляет сводимость S к W.

Пусть U — монотонная P-последовательность такая, что $U_p = \cap\{W_q \mid p \leq q\}$. Проверим, что произвольная монотонная P-последовательность S сводится к U. По рассуждениям из предыдущего абзаца S сводится к W посредством некоторой непрерывной функции g. Легко видеть, что эта же функция сводит S к U.

Изучение допустимых последовательностей начнем с того, что рассмотрим два частных случая. Пусть P есть дерево с корнем p и $Q = P \setminus \{p\}$. По доказанному выше найдется универсальная монотонная Q-последовательность X. Для любого неминимального элемента $a \in P$ пусть $a_1, \dots, a_k$ — все сыновья a в P, и $(X'_{a_1}, \dots, X'_{a_k})$ — редукт последовательности $(X_{a_1}, \dots, X_{a_k})$. Таким образом, определена некоторая Q-последовательность X'. Пусть U — допустимая P-последовательность такая, что $U_p = \mathbf{B}$ и $U_q = \cap\{X'_r \mid r \geq q\}$ при $q < p$. Эта последовательность будет универсальной допустимой. Действительно, пусть S — произвольная допустимая P-последовательность. Она монотонна, поэтому ее ограничение на множество Q сводится к X посредством некоторой непрерывной функции g. Утверждается, что функция g сводит S к U. Поскольку $S_p = U_p = \mathbf{B}$, достаточно показать, что $S_q = g^{-1}(U_q)$ для любого $q \in Q$.

Это проверяется индукцией по высоте элемента q. Пусть $q \in P(2)$ (базис индукции), т. е. q является сыном корня p в P. Пусть $a_1, \dots, a_k$ — все сыновья элемента p в P. Без ограничения общности можно считать, что $q = a_1$. Если $\alpha \in S_q$, то, в силу допустимости S, $\alpha \in S_q \setminus (S_{a_2} \cup \ldots \cup S_{a_k})$. Поэтому $g(\alpha) \in X_q \setminus (X_{a_2} \cup \ldots \cup X_{a_k}) \subseteq X'_q = U_q$. Базис индукции будет установлен, если из $\alpha \notin S_q$ вывести $g(\alpha) \notin U_q$. Если $\alpha \notin S_{a_2} \cup \ldots \cup S_{a_k}$, то

$$g(\alpha) \notin X_{a_1} \cup \ldots \cup X_{a_k} = X'_{a_1} \cup \ldots \cup X'_{a_k} = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_k},$$

поэтому $g(\alpha) \notin U_q$. Если $\alpha \in S_{a_2} \cup \ldots \cup S_{a_k}$, то $g(\alpha) \in U_{a_2} \cup \ldots \cup U_{a_k}$, откуда опять получаем $g(\alpha) \notin U_q$.

Пусть теперь $q \notin P(2)$, тогда q является сыном единственного элемента $a < p$. Пусть опять $a_1, \ldots, a_k$ — все сыновья элемента a, и $q = a_1$. Если $\alpha \notin S_a$, то по индукции $g(\alpha) \notin U_a$, откуда $g(\alpha) \notin U_q$. При $\alpha \in S_a$ рассуждение аналогично рассуждению для базиса индукции. Это завершает рассуждения в случае, когда P является деревом.

Теперь обратимся к случаю, когда $P = P_0 \cup \ldots \cup P_n$ является собственным лесом с деревьями $P_0, \ldots, P_n$. По доказанному для любого $i \leqslant n$ существует универсальная допустимая P_i-последовательность U_i. Определим P-последовательность U как

$$U(p) = \{a * \beta \mid p \in P_i, a \equiv i(\operatorname{mod}(n+1)),\, \beta \in U_i(p)\}.$$

Она будет универсальной допустимой P-последовательностью. Допустимость проверяется очевидным образом. Пусть теперь S — произвольная допустимая P-последовательность. Положим $S_i(p_i) = \mathbf{B}$ и $S_i(q) = S(q)$, где $i \leqslant n$, p_i — корень дерева P_i и $q \in P_i \setminus \{p_i\}$. Тогда S_i есть допустимая P_i-последовательность, поэтому найдутся непрерывные функции g_i $(i \leqslant n)$, которые сводят S_i к U_i. Нетрудно проверить, что непрерывная функция g, задаваемая с помощью равенства $g(\alpha) = i * g_i(\alpha)$, где i — единственное число, удовлетворяющее соотношению $\alpha \in S(p_i)$, сводит S к U.

Наконец, рассмотрим случай произвольного ч.у.м. P. Пусть F и f — лес и функция из леммы 1.1. По доказанному выше найдется универсальная допустимая F-последовательность X. По леммам 2.1 и 2.2 найдется допустимая P-последовательность U такая, что $f \circ \tilde{X} = \tilde{U}$. Проверим, что U является универсальной допустимой P-последовательностью. Действительно, пусть S — произвольная допустимая P-последовательность. В соответствии с доказательством леммы 3.3 найдется допустимая F-последовательность T такая, что $f \circ \tilde{T} = \tilde{S}$. Поскольку последовательность X универсальна, $\tilde{T} = \tilde{X} \circ g$ для некоторой непрерывной функции g. Отсюда $\tilde{S} = f \circ \tilde{T} = f \circ \tilde{X} \circ g = \tilde{U} \circ g$. Таким образом, функция g сводит S к U. Теорема доказана.

Теперь нетрудно доказать аналог следствия 4.4.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Любой класс из* $RBH_k(\mathbf{\Sigma}_1)$ *является главным идеалом квазипорядка* $(k^{\mathbf{B}}; \leq)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве следствия 4.4, достаточно проверить, что для любого конечного семейства $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{\Sigma}_1$ квазипорядок $(C(\mathcal{A}); \leq)$ имеет наибольший элемент. Пусть $P = (\mathcal{A}; \sqsubseteq)$. Для любых P-последовательностей A и B справедливо $A \leq B \leftrightarrow \nu_A \leq \nu_B$. Поэтому с учетом леммы 5.1 отображение $A \mapsto \nu_A$ задает изоморфизм квазипорядков $(H(P, \mathbf{\Sigma}_1); \leq)$ и $(C(\mathcal{A}); \leq)$. По теореме 5.3 первый квазипорядок имеет наибольший элемент, то же верно и для второго.

Для любого множества S определим унарные операции p_s, $s \in S$, на множестве $S^{\mathbf{B}}$. Пусть $K = \{\alpha \mid \exists k(0^k 1 \subseteq \alpha)\}$, тогда $K \in \mathbf{\Sigma}_1 \setminus \mathbf{\Pi}_1$. Для любой бэризации ν определим бэризацию $p_s(\nu)$ как

$$[p_s(\nu)](\alpha) = \begin{cases} s, & \text{если} \quad \alpha \notin K, \\ \nu(\beta), & \text{если} \quad \alpha = 0^k 1\beta \in K. \end{cases}$$

ЛЕММА 5.5. *Свойства* 1—5 *из леммы* 4.5 *справедливы для структуры* $(S^{\mathbf{B}}; \leq, \oplus, p_s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не совсем тривиальна лишь проверка свойств 3 и 4, поэтому их и рассмотрим. Пусть f — непрерывная функция, сводящая $p_s(\mu)$ к $p_t(\nu)$. Из $s \neq t$ вытекает, что $f(0^\omega) \in K$, т. е. $f(0^\omega) \supseteq 0^k 1$ для некоторого k. Поскольку f непрерывна, найдется n, для которого $0^k 1 \subseteq f(\alpha)$ при всех $\alpha \supseteq 0^n$. Определим непрерывную функцию

$$h(\alpha) = \begin{cases} 0^\omega, & \text{если} \quad \alpha \notin K, \\ 0^{n+l} 1\beta, & \text{если} \quad \alpha = 0^l 1\beta. \end{cases}$$

Тогда $fh(\alpha) \supseteq 0^k 1$ для любого α. Пусть g — непрерывная функция, удовлетворяющая равенству $fh(\alpha) = 0^k 1 g(\alpha)$. Тогда

$$p_s(\mu)(\alpha) = p_s(\mu)h(\alpha) = p_t(\nu)fh(\alpha) = p_t(\nu)(0^k 1 g(\alpha)) = \nu g(\alpha),$$

т. е. функция g сводит $p_s(\mu)$ к ν.

Аналогично доказывается и утверждение 4. Пусть f — непрерывная функция, сводящая $p_s(\mu)$ к $\nu \oplus \xi$. Пусть $B_0 = \{\alpha \mid \alpha(0) \text{ четно}\}$ и $B_1 =$

$= \{\alpha \mid \alpha(0)$ нечетно$\}$. Тогда $f(0^\omega)$ принадлежит одному из множеств B_0 и B_1, пусть для определенности первому. Для некоторого четного числа a имеем $f(0^\omega) = a * \beta$, поэтому найдется n такое, что $f(0^n\alpha) \supseteq a$ для всех α. Рассуждая так же, как для утверждения 3, получаем $p_s(\mu) \leq \nu$. Лемма доказана.

Наша следующая цель — получить аналог теоремы 4.6. Его мы установим для случая простейших семейств (см. док-во теор. 5.2). Для любого такого семейства $\mathcal{A}$ бэризация $\nu_\mathcal{A}$ определяется как в § 4.

ТЕОРЕМА 5.6. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— простейшее семейство, а* $(\mathcal{A}; \sqsubseteq)$ *— лес. Тогда бэризация* $\nu_\mathcal{A}$ *является наибольшим элементом в* $(C(\mathcal{A}); \leq)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по $|\mathcal{A}|$. Базис индукции очевиден, поэтому будем считать, что $|\mathcal{A}| > 1$. Предположим сначала, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n$ — собственный лес, и для упрощения обозначений рассмотрим случай $n = 1$. По индукции $\nu_{\mathcal{A}_i}$ — наибольший элемент в $C(\mathcal{A}_i)$, $i \leqslant 1$. Поэтому $\nu_\mathcal{A} = \nu_{\mathcal{A}_0} \oplus \nu_{\mathcal{A}_1} \in C(\mathcal{A})$. Остается проверить, что любая бэризация $\nu \in C(\mathcal{A})$ сводится к $\nu_\mathcal{A}$. Пусть A_i — наименьший элемент в $(\mathcal{A}_i; \subseteq)$, $i \leqslant 1$. Поскольку $\mathcal{A}$ — простейшее, $A_i = B_i^*$ для некоторого конечного множества $B_i \subseteq \omega$. Пусть $\mathcal{B}_i = \{\alpha \in \mathbf{B} \mid A_i \subseteq \nu(\alpha)\}$. Множества $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ образуют разбиение множества $\mathbf{B}$ и являются открытыми, поскольку

$$\alpha \in \mathcal{B}_i \leftrightarrow \forall a \in B_i(a0^\omega \in \nu(\alpha)) \leftrightarrow \forall a \in B_i(\langle a0^\omega, \alpha\rangle \in U_\nu).$$

Определим бэризации ν_i, $i \leqslant 1$, как

$$\nu_i(\alpha) = \begin{cases} A_i, & \text{если} \quad \alpha \notin \mathcal{B}_i, \\ \nu(\alpha), & \text{если} \quad \alpha \notin \mathcal{B}_i. \end{cases}$$

Тогда $\nu \equiv \nu_0 \oplus \nu_1$ и $\nu_i \in C(\mathcal{A}_i)$. По индукции $\nu_i \leq \nu_{\mathcal{A}_i}$, откуда $\nu \leq \nu_\mathcal{A}$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ является деревом, тогда $\nu_\mathcal{A} = p_A(\nu)$ и $\nu = \nu_{\mathcal{A}_0} \oplus \ldots \ldots \oplus \nu_{\mathcal{A}_n}$ (используем обозначения из определения нумераций $\nu_\mathcal{A}$ в § 4, множества $A, A_0, \ldots, A_n$ также берутся из этого определения). По индукции $\nu_{\mathcal{A}_i}$ — наибольший элемент в $C(\mathcal{A}_i)$, $i \leqslant n$. Имеем

$$\beta \in \nu_\mathcal{A}(\alpha) \leftrightarrow \beta \in A \vee \exists k(\beta = 0^k 1\gamma \wedge \beta \in \nu(\gamma)),$$

поэтому $\nu_{\mathcal{A}} \in C(\mathcal{A})$.

Остается проверить, что $\xi \leq \nu_{\mathcal{A}}$ при любом $\xi \in C(\mathcal{A})$. Для любого $\alpha \in \mathbf{B}$ либо $\xi(\alpha) = A$, либо существует единственное $i \leqslant n$ с условием $A_i \subseteq \xi(\alpha)$. Пусть $\mathcal{B}_i = \{\alpha \in \mathbf{B} \mid A_i \subseteq \xi(\alpha)\}$, $i \leqslant n$. Определим бэризации $\xi_i : \mathbf{B} \to \mathcal{A}_i$ как

$$\xi_i(\alpha) = \begin{cases} A_i, & \text{если} \quad A_i \not\subseteq \xi(\alpha), \\ \xi(\alpha), & \text{если} \quad A_i \not\subseteq \xi(\alpha). \end{cases}$$

Поскольку множества $\mathcal{B}_i$ открыты, бэризации ξ_i вычислимы. Поэтому $\xi_i \leq \leq \nu_i \leq \nu$. Пусть g_i — непрерывная функция, сводящая ξ_i к ν, $i \leqslant n$.

Поскольку множество U_ξ открыто, существует непрерывная функция $u : \mathbf{B} \times \omega \times \omega \to \omega$ такая, что

$$\forall s(u(\alpha, x, s) < u(\alpha, x, s+1))$$

в случае $x0^\omega \notin \xi(\alpha)$ и

$$\exists s(u(\alpha, x, 0) < \ldots < u(\alpha, x, s) = u(\alpha, x, s+1) = u(\alpha, x, s+2) = \ldots)$$

в противном случае. Пусть $v(\alpha, x) = \sup_s u(\alpha, x, s)$.

Определим непрерывную функцию

$$f(\alpha) = \begin{cases} 0^\omega, & \text{если} \quad \forall i(A_i \not\subseteq \xi(\alpha)), \\ 0^k 1 g_i(\alpha), & \text{если} \quad A_i \not\subseteq \xi(\alpha), \end{cases}$$

где $k = \max\{v(\alpha, x) \mid x \in A_i\}$. Она сводит ξ к $\nu_{\mathcal{A}}$, что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Доказательство последней теоремы дает новое доказательство теоремы 5.3 для случая деревьев и лесов.

Теперь повторяя рассуждения из § 4 получаем аналоги следствия 4.7 и теоремы 4.8. Из них и теоремы 4.6 вытекает

ТЕОРЕМА 5.8. *Для любого $k \geqslant 2$ частичный порядок $(RBH_k(\mathbf{\Sigma}_1); \subseteq)$ изоморфен фактор-структуре квазипорядка $(\mathcal{F}_k; \leq)$, а следовательно, и частичному порядку $(RBH_k(\mathcal{E}); \subseteq)$.*

Пусть теперь Σ_1 — редуцируемая база эффективно открытых множеств бэровского пространства, т. е. объединений вычислимых последовательностей базисных открытых множеств. Для этой базы справедливы аналоги всех утверждений этого параграфа, правда, не для любых конечных семейств $\mathcal{A}$ эффективно открытых множеств, а для семейств вида $\mathcal{A}^*$ из доказательства теоремы 5.2 (причина в том, что, например, док-во леммы 5.1 проходит лишь в случае, когда множества F_i состоят из рекурсивных функций; такие множества существуют для семейств вида $\mathcal{A}^*$). Этих замечаний достаточно для вывода аналога предыдущей теоремы для класса Σ_1 эффективно открытых множеств.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. Естественно поставить вопрос о том, справедлив ли аналог последней теоремы для других уровней Σ_ρ, $1 < \rho < \omega_1$, иерархии Бореля. Методов этой статьи достаточно для доказательства этого аналога лишь для подструктуры $TBH_k(\Sigma_\rho)$ структуры $RBH_k(\Sigma_\rho)$. Правдоподобно, что он справедлив и в общем случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10. Справедлив аналог замечания 4.10.

§ 6. Булевы иерархии разбиений над регулярными открытыми множествами

В этом параграфе кратко обсудим булевы иерархии разбиений в классе регулярных подмножеств канторовского пространства $\mathbf{C} = m^\omega$, $1 < m < \omega$. В этом случае элементы пространства $\mathbf{C}$ часто называют *ω-словами над алфавитом m*, а подмножества множества $\mathbf{C}$ — *ω-языками.* Важное значение для информатики имеет класс $\mathcal{R}$ так называемых регулярных ω-языков, который изучал Р. Бюхи и многие его последователи. Пусть $\mathcal{R}\mathbf{\Sigma}_n$ — класс всех регулярных $\mathbf{\Sigma}_n$-множеств. Как хорошо известно, классы $\mathcal{R}\mathbf{\Sigma}_1$ и $\mathcal{R}\mathbf{\Sigma}_2$ являются базами; в [19] установлено, что эти базы редуцируемы.

Понятия и результаты § 5 без труда переносятся на случай базы $\mathcal{R}\mathbf{\Sigma_1}$ (например, канторизация $\nu : \mathbf{C} \to P(\mathbf{C})$ называется в данном контексте *вычислимой*, если $U_\nu \in \mathcal{R}\mathbf{\Sigma_1}$, а в определении сводимости канторизаций вместо непрерывных функций берутся функции $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, вычислимые детерминированными конечными автоматами). С использованием известных результатов о регулярных ω-языках (см. [19] и цитированную там литературу) нетрудно проверить, что аналоги утверждений 5.1—5.3 справедливы для случая, когда $\mathcal{A}$ — конечное семейство открыто-замкнутых множеств канторовского пространства (такие множества, как и множество K из определения операций p_s, регулярны). Точно так же доказываются и аналоги всех оставшихся результатов § 5. В частности, справедлива

ТЕОРЕМА 6.1. *Для любого* $k \geqslant 2$ *структура* $(RBH_k(\mathcal{R}\mathbf{\Sigma}_1); \subseteq)$ *изоморфна фактор-структуре квазипорядка* $(\mathcal{F}_k; \leq)$*, а следовательно, и структуре* $(RBH_k(\mathcal{E}); \subseteq)$.

Справедливы и аналоги замечаний 5.9 и 5.10.

В заключение отметим, что данная статья является несколько расширенным вариантом препринта [20], написанного во время пребывания автора в университете г. Вюрцбурга (Германия). Автор благодарит К. Вагнера за приглашение посетить этот университет, а также его и С. Косуба за полезные обсуждения. Автор признателен также рецензенту за внимательное прочтение и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Kosub, K. Wagner*, The boolean hierarchy of partitions, Technical Report 233, Institut für Informatik, Univ. Würzburg, 1999.
2. *S. Kosub, K. Wagner*, The boolean hierarchy of NP-partitions, in: Proc. 17th Symp. Theor. Aspects Comp. Sci. (Lect. Notes Comput. Sci., **1770**), Berlin, Springer-Verlag, 2000, 157—168.
3. *S. Kosub*, On NP-partitions over posets with an application of reducing the set of solutions of NP problems, in: Proc. 25th Symp. Math. Found. Comp. Sci. (Lect. Notes Comput. Sci., **1893**) Berlin, Springer-Verlag, 2000, 467—476.
4. *S. Kosub*, Complexity and partitions, PhD Thesis, Würzburg, 2000.
5. *В. Л. Селиванов*, О структуре степеней обобщенных индексных множеств, Алгебра и логика, **21**, N 4 (1982), 472—491.
6. *В. Л. Селиванов*, Тонкая иерархия арифметических множеств и определимые индексные множества, в сб. "Математическая логика и алгоритмические проблемы" (Труды Ин-та матем. СО АН СССР, **12**), 1989, 165—185.

7. *В. Л. Селиванов*, Иерархическая классификация арифметических множеств и индексные множества, докт. диссер., Ин-т матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1989.
8. *B. A. Davey, H. A. Priestley*, Introduction to lattices and order, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1994.
9. *J. B. Kruskal*, The theory of well-quasi-ordering: a frequently discovered concept, J. Comb. Theory, Ser. A, **13**, N 3 (1972), 297—305.
10. *J. B. Kruskal*, Well-quasi-ordering, the tree theorem, and Varzsonyi's conjecture, Trans. Am. Math. Soc., **95**, N 2 (1960), 210—225.
11. *Ю. Л. Ершов*, Теория нумераций, М., Наука, 1977.
12. *V. L. Selivanov*, Fine hierarchies and Boolean terms, J. Symb. Log., **60**, N 1 (1995), 289—317.
13. *H. Rogers*, Theory of recursive functions and effective computability, New York, McGrow Hill, 1967.
14. *Y. L. Ershov*, Theorie der Numerierungen I, Z. math. Log. Grundl. Math., **19**, N 4 (1973), 289—388.
15. *Y. L. Ershov*, Theorie der Numerierungen II, Z. math. Log. Grundl. Math., **21**, N 6 (1975), 473—584.
16. *Ю. Л. Ершов*, Об одной иерархии множеств III, Алгебра и логика, **9**, N 1 (1970), 34—51.
17. *Y. N. Moschovakis*, Descriptive set theory, Amsterdam, North-Holland, 1980.
18. *V. L. Selivanov*, Hierarchies, numerations, index sets, handwritten notes, Novosibirsk, 1992.
19. *V. L. Selivanov*, Fine hierarchy of regular ω-languages, Theor. Comput. Sci., **191**, N 1-2 (1998), 37—59.
20. *V. L. Selivanov*, Boolean hierarchy of partitions over reducible bases, Technical report 276, Institut für Informatik, Univ. Würzburg, 2001.

Поступило 11 сентября 2001 г.

Окончательный вариант 3 сентября 2003 г.

Адрес автора:

СЕЛИВАНОВ Виктор Львович, Педагогический университет, ул. Вилюйская, 28, г. Новосибирск, 630126, РОССИЯ. e-mail: vseliv@nspu.ru