



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. A. Shirokov, One a type of automorphic forms,
Zap. Nauchn. Sem. POMI, 1992, Volume 201, 177–
189

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.174

January 17, 2025, 08:31:34



ОДИН ТИП АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

Пусть Γ - фуксова группа преобразований единичного круга \mathbb{D} на себя. Аналитическую в \mathbb{D} функцию f будем называть аналитической Γ -автоморфной формой веса $-2k$, k - натуральное, если для всякого $T \in \Gamma$ справедливо соотношение

$$f(T(z)) = f(z)(T'(z))^k.$$

Нетривиальные, т.е. не равные тождественно нулю аналитические автоморфные формы веса $-2k$ могут существовать только если Γ - фуксова группа Π рода [1]. Х.Поммеренке [2] впервые построил пример аналитической автоморфной формы веса -2 для фуксовой группы Π рода без параболических элементов, предельное множество которой удовлетворяет условию Карлесона. Условие отсутствия параболических элементов было снято в работе Даасе [3], в которой построены аналитические Γ -автоморфные формы веса $-2k$ для любого натурального k . Поскольку Γ -автоморфные формы тесно связаны со строением предельного множества группы, представляет интерес привести примеры таких форм.

В настоящей работе рассматриваются конечно порожденные фуксовы группы Π рода. Предельное множество для таких групп заведомо удовлетворяет условию Карлесона [2]. Приводимый новый метод построения возможен, в сущности, из-за равномерности в распределении длин дополнительных интервалов предельного множества и значений $T(0)$, $T \in \Gamma$, в указанном классе групп.

Получаемая форма оказывается в определенном смысле максимальной возможной гладкости в замкнутом круге $\bar{\mathbb{D}}$.

В дальнейшем Λ^n означает класс функций f , аналитических в \mathbb{D} , для которых в $\bar{\mathbb{D}}$ справедливо условие $|f^{(n)}(z)| \leq c_f$, $z \in \mathbb{D}$; $\Lambda^{n+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, означает подкласс Λ^n , для которого выполнено

$$|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(\xi)| \leq c_f |z - \xi|^\alpha, \quad z, \xi \in \bar{\mathbb{D}}.$$

Х. Поммеренке построил аналитическую Γ -автоморфную форму $k \in \Lambda^1$ веса -2 ; оказывается, это наибольшая возможная гладкость ненулевых форм такого веса, и вообще, можно построить автоморфные формы веса $-2k$ из Λ^k , но не более гладкие.

Напомним, что замкнутое множество $E \subset \partial \mathbb{D}$ называется

карлесоновым, если $\text{mes } E = 0$, и

$$\int_{\partial D} |\log \text{dist}(z, E)| |dz| < \infty.$$

ТЕОРЕМА I. Пусть Γ - фуксова группа II рода, действующая разрывно в D , E - ее множество предельных точек, f - аналитическая Γ -автоморфная форма веса $-2k$. Тогда, если $f \in \Lambda^{k+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то $f \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, дифференцируя равенство

$$f(T(z)) = f(z)(T'(z))^k \quad (0)$$

последовательно $k-1$ раз и затем полагая $z=0$ и выбирая последовательность $T_n \in \Gamma$ так, чтобы $T_n(0) \rightarrow \xi \in E$, находим, что если $f \in \Lambda^k$, то

$$f|_E = f'|_E = \dots = f^{(k-1)}|_E = 0. \quad (1)$$

Пусть, далее J - произвольная свободная сторона фундаментального многоугольника Форда для группы Γ , $I \subset \partial D \setminus E$ - такая дополнительная дуга E , что $J \subset I$.

Рассмотрим множество образов $\{T(I)\}$, $T \in \Gamma$. Для любого $\sigma > 0$ найдется такая дуга $I \subset \partial D$, длина которой меньше σ , внутри которой бесконечно много образов $T(I)$. Пусть $I_0 = T_0(I)$, $T_0 \in \Gamma$, $I_0 \subset I$, ξ_1, ξ_2 - концы дуги I_0 . Если функция $f \in \Lambda^{k+\alpha}(\partial D)$, то, используя (1) и несложную модификацию леммы I из [4], получим соотношение

$$|f(\xi)| \leq C_f \sigma^\alpha \min(|\xi - \xi_1|^k, |\xi - \xi_2|^k), \quad \xi \in I_0. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь следующую функцию на ∂D :

$$\rho(\xi) = \frac{|\xi - \xi_1| |\xi - \xi_2|}{|\xi_1 - \xi_2|},$$

которую определяем такой формулой, если ξ лежит на интервале $S \subset \partial D \setminus E$ с концами ξ_1 и ξ_2 .

Если преобразование $T(z) = e^{\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ переводит ξ_1 и ξ_2 соответственно в t_1 и t_2 , то для $\xi \in S$ имеем

$$\rho(T(\xi)) = \frac{|T(\xi) - t_1| |T(\xi) - t_2|}{|t_1 - t_2|} = \frac{|T(\xi) - T(\xi_1)| |T(\xi) - T(\xi_2)|}{|T(\xi_1) - T(\xi_2)|} =$$

$$= \frac{|\xi - \xi_1| (1 - |a|^2) |\xi - \xi_2| (1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}\xi| |1 - \bar{a}\xi_1| |1 - \bar{a}\xi| |1 - \bar{a}\xi_2|} = \frac{|\xi - \xi_1| |\xi - \xi_2| (1 - |a|^2)^2}{|\xi_1 - \xi_2| |1 - \bar{a}\xi|^2} =$$

$$\frac{|\xi_2 - \xi_1| (1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}\xi_1| |1 - \bar{a}\xi_2|} = \rho(\xi) |T'(\xi)|,$$

или

$$\frac{\rho(T(\xi))}{|T'(\xi)|} = \rho(\xi), \quad \xi \in \partial D. \quad (3)$$

В терминах введенной функции ρ соотношение (2) переписывается так:

$$|f(\xi)| \leq c_{f,\Gamma} \sigma^\alpha \rho^k(T_0(\xi)), \quad \xi \in I. \quad (4)$$

Вспомогая, что $I_0 = T_0(I)$, преобразуем (4):

$$|f(T_0(\xi))| \leq c_{f,\Gamma} \sigma^\alpha \rho^k(T_0(\xi)), \quad \xi \in I,$$

и далее

$$|f(T_0(\xi))| |T_0'(\xi)|^{-k} \leq c_{f,\Gamma} \sigma^\alpha \rho^k(T_0(\xi)) |T_0'(\xi)|^{-k}, \quad \xi \in I,$$

что с помощью (4) и (0) дает

$$|f(\xi)| \leq c_{f,\Gamma} \sigma^\alpha \rho^k(\xi), \quad \xi \in I,$$

откуда в силу произвольности $\sigma > 0$ следует, что $f|_I = 0$ и, значит, $f|_J = 0$. Поскольку J — любая свободная сторона \mathcal{D} , то $f|_{\partial \mathcal{D}} = 0$, и тогда $f \equiv 0$, что и требовалось.

Для построения Γ -автоморфной формы порядка $-2k$ нам будут нужны вспомогательные функции. Положим

$$u(z) = \sum_{T \in \Gamma} |T'(z)|, \quad z \in \partial D \setminus E.$$

Ясно, что

$$u(T_0(\xi)) = \sum_{T \in \Gamma} |T'(T_0(\xi))| = \sum_{T \in \Gamma} \frac{|T(T_0(\xi))'|}{|T_0'(\xi)|} = \frac{u(\xi)}{|T_0'(\xi)|}. \quad (5)$$

В дальнейшем считаем Γ конечно порожденной, тогда множество E предельных точек Γ удовлетворяет условию Карлесона и функция $\log u$ суммируема на ∂D [2].

Пусть W - внешняя функция в D , введенная Видомам, такая, что

$$|W(\xi)| = u(\xi), \quad \xi \in \partial D. \quad (5^I)$$

В таком случае, если $T \in \Gamma$, то легко непосредственно убедиться, что

$$W(T(z)) = \eta_T (W(T))_e(z), \quad (6)$$

где R_e - внешняя часть функции R , а $|\eta_T| = 1$. Используя (5), находим при $\xi \in \partial D$:

$$|W(T(\xi))| = u(T(\xi)) = \frac{u(\xi)}{|T'(\xi)|} = \frac{|W(\xi)|}{|T'(\xi)|}. \quad (7)$$

Поскольку W - внешняя функция, то из (6) и (7) находим

$$W(T(z)) = \eta_T \frac{W(z)}{T'(z)} \quad (8)$$

с некоторыми постоянными η_T , $|\eta_T| = 1$.

Положим $\lambda(z) = W^{-1}(z)$ и будем использовать это обозначение до конца работы. Соотношение (8) влечет для

$$\lambda^{k+1}(T(z)) = \eta_T^{-k-1} \lambda^{k+1}(z) (T'(z))^{k+1}, \quad (8^I)$$

а для $T_1, T_2 \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \eta_{T_1 T_2} &= \frac{W(T_1(T_2(z)))}{W(z)} (T_1(T_2(z)))' = \eta_{T_1} \frac{W(T_2(z))}{W(z) T_1'(z)} (T_1(T_2(z)))' = \\ &= \eta_{T_1} \eta_{T_2} \frac{W(z)}{W(z) T_1'(T_2(z)) \cdot T_2'(z)} \cdot (T_1(T_2(z)))' = \eta_{T_1} \eta_{T_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Положим, наконец,

$$H(z) = \sum_{T \in \Gamma} \eta_T^{-k-1} T'(z), \quad h(z) = H(z) \lambda^{k+1}(z). \quad (9^I)$$

Тогда (9) дает для $T_0 \in \Gamma$:

$$H(T_0(z)) = \sum_{T \in \Gamma} \eta_T^{-k-1} T'(T_0(z)) = \quad (10)$$

$$= \sum_{T \in \Gamma} \left(\eta_{TT_0} \cdot \frac{1}{\eta_{T_0}} \right)^{-k-1} (T(T_0(z)))' \cdot \frac{1}{T_0'(z)} = \eta_{T_0}^{k+1} H(z) \cdot \frac{1}{T_0'(z)}.$$

Теперь из (8^I) и (10) находим

$$H(T(z)) \lambda^{k+1}(T(z)) = \eta_T^{k+1} \frac{1}{T'(z)} \cdot H(z) \cdot \eta_T^{-k-1} (T'(z))^{k+1} \lambda^{k+1}(z) = H(z) \lambda^{k+1}(z) (T'(z))^k. \quad (11)$$

Таким образом, если $H \neq 0$, то функция $h(z) = H(z) \lambda^{k+1}(z)$ есть аналитическая Γ -автоморфная форма веса $-2k$. ●

ТЕОРЕМА 2. Если Γ - конечно порожденная фуксова группа II рода в круге \mathbb{D} , для которой ноль не является эллиптической точкой, то тогда функция $h(z) \neq 0$, определенная в (9), принадлежит классу λ^k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что h - Γ -автоморфная форма веса $-2k$, проверено в (11); убедимся, что $h \neq 0$. Для этого достаточно установить, что $H(z) \neq 0$. В самом деле, возьмем какое-нибудь $T_0(z) = e^{i\theta_0} \frac{z - \alpha_{T_0}}{1 - \bar{\alpha}_{T_0} z} \in \Gamma$, $T_0 \neq I$, и пусть

$$\left\{ T(z) = e^{i\theta_T} \frac{z - \alpha_T}{1 - \bar{\alpha}_T z} \right\} - \text{это множество всех отображений } T \in \Gamma.$$

Тогда

$$H(z) = \sum_{T \in \Gamma} \eta_T^{-k-1} e^{i\theta_T} \frac{1 - |\alpha_T|^2}{(1 - \bar{\alpha}_T z)^2}, \quad (11^I)$$

откуда видно, что H аналитична вне множества $E \cup \bigcup_{T \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{\bar{\alpha}_T} \right\}$. Поскольку $\alpha_T = T^{-1}(0)$ и поскольку 0 не есть эллиптическая точка, то разным T_1 и T_2 соответствуют разные α_{T_1} и α_{T_2} , и все точки $1/\bar{\alpha}_T$ также различны. Поскольку ряд (11^I) сходится вне $E \cup \bigcup_{T \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{\bar{\alpha}_T} \right\}$, то сходится и ряд

$$b(z) = \sum_{T \neq T_0} \eta_T^{-k-1} e^{i\theta_T} \frac{1 - |\alpha_T|^2}{(1 - z\bar{\alpha}_T)^2},$$

поэтому и функция $b(z)$ непрерывна в точке $1/\bar{\alpha}_{T_0}$, и

$$H(z) = \eta_{T_0}^{-k-1} e^{i\theta_{T_0}} \frac{1 - |\alpha_{T_0}|^2}{(1 - \bar{\alpha}_{T_0} z)^2} + b(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1/\bar{\alpha}_{T_0}} \infty,$$

т.е. $H \neq 0$.

Перейдем к проверке необходимой гладкости функции h . Соотношение $a \times b$ означает, что $c_1(\Gamma) a \leq b \leq c_2(\Gamma)$ с некоторыми постоянными $c_1(\Gamma) > 0$, $c_2(\Gamma) > 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $E_0 = E \cup \bigcup_{T \in \Gamma} \left\{ \frac{1}{\alpha_T} \right\}$; тогда

$$\text{dist}(z, E_0) \geq \text{const} \cdot \text{dist}(z, E). \quad (12)$$

Доказательство см. [5].

ЛЕММА 2. При $k = 1, 2, \dots$ справедливо

$$|H^{(k)}(\xi)| \leq c_k \frac{u(\xi)}{\text{dist}(\xi, E)^k}, \quad \xi \in D.$$

Доказательство получаем, дифференцируя (II^I) почленно, учитывая, что $|\xi - \frac{1}{\alpha}| \geq \text{dist}(\xi, E_0)$, $\frac{1}{\alpha} \in E_0$, и с учетом соотношения (12).

Следующая лемма является основой доказательства того, что для конечно порожденной фуксовой группы Π рода справедливо соотношение $\log \text{dist}(\xi, E) \in BMO$ [6]. Доказательство ее получается внимательным анализом замощения круга последовательными образами фундаментального многоугольника и очень длинно, хотя и элементарно.

ЛЕММА 3. Пусть $I \subset \partial D$, J - наибольшая из дуг $I \setminus E$ (или одна из таких). Тогда с некоторой постоянной c , зависящей только от Γ , выполняется

$$\left| \int_I \log \text{dist}(\xi, E) |d\xi| - |I| \log |J| \right| \leq c |I|,$$

где под $|I|$, $|J|$ подразумевается длина дуги.

Далее положим $\xi_I = \left(1 - \frac{|I|}{2\pi}\right) \xi_0$ для дуги I , серединой которой является точка ξ_0 .

ЛЕММА 4. Пусть $I \subset \partial D$, $J \subset I$ — наибольшая из дуг $I \setminus E$ (или одна из таких). Тогда для некоторой постоянной c_4 , зависящей только от Γ , выполнено

$$\left| \int_I \log u(\xi) |d\xi| - |I| \log u(\xi_J) \right| \leq c_4 |I|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, если $\sigma \in \partial D \setminus E$ — какой-то дополнительный интервал, то в силу легко проверяемого соотношения

$$c_1 \leq \frac{u(\xi_0)}{u(\xi)} \leq c \left(\frac{|\sigma|}{\text{dist}(\xi, E)} \right)^2 \quad (I3)$$

имеем

$$\left| \int_{\sigma} \log u(\xi) |d\xi| - \log u(\xi_{\sigma}) |\sigma| \right| \leq 2 \int_{\sigma} \log \frac{|\sigma|}{\text{dist}(\xi, E)} |d\xi| + c_2 |\sigma| \leq c_3 |\sigma|,$$

поэтому

$$\int_I \log u(\xi) |d\xi| = \sum_{\sigma \subset I} \log u(\xi_{\sigma}) |\sigma| + o(|I|). \quad (I4)$$

Далее, элементарные неравенства влекут соотношение

$$c_1 \left(\frac{|\sigma|}{|J|} \right)^2 \leq \frac{u(\xi_J)}{u(\xi_{\sigma})} \leq c_2 \left(\frac{|J|}{|\sigma|} \right)^2,$$

что вместе с Леммой 3 дает

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \subset I} \log u(\xi_{\sigma}) |\sigma| &= \sum_{\sigma \subset I} \log u(\xi_J) |\sigma| + \sum_{\sigma \subset I} \log \frac{u(\xi_{\sigma})}{u(\xi_J)} |\sigma| = \\ &= \log u(\xi_J) |I| + o \left(\sum_{\sigma \subset I} \log \frac{|J|}{|\sigma|} \cdot |\sigma| \right) = \log u(\xi_J) |I| + o(|I|), \end{aligned}$$

а это вместе с (I4) влечет (I3).

ЛЕММА 5. Для $\xi \in \partial D \setminus E$ имеем

$$u(\xi) \asymp \text{dist}^{-1}(\xi, E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi_0 = (1 - \text{dist}(\xi, E)) \xi$. Тогда с учетом (I2) имеем $u(\xi) \asymp u(\xi_0)$. Далее,

$$u(\xi_0) = \sum_{T \in \Gamma} \frac{1 - |\alpha_T|^2}{|1 - \bar{\alpha}_T \xi_0|^2} = \int_{\mathbb{D}} \frac{d\nu(\alpha)}{|1 - \bar{\xi}_0 \alpha|^2},$$

где $d\nu(\alpha) = \sum_{T \in \Gamma} (1 - |\alpha_T|^2) d\alpha_T$.

Несложно убедиться, что, если нуль не является эллиптической точкой группы Γ , то множество $\{\alpha_T^*\}_{T \in \Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \{T(0)\}_{T \in \Gamma}$ образует интерполяционное множество в круге \mathbb{D} . В самом деле, возьмем любую точку $\alpha_{T_0}^*$ и образуем

$$B(\alpha_{T_0}^*) = \prod_{\substack{T \in \Gamma \\ T \neq T_0}} \left| \frac{\alpha_T^* - \alpha_{T_0}^*}{1 - \bar{\alpha}_T \alpha_{T_0}^*} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{T \neq T_0} \rho(\alpha_T^*, \alpha_{T_0}^*).$$

Учтем, что для любого отображения S круга \mathbb{D} на себя имеем $\rho(S\alpha_T^*, S\alpha_{T_0}^*) = \rho(\alpha_T^*, \alpha_{T_0}^*)$. Полагая $S = T_0^{-1}$, имеем

$$B(\alpha_{T_0}^*) = \prod_{\substack{T \in \Gamma \\ T \neq T_0}} \rho(T_0^{-1}\alpha_T^*, T_0^{-1}\alpha_{T_0}^*) = \prod_{\substack{T \in \Gamma \\ T \neq T_0}} \rho(T_0^{-1}T(0), T_0^{-1}T_0(0)) = \prod_{\substack{S = T_0^{-1}T \neq I \\ S \in \Gamma}} \rho(\alpha_S^*, 0) = B(0) > 0,$$

что представляет собой условие Карлесона для интерполяционной последовательности $\{\alpha_T^*\} = \{\alpha_T\}$. Поэтому мера $d\nu$ - карлесона, и

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{d\nu(\alpha)}{|1 - \bar{\xi}_0 \alpha|^2} \leq c(\Gamma) \frac{1}{1 - |\xi_0|} \times c(\Gamma) \text{dist}^{-1}(\xi, E)$$

а, значит,

$$u(\xi) \leq c(\Gamma) \text{dist}^{-1}(\xi, E). \quad (15)$$

Пусть теперь $\xi_1 \in E$ - ближайшая к ξ точка спектра. Тогда, поскольку Γ - конечно порожденная группа, ξ_1 - точка аппроксимации [7], гл.10, а тогда существует точка $\alpha \in \{T^{-1}(0)\}_{T \in \Gamma}$ такая, что $|\alpha - \xi_1| \asymp 1 - |\alpha| \asymp |\xi - \xi_1|$ и поэтому

$$u(\xi) \geq c \text{dist}^{-1}(\xi, E), \quad (16)$$

что вместе с (15) и доказывает лемму.

ЛЕММА 6. Справедливо соотношение

$$\log u(\xi) \in BMO.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную дугу $I \subset \partial D$.
 Пусть $J \subset I$ - дуга максимальной длины в $I \setminus E$. Тогда (I5)
 и (I6) влекут соотношение

$$u(\xi) \geq cu(\xi_J), \quad \xi \in I,$$

где c - постоянная, не зависящая от I ; поэтому

$$\int_I \left| \log \frac{u(\xi)}{u(\xi_J)} \right| |d\xi| \leq \int_I \log \frac{u(\xi)}{cu(\xi_J)} |d\xi| + |\log c| |I| \leq c' |I|$$

в соответствии с леммой 4. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $\xi = e^{i\theta}$; тогда для $k \geq 1$ выполняются
 оценки

$$\left| \frac{\partial^k u(\xi)}{\partial \theta^k} \right| \leq c_k \text{dist}^{-k-1}(\xi, E), \quad \xi \in \partial D.$$

Доказательство следует из почленного дифференцирования
 формулы для $u(\xi)$ и применения леммы 5.

ЛЕММА 8. Пусть $z \in D$, $z \neq 0$, $z_0 = \frac{z}{|z|}$, $I_z = \{\xi \in \partial D : |\xi - z_0| \leq 1 - |z|\}$.
 Существует постоянная c , не зависящая от z , такая, что
 если $\max_{\xi \in I_z} \text{dist}(\xi, E) \geq 2(1 - |z|)$,

то

$$\int_{\partial D} \left| \log \frac{u(\xi)}{u(z_0)} \right| \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} |d\xi| \leq c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу леммы 5 $u(\xi) \asymp \text{dist}^{-1}(\xi, E)$,
 $\xi \in \partial D$, то достаточно установить, что

$$\int_{\partial D} \left| \log \frac{\text{dist}(\xi, E)}{\text{dist}(z_0, E)} \right| \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} |d\xi| \leq \text{const}. \quad (I7)$$

Однако если учесть определение I_z и то, что $\max_{\xi \in I_z} \text{dist}(\xi, E) \geq 2(1 - |z|)$, то можем записать

$$\log \text{dist}(z_0, E) = \frac{1}{|I_z|} \int_{I_z} \log \text{dist}(\xi, E) |d\xi| + o(1) \stackrel{\text{def}}{=} p_z + o(1)$$

и тогда, поскольку $\log \text{dist}(\xi, E) \in \text{BMO}$ [6], имеем ([8], гл.6)

$$\int_{\partial D} \left| \log \operatorname{dist}(\xi, E) - p_z \right| \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2} |d\xi| \leq \text{const},$$

что дает (17) и доказывает лемму.

ЛЕММА 9. Пусть $z \in D$, $1-|z| \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z, E)$. Тогда при $k \geq 2$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\partial D} \frac{\log u(\xi)}{(\xi-z)^k} d\xi \right| \leq c \operatorname{dist}^{-k+1}(z, E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_0 = \frac{z}{|z|}$. Положим

$$z = (1 - \operatorname{dist}(z_0, E)) z_0, \quad \gamma = \left\{ \xi \in \partial D : |\xi - z_0| \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(z_0, E) \right\}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{\log u(\xi)}{(\xi-z)^k} d\xi &= \int_{\partial D} \frac{\log u(\xi) - \log u(z_0)}{(\xi-z)^k} d\xi = \\ &= \int_{\gamma} \frac{\log u(\xi) - \log u(z_0)}{(\xi-z)^k} d\xi + \int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{\log u(\xi) - \log u(z_0)}{(\xi-z)^k} d\xi = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценка I : если положить для $\xi = e^{i\theta}$ и функции $v(\xi) = v(e^{i\theta})$

$$\frac{\partial v(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{ie^{i\theta}} \frac{\partial v(e^{i\theta})}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^m v(\xi)}{\partial \xi^m} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^{m-1} v(\xi)}{\partial \xi^{m-1}} \right),$$

то формула Тейлора дает (здесь $\xi = e^{i\theta}$, $z_0 = e^{i\theta_0}$):

$$v(\xi) = v(z_0) + \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\partial^\nu v(z_0)}{\partial \xi^\nu} (\xi - z_0)^\nu + R(\xi, z_0),$$

где

$$|R| \leq c_k \max_{\substack{t=e^{i\lambda} \\ \lambda \in (\theta, \theta_0)}} \left| \frac{\partial^k v(t)}{\partial t^k} \right| \cdot |\xi - z_0|^k.$$

Применяя эти соотношения к оценке I_1 для функции $v(\xi) = \log u(\xi)$ и учитывая, что для $\xi \in \gamma$ и любого ν справедливы (легко видеть по индукции из лемм 5 и 7) оценки

$$\left| \frac{\partial^\nu \log u(\xi)}{\partial \xi^\nu} \right| \leq c_\nu \text{dist}^{-\nu}(\xi, E),$$

получим

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{\partial^\nu \log u(z_0)}{\partial \xi^\nu} \int_\gamma \frac{d\xi}{(\xi-z)^{k-\nu}} + \int_\gamma \frac{R(\xi, z_0)}{(\xi-z)^k} d\xi \right| \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{k-1} c_\nu \text{dist}^{-\nu}(z_0, E) \cdot \text{dist}^{-k+\nu+1}(z_0, E) + c_k \text{dist}^{-k}(z_0, E) \cdot \int_\gamma |d\xi| \leq \quad (18) \\ &\leq c \text{dist}^{-k+1}(z_0, E). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{\log u(\xi) - \log u(z_0)}{(\xi-z)^k} d\xi \right| &\leq c \int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{|\log u(\xi) - \log u(z_0)|}{|\xi-z|^k} |d\xi| \leq \\ &\leq c \left[\int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{|\log u(\xi) - P_{\tilde{z}}|}{|\xi-\tilde{z}|^2} |d\xi| + \int_{\partial D} \frac{|P_{\tilde{z}} - \log u(z_0)|}{|\xi-\tilde{z}|^2} |d\xi| \right] \cdot \text{dist}^{-k+2}(z_0, E), \end{aligned}$$

где

$$P_{\tilde{z}} = \frac{1}{|\gamma|} \int_\gamma \log u(\xi) |d\xi|.$$

Учитывая, как при доказательстве леммы 8, что $P_{\tilde{z}} = \log u(z_0) + O(1)$, находим, что

$$\int_{\partial D \setminus \gamma} \frac{|P_{\tilde{z}} - \log u(z_0)|}{|\xi-\tilde{z}|^2} |d\xi| \leq c \text{dist}^{-1}(z_0, E) \times \text{dist}^{-1}(z, E).$$

Поскольку $\log u \in BMO$, то получим [8, гл.6]

$$\int_{\partial D, \gamma} \frac{|\log u(\xi) - p_{\bar{z}}|}{|\xi - \bar{z}|^2} |d\xi| \leq \frac{1}{1 - |\bar{z}|^2} \int_{\partial D} \frac{1 - |\bar{\xi}|^2}{|\xi - \bar{z}|^2} |\log u(\xi) - p_{\bar{z}}| |d\xi| \leq (19)$$

$$\leq \frac{c}{1 - |\bar{z}|^2} \leq c \operatorname{dist}^{-1}(z, E).$$

Соотношения (18) и (19) доказывают лемму.

ЛЕММА 10. Пусть внешняя функция $W(z)$ определена в (5^I) , $\lambda(z) = \frac{1}{W(z)}$, точка $z \in D$, $z \neq 0$, $z_0 = \frac{z}{|z|}$, $1 - |z| \geq a \operatorname{dist}(z_0, E)$. Тогда для $k \geq 0$ справедливы оценки

$$|\lambda^{(k)}(z)| \leq c_k(a) \operatorname{dist}^{-k+1}(z, E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k = 0$ следует из леммы 5 в [4] и того, что в силу условия, (5^I) и леммы 5 имеем

$$|\lambda(\xi)| \leq c_1(a) \operatorname{dist}(\xi, E), \quad \xi \in \partial D.$$

Если $k \geq 1$, то для $\tau = \{\xi : |\xi - z| = \frac{1}{2}(1 - |z|)\}$ из формулы Коши получим

$$|\lambda^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{\lambda(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \leq c(a) \operatorname{dist}(z, E) \cdot c_k(a) \cdot \operatorname{dist}^{-k}(z, E),$$

что и требовалось.

ЛЕММА 11. В обозначениях леммы 10 при $1 - |z| \leq \frac{1}{20} \operatorname{dist}(z_0, E)$ имеем

$$|\lambda^{(k)}(z)| \leq c_k \operatorname{dist}^{-k+1}(z, E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k = 0$ получается из леммы 8 и 5:

$$\begin{aligned} |\lambda(z)| &= \exp \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \log \frac{1}{u(\xi)} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} |d\xi| = \operatorname{const} \cdot \frac{1}{u(z_0)} = \\ &= \operatorname{const} \cdot \operatorname{dist}(z, E). \end{aligned} \quad (20)$$

При изучении случая $k \geq 1$ используем формулу Фаа ди Бруно, полагая $\lambda(z) = e^{-\Phi(z)}$:

$$\lambda^{(k)}(z) = \sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \varphi^{(\alpha_1)} \dots \varphi^{(\alpha_m)} e^{-\Phi} \quad (21)$$

с некоторым постоянным $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$, причем в этой сумме имеем

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k.$$

Далее, из леммы 9 получим при наших условиях

$$|\varphi^{(\alpha)}(z)| \leq c_{\alpha} \text{dist}^{-\alpha}(z, E),$$

что вместе с (20) и (21) и доказывает лемму.

Закончим теперь доказательство теоремы 2. Используя леммы 2, 5, 7, 10 и II и формулу Лейбница, получим (напомним, что $h_k(z) = H(z)\lambda^{k+1}(z)$, функция $H(z)$ определена в (\mathcal{G}^I)):

$$\begin{aligned} |h^{(k)}(z)| &= \left| \underbrace{(H(z)\lambda(z) \dots \lambda(z))}_{k+1}^{(k)} \right| = \\ &= \left| \sum_{\mu+\nu_1+\dots+\nu_{k+1}=k} \frac{k!}{\mu! \nu_1! \dots \nu_{k+1}!} H^{(\mu)}(z) \lambda^{(\nu_1)}(z) \dots \lambda^{(\nu_{k+1})}(z) \right| \leq \\ &\leq c \sum_{\mu+\nu_1+\dots+\nu_{k+1}=k} (\text{dist}(z, E))^{-\mu - 1 + (1-\nu_1) + \dots + (1-\nu_{k+1})} = c_1, \end{aligned}$$

что и заканчивает доказательство теоремы.

Литература

1. Lehner J. Discontinuous groups and automorphic functions. - In: Math. surveys, VIII. Providence: Amer. Math. Soc., 1964.
2. Pommerenke Ch. On automorphic forms and Carleson sets. - Mich. Math. J., 1976, v. 23, N 2, p. 129-136.
3. Daase D. Automorphe Formen und Carleson-Mengen. - Compl. Var. Theory Appl., 1983, B. 2, N 1, S. 51-65.
4. Shirokov N. A. Division and multiplication by inner functions in spaces of analytic functions smooth up to the boundary. - Lecture Notes in Math., 1981, v. 864, p. 413-439.
5. Широков Н. А. Замечание о фуксовых группах. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. XV. (Зап. научн. семина. ЛОМИ, т. 149), с. 181-186.
6. Широков Н. А. Фуксовы группы с карлесоновским предельным множеством. - Функциональный анализ и его приложения, 1990, т. 24, № 4, с. 92-93.
7. Бердон А. Геометрия дискретных групп. - М., Наука, 1986.
8. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. - М., Мир, 1984.

See p. 176 for Summary