ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2020, т. 311, с. 140–163

УДК 514.763.33

Алгебры Ли–Пуассона и сингулярные симплектические формы, ассоциированные с особенностями коранга 1[*,**]

Т. Фукуда[a], **С. Янечко**[б,в]

Поступило 24.02.2020; после доработки 20.07.2020; принято к публикации 26.10.2020

Посвящается профессору Армену Сергееву
по случаю его 70-летия

Показано, что с каждой сингулярной симплектической структурой ω естественно ассоциирована алгебра Ли–Пуассона. Построены алгебры Ли–Пуассона для типов особенностей Мартине и Руссари. В специальном случае, когда сингулярная симплектическая структура задается обратным образом формы Дарбу $\omega = F^*\omega_0$, эта алгебра Ли–Пуассона является основным симплектическим инвариантом особенности гладкого отображения F в симплектическое пространство $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Рассмотрены случаи особенностей типа A_k обратных образов, и вычислены алгебры Ли–Пуассона для устойчивых особенностей 2-форм типов $\Sigma_{2,0}$, $\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0}$, $\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}$.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4147

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть ω — росток замкнутой 2-формы в точке $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Для ростка функции h в $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ и невырожденного ростка ω гамильтоново векторное поле функции h относительно ω — это векторное поле $X_{\omega,h}$ такое, что (см. [11, 21])

$$\omega(X_{\omega,h}, \xi) = -\xi(h) \tag{1.1}$$

для любого векторного поля ξ на $\mathbb{R}^{2n}$.

Если росток ω сингулярен, то гладкое векторное поле $X_{\omega,h}$, определенное формулой (1.1), может не существовать (см. [14, 19, 6]). Поэтому мы определяем пространство гамильтонианов $\mathcal{H}_\omega$:

$$\mathcal{H}_\omega = \{h \in \mathcal{E}_{2n} \mid X_{\omega,h} \text{ гладкое}\}. \tag{1.2}$$

Если $h, k \in \mathcal{H}_\omega$, мы показываем, что $\{h,k\}_\omega = \omega(X_{\omega,h}, X_{\omega,k})$ принадлежит $\mathcal{H}_\omega$. При определенном условии общего положения мы доказываем, что пространство $\mathcal{H}_\omega$, наделенное скобкой $\{\cdot,\cdot\}_\omega$, является алгеброй Ли–Пуассона.

[*] Статья представлена на английском языке. Оригинал будет опубликован в англоязычной версии журнала: *Fukuda T., Janeczko S.* Poisson–Lie algebras and singular symplectic forms associated to corank 1 type singularities // Proc. Steklov Inst. Math. 2020. V. 311.

[**] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального научного центра Польши (проект DEC-2013/11/B/ST1/03080).

[a] Department of Mathematics, College of Humanities and Sciences, Nihon University, Tokyo, Japan.

[б] Faculty of Mathematics and Information Science, Warsaw University of Technology, Warszawa, Poland.

[в] Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa, Poland.

E-mail: fukuda@math.chs.nihon-u.ac.jp (Т. Фукуда), janeczko@mini.pw.edu.pl (С. Янечко).

Пусть $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ — симплектическое пространство с ω_0 в форме Дарбу. Пусть θ есть 1-форма Лиувилля на кокасательном расслоении $T^*\mathbb{R}^{2n}$. Тогда $d\theta$ — стандартная симплектическая структура на $T^*\mathbb{R}^{2n}$. Пусть $\beta\colon T\mathbb{R}^{2n} \to T^*\mathbb{R}^{2n}$ — каноническое отображение расслоений, определенное формой ω_0, т.е. $\beta\colon T\mathbb{R}^{2n} \ni v \mapsto \omega_0(v, \cdot) \in T^*\mathbb{R}^{2n}$. Тогда мы можем определить каноническую симплектическую структуру $\dot{\omega}$ на $T\mathbb{R}^{2n}$, а именно $\dot{\omega} = \beta^* d\theta = d(\beta^*\theta)$. Всюду в статье, если не оговорено противное, все объекты — это ростки в нуле гладких функций, отображений, форм и т.п. или их представители на открытой окрестности нуля в $\mathbb{R}^{2n}$.

Пусть $\overline{F}\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to T\mathbb{R}^{2n}$ — росток гладкого отображения. Мы говорим, что $\overline{F}$ изотропен, если $\overline{F}^*\dot{\omega} = 0$. Если $\overline{F}\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to T\mathbb{R}^{2n}$ — изотропный росток отображения, то росток дифференциала 1-формы $(\beta \circ \overline{F})^*\theta$ обращается в нуль: $d(\beta \circ \overline{F})^*\theta = \overline{F}^*\beta^* d\theta = \overline{F}^*\dot{\omega} = 0$. Таким образом, $(\beta \circ \overline{F})^*\theta$ — росток замкнутой 1-формы. А тогда существует росток гладкой функции $g\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to \mathbb{R}$ такой, что

$$(\beta \circ \overline{F})^*\theta = -dg. \tag{1.3}$$

Для всякого гладкого изотропного ростка отображения $\overline{F}$ росток функции g определен однозначно с точностью до аддитивной константы.

Пусть $F\colon \mathbb{R}^{2n} \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ — гладкое отображение, $\pi\colon T\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ и $F = \pi \circ \overline{F}$. В общем случае $\overline{F}$ можно рассматривать как векторное поле вдоль F, т.е. сечение индуцированного расслоения $F^*T\mathbb{R}^{2n}$. Через $\mathcal{E}_U$ (соответственно $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2n}}$) обозначим $\mathbb{R}$-алгебру ростков гладких функций в нуле на U (и соответственно на “пространстве образов” $\mathbb{R}^{2n}$). Для каждого изотропного ростка отображения $\overline{F}$ вдоль F существует единственный росток g, лежащий в максимальном идеале $\mathbf{m}_U$ алгебры $\mathcal{E}_U$, $g \in \mathbf{m}_U$, который является порождающим ростком функции для $\overline{F}$. Если $\overline{F}$ — вложение, то его образ $M = \overline{F}(\mathbb{R}^{2n}) \subset T\mathbb{R}^{2n}$ представляет собой неявную систему дифференциальных уравнений, ветвящуюся вдоль критических значений отображения F (см. [7]). Особенности таких систем изучались многими авторами (см. [3, 4, 19]). В данной работе мы предполагаем гладкую разрешимость системы M и строим локальную классификацию и инварианты таких систем.

Отображению F поставим в соответствие симплектически инвариантную алгебру $\mathcal{R}_F$ всех ростков функций, порождающих изотропные ростки отображений $\overline{F}$ вдоль F. Пусть $F\colon \mathbb{R}^{2n} \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ — такое же отображение, как выше; тогда F индуцирует 2-форму $F^*\omega_0$ (возможно, вырожденную). Для гладкой функции h, определенной на $U \subset \mathbb{R}^{2n}$, мы формально определяем гамильтоново векторное поле X_h (которое может не быть гладким) на U равенством (1.1), заменяя в нем ω на $F^*\omega_0$. С отображением F мы связываем алгебру Ли–Пуассона (1.2):

$$\mathcal{H}_F = \{h \in \mathcal{E}_{2n} \mid X_h \text{ гладкое}\}. \tag{1.4}$$

Пространство $\mathcal{H}_F \subset \mathcal{R}_F$ становится алгеброй Ли–Пуассона, если наделить его скобкой Ли–Пуассона

$$\{k, h\}_{F^*\omega_0} := F^*\omega_0(X_k, X_h). \tag{1.5}$$

Пусть $\overline{F}\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to T\mathbb{R}^{2n}$ — изотропный росток гладкого отображения вдоль гладкого ростка отображения $F\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to \mathbb{R}^{2n}$ такой, что множество регулярных точек ростка F плотно, и пусть $h\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to \mathbb{R}$ — порождающий росток функции для $\overline{F}$. Тогда $\overline{F}$ гладко разрешим (см. [8, 9]) как неявная система дифференциальных уравнений, если и только если h принадлежит алгебре Ли–Пуассона $\mathcal{H}_F$. Таким образом, элементы алгебры $\mathcal{H}_F$ рассматриваются как гамильтонианы, которые удовлетворяют уравнению

$$(\beta \circ dF(X_h))^*\theta = -dh.$$

В данной работе мы вводим симплектическую $\mathcal{A}$-эквивалентность, чтобы классифицировать ростки гладких отображений F в симплектическое пространство. Мы используем эту эквивалентность в разд. 2, чтобы классифицировать нормальные формы таких отображений. После этого в разд. 3 мы используем классифицированные нормальные формы, чтобы исследовать структуру сингулярных обратных образов $F^*\omega_0$. В разд. 4 мы находим условия на росток гладкого отображения F, при которых $F^*\omega_0$ является устойчивой 2-формой. Вычисления проводятся для нормальных форм Мартине и Руссари, а в разд. 5 — для специального случая особенностей отображений типа A_k. Алгебра Ли–Пуассона сингулярной симплектической формы вводится в разд. 6 (см. [8–10]). Алгебры Ли–Пуассона для устойчивых особенностей 2-форм типов $\Sigma_{2,0}$, $\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0}$, $\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}$ вычислены в разд. 7.

2. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ОТОБРАЖЕНИЙ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть $F\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0)$ и $G\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0)$ — два ростка C^∞-гладких отображений, причем пространство образов $\mathbb{R}^{2n}$ снабжено стандартной симплектической структурой $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$. Будем говорить, что F и G *симплектоморфны*, если существуют росток диффеоморфизма $\phi\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0)$ пространства прообразов и симплектоморфизм $\Phi\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0)$ пространства образов такие, что

$$G = \Phi \circ F \circ \phi. \tag{2.1}$$

В данной работе мы используем новые (модифицированные) преднормальные формы особенностей типа A_k ростков отображений (см. [1, 2, 5, 12, 13]). Но сначала мы введем предварительную преднормальную форму не обязательно устойчивого ростка $F\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0)$ отображения коранга 1.

Предложение 2.1 (предварительная преднормальная форма). *Пусть $G\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to$ $\to (\mathbb{R}^{2n},0)$ — росток C^∞-гладкого отображения коранга* 1. *Тогда G симплектоморфен ростку отображения следующего вида*:

$$\begin{gathered} F = (f_1,\dots,f_{2n}),\\ f_i(u) = u_i \quad (i \le 2n-1), \qquad f_{2n}(u) \ \text{\it есть } C^\infty\text{\it -гладкая функция.} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $G\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0)$ — росток C^∞-гладкого отображения коранга 1. Тогда существуют C^∞-гладкий диффеоморфизм $h\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0)$ пространства прообразов и C^∞-гладкий диффеоморфизм $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_{2n})\colon (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0)$ пространства образов такие, что

$$\varphi_i \circ G \circ h(u_1,\dots,u_{2n}) = u_i \qquad (i < 2n),$$
$$\varphi_{2n} \circ G \circ h(u_1,\dots,u_{2n}) = g(u_1,\dots,u_{2n}),$$

где g есть C^∞-гладкая функция с $\partial g/\partial u_{2n}(0) = 0$.

Теперь мы используем эту дифференциальную нормальную форму, чтобы построить симплектоморфную замену координат пространства образов. Существует симплектический диффеоморфизм на пространстве образов

$$\psi = (\psi_1,\dots,\psi_{2n})\colon\ (\mathbb{R}^{2n},0) \to (\mathbb{R}^{2n},0) \qquad \text{такой, что} \quad \psi_{2n} = \varphi_{2n}.$$

Далее, пусть

$$v_i = \psi_i \circ G \circ h(u_1,\dots,u_{2n}) \quad (i < 2n), \qquad v_{2n} = u_{2n}.$$

Тогда $(v_1,\dots,v_{2n})$ — новые координаты на пространстве прообразов и мы имеем

$$\psi_i \circ G \circ h = v_i \quad (i < 2n), \qquad \psi_{2n} \circ G \circ h = g(v_1,\dots,v_{2n}). \qquad \square$$

Для ростков отображений типа A_k верно

Предложение 2.2. *Пусть* $G\colon (\mathbb{R}^{2n},0)\to(\mathbb{R}^{2n},0)$ *— особенность типа* A_k.

1. *Если* G *— росток отображения со складкой, т.е.* A_1, *то* G *симплектоморфен ростку отображения вида*

$$\begin{gathered} F=(f_1,\dots,f_{2n}),\\ f_i(u)=u_i\quad (i\le 2n-1),\qquad f_{2n}(u)=u_{2n}^2. \end{gathered}\tag{2.3}$$

2. *Если* G *— росток отображения типа* A_k *с* $k\ge 2$, *то* G *симплектоморфен ростку отображения вида*

$$\begin{aligned} f_i(u)&=u_i\qquad (i\le 2n-1),\\ f_{2n}(u)&=u_{2n}^{k+1}+\sum_{i=1}^{k-1}a_i(u_1,\dots,u_{2n-1})u_{2n}^i+b(u_1,\dots,u_{2n-1}), \end{aligned}\tag{2.4}$$

где $a_1(u_1,\dots,u_{2n-1}),\dots,a_{k-1}(u_1,\dots,u_{2n-1}),b(u_1,\dots,u_{2n-1})$ *— гладкие функции и дифференциалы* $da_1,da_2,\dots,da_{k-1}$ *линейно независимы в начале координат.*

3 (*сборка для* $n=1$). *Если* $G\colon(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$ *— росток отображения типа* A_k *с* $k\ge 2$, *то* $k=2$ *и он симплектоморфен нормальной форме сборки*:

$$F=(f_1,f_2),\qquad f_1(u)=u_1,\qquad f_2(u)=u_2^3+u_1u_2.\tag{2.5}$$

Доказательство. Доказательство утверждения 1 почти такое же, как доказательство предложения 2.1. Пусть G — росток отображения со складкой, т.е. росток отображения типа A_1. Тогда существуют C^∞-гладкий диффеоморфизм $h\colon(\mathbb{R}^{2n},0)\to(\mathbb{R}^{2n},0)$ пространства прообразов и C^∞-гладкий диффеоморфизм $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_{2n})\colon(\mathbb{R}^{2n},0)\to(\mathbb{R}^{2n},0)$ пространства образов такие, что

$$\varphi_i\circ G\circ h(u_1,\dots,u_{2n})=u_i\quad (i<2n),\qquad \varphi_{2n}\circ G\circ h(u_1,\dots,u_{2n})=u_{2n}^2.$$

Тогда существует симплектический диффеоморфизм на пространстве образов

$$\psi=(\psi_1,\dots,\psi_{2n})\colon(\mathbb{R}^{2n},0)\to(\mathbb{R}^{2n},0)\qquad\text{такой, что}\quad \psi_{2n}=\varphi_{2n}.$$

Пусть

$$v_i=\psi_i\circ G\circ h(u_1,\dots,u_{2n})\quad (i<2n),\qquad v_{2n}=u_{2n}.$$

Тогда $(v_1,\dots,v_{2n})$ — координаты на пространстве прообразов и мы имеем

$$\psi_i\circ G\circ h=v_i\quad (i<2n),\qquad \psi_{2n}\circ G\circ h=u_{2n}^2=v_{2n}^2.$$

Теперь предположим, что G — росток отображения типа A_k. Тогда по теореме Морена (см. [17]) существуют C^∞-гладкий диффеоморфизм $h\colon(\mathbb{R}^{2n},0)\to(\mathbb{R}^{2n},0)$ пространства прообразов и C^∞-гладкий диффеоморфизм $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_{2n})\colon(\mathbb{R}^{2n},0)\to(\mathbb{R}^{2n},0)$ пространства образов такие, что

$$\begin{gathered} \varphi_i\circ G\circ h(u_1,\dots,u_{2n})=u_i\qquad (i<2n),\\ \varphi_{2n}\circ G\circ h(u_1,\dots,u_{2n})=u_{2n}^{k+1}+\sum_{i=1}^{k-1}u_iu_{2n}^i. \end{gathered}\tag{2.6}$$

Тогда существует симплектический диффеоморфизм пространства образов

$$\psi=(\psi_1,\dots,\psi_{2n})\colon(\mathbb{R}^{2n},0)\to(\mathbb{R}^{2n},0)\qquad\text{такой, что}\quad \psi_{2n}=\varphi_{2n}.\tag{2.7}$$

Пусть

$$v_i = \psi_i \circ G \circ h(u_1, \ldots, u_{2n}) \quad (i < 2n), \qquad v_{2n} = u_{2n}. \tag{2.8}$$

Тогда $(v_1, \ldots, v_{2n})$ — новые координаты на пространстве прообразов и из (2.6) и (2.8) получаем

$$\psi_i \circ G \circ h(v_1, \ldots, v_{2n}) = v_i \qquad (i < 2n),$$

$$\psi_{2n} \circ G \circ h(v_1, \ldots, v_{2n}) = u_{2n} = v_{2n}^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} u_i v_{2n}^i.$$

Обращая координаты (2.8) в пространстве прообразов, мы получаем окончательную форму

$$\psi_i \circ G \circ h(v_1, \ldots, v_{2n}) = v_i \qquad (i < 2n),$$

$$\psi_{2n} \circ G \circ h(v_1, \ldots, v_{2n}) = u_{2n} = v_{2n}^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} u_i(v) v_{2n}^i.$$

Заметим, что коэффициенты $u_i(v)$ — функции от переменных $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-1}, v_{2n}$. Однако хотелось бы, чтобы коэффициенты $u_i(v)$ были функциями от переменных $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-1}$.

Поскольку $u_i(v)$ — функции от переменных $v_1, \ldots, v_{2n}$, их можно выразить в виде

$$u_i(v_1, \ldots, v_{2n}) = \sum_{j=1}^{2n-1} v_j \alpha_{i,j}(v_1, \ldots, v_{2n}) + \beta_i(v_{2n}).$$

Поскольку G — росток отображения типа A_k, порядок $\beta_i(v_{2n})$ должен быть больше $k - i$:

$$\operatorname{ord} \beta_i(v_{2n}) > k - i,$$

так как если $\operatorname{ord} \beta_i(v_{2n}) \le k - i$, то G должен иметь особенность типа A_ℓ для некоторого $\ell < k$.

Тогда с координатами

$$w_i = v_i \quad (i < 2n), \qquad w_{2n} = \sqrt[k+1]{u_{2n}^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i(v_{2n}) v_{2n}^i}$$

в пространстве прообразов композиция $\psi_{2n} \circ G \circ h(w_1, \ldots, w_{2n})$ становится разверткой для w_{2n}^{k+1} с параметрами $w_1, \ldots, w_{2n-1}$ в смысле теории разверток (см., например, [20]):

$$\psi_{2n} \circ G \circ h(0, \ldots, 0, w_{2n}) = w_{2n}^{k+1}.$$

Теперь опять в новых координатах вида

$$\overline{w}_i = w_i = v_i \quad (i < 2n), \qquad \overline{w}_{2n} = \overline{w}_{2n}(v_1, \ldots, v_{2n})$$

$\psi_{2n} \circ G \circ h$ приобретает вид

$$\psi_{2n} \circ G \circ h = \overline{w}_{2n}^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \overline{a}_i(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{2n-1}) \overline{w}_{2n}^i + b(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{2n-1}). \tag{2.9}$$

Заметим, что после (2.7) мы не меняли координаты в пространстве образов. Значит, ростки отображений G и $\psi \circ G \circ h$

$$\psi_i \circ G \circ h(\overline{w}) = \overline{w}_i \qquad (i < 2n),$$

$$\psi_{2n} \circ G \circ h(\overline{w}) = \overline{w}_{2n}^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \overline{a}_i(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{2n-1}) \overline{w}_{2n}^i + b(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{2n-1})$$

симплектоморфны. Это завершает доказательство утверждения 2.

Доказательство утверждения 3 получается прямым применением утверждения 2. $\square$

3. ЗАМКНУТЫЕ 2-ФОРМЫ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Теперь мы хотим исследовать индуцированные замкнутые 2-формы $F^*\omega_0$. Для того чтобы избежать ненужных громоздких вычислений, выберем следующие новые координаты на пространстве образов $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0 = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i)$:

$$z_1 = -x_1, \quad z_2 = y_1, \quad \dots, \quad z_{2n-1} = -x_n, \quad z_{2n} = y_n.$$

Тогда

$$\omega_0 = dz_1 \wedge dz_2 + \ldots + dz_{2n-1} \wedge dz_{2n}.$$

Сделав аналогичную замену, мы будем также использовать соответствующие новые координаты на пространстве прообразов:

$$v_1 = -u_1, \quad v_2 = u_{n+1}, \quad \dots, \quad v_{2n-1} = -u_n, \quad v_{2n} = u_{2n}.$$

В этом разделе мы представим наши результаты об индуцированных замкнутых 2-формах $F^*\omega_0$. Они сформулированы для ростка отображения F коранга 1 и для его симплектической преднормальной формы (2.2).

Пусть $(z_1, \dots, z_{2n})$ — стандартные координаты в пространстве образов $\mathbb{R}^{2n}$, и пусть $\omega_0 = dz_1 \wedge dz_2 + \ldots + dz_{2n-1} \wedge dz_{2n}$ — симплектическая форма на пространстве образов $\mathbb{R}^{2n}$. В предположениях предложения 2.1 верен следующий результат.

Предложение 3.1. *Пусть F приведен к преднормальной форме* (2.2). *Тогда*

$$F^*\omega_0 = \sum_{i=1}^{n-1} dv_{2i-1} \wedge dv_{2i} + \Delta(v)\, dv_{2n-1} \wedge dv_{2n} - \sum_{i \neq 2n-1, 2n} \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_i}\, dv_i \wedge dv_{2n-1}, \tag{3.1}$$

где $\Delta(v) = \partial f_{2n}/\partial v_{2n}(v)$ — якобиан отображения F.

С этого момента предположим, что

$$d\Delta(0) \neq 0. \tag{3.2}$$

Пусть

$$\Sigma_2(F^*\omega_0) = \{v \in \mathbb{R}^{2n} \mid \Delta(v) = 0\}, \tag{3.3}$$

$$A_{F^*\omega_0}(v) = \{w \in T_v\mathbb{R}^{2n} \mid i(w)F^*\omega_0(v) = 0\} \ \text{— ядро 2-формы } F^*\omega_0(v), \tag{3.4}$$

где $i(w)F^*\omega_0(v)$ обозначает свертку (внутреннее произведение) вектора w и 2-формы $F^*\omega_0(v)$.

Поскольку $d\Delta(0) \neq 0$, множество $\Sigma_2(F^*\omega_0)$ представляет собой $(2n-1)$-мерное подмногообразие $\mathbb{R}^{2n}$.

Предложение 3.2. *Пусть $d\Delta(0) \neq 0$. Если $v \in \Sigma_2(F^*\omega_0)$, то $\dim A_{F^*\omega_0}(v) = 2$ и базисом этого пространства является следующая пара векторов*:

$$e_1 = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2i}} \frac{\partial}{\partial v_{2i-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2i-1}} \frac{\partial}{\partial v_{2i}} + \frac{\partial}{\partial v_{2n-1}}, \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial v_{2n}}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $v \in \Sigma_2(F^*\omega_0)$. Поскольку $\dim A_{F^*\omega_0(v)} = 2$ и векторы e_1 и e_2 линейно независимы, достаточно показать, что $e_1, e_2 \in A_{F^*\omega_0(v)}$.

Из предложения 3.1 следует, что

$$F^*\omega_0 = \sum_{i=1}^{n-1} dv_{2i-1} \wedge dv_{2i} + \Delta\, dv_{2n-1} \wedge dv_{2n} - \sum_{i \neq 2n-1, 2n} \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_i}\, dv_i \wedge dv_{2n-1},$$

где $\Delta = \partial f_{2n}/\partial v_{2n}$ — якобиан отображения F.

Так как $v \in \Sigma_2(F^*\omega_0)$, то $\Delta(v) = 0$. Таким образом,

$$F^*\omega_0 = \sum_{i=1}^{n-1} dv_{2i-1} \wedge dv_{2i} - \sum_{i \neq 2n-1, 2n} \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_i}\, dv_i \wedge dv_{2n-1} \qquad \text{на} \quad \Sigma_2(F^*\omega_0).$$

Пусть

$$e = \sum_{i=1}^{2n} w_i \frac{\partial}{\partial v_i} \in T_v\mathbb{R}^{2n}.$$

Тогда

$$e \in A_{F^*\omega_0}(v), \qquad \text{если и только если} \qquad F^*\omega_0(v)\biggl(e, \frac{\partial}{\partial v_j}\biggr) = 0 \quad (j = 1, \dots, 2n).$$

Теперь решим следующее уравнение относительно коэффициентов $w_1, \dots, w_{2n}$:

$$F^*\omega_0\Biggl(\sum_{i=1}^{2n} w_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_j}\Biggr) = 0 \qquad (j = 1, \dots, 2n).$$

Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= F^*\omega_0\Biggl(\sum_{i=1}^{2n} w_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_{2j-1}}\Biggr) = \\ &= \Biggl(\sum_{i=1}^{n-1} dv_{2i-1} \wedge dv_{2i} - \sum_{i \neq 2n-1, 2n} \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_i}\, dv_i \wedge dv_{2n-1}\Biggr)\Biggl(\sum_{i=1}^{2n} w_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_{2j-1}}\Biggr) = \\ &= -w_{2j} + \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2j-1}} w_{2n-1} \qquad (j < n) \end{aligned}$$

и

$$0 = F^*\omega_0\Biggl(\sum_{i=1}^{2n} w_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_{2j}}\Biggr) = w_{2j-1} + \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2j}} w_{2n-1} \qquad (j < n).$$

Таким образом,

$$w_{2j-1} = -\frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2j}} w_{2n-1}, \qquad w_{2j} = \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2j-1}} w_{2n-1}. \tag{3.6}$$

Заметим, что

$$F^*\omega_0\Biggl(\sum_{i=1}^{2n} w_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_{2n}}\Biggr) = 0 \qquad \text{для произвольных } \ w_1, \dots, w_{2n-1},$$

поскольку $F^*\omega_0$ не содержит слагаемого $\partial/\partial v_{2n}$.

Также мы видим, что если

$$w_{2i-1} = -\frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2i}} w_{2n-1}, \qquad w_{2i} = \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2i-1}} w_{2n-1},$$

то мы немедленно получаем

$$F^*\omega_0\Biggl(\sum_{i=1}^{2n} w_i \frac{\partial}{\partial v_i}, \frac{\partial}{\partial v_{2n-1}}\Biggr) = 0.$$

Таким образом, между $w_1, \dots, w_{2n}$ нет других соотношений, кроме (3.6). Поэтому в качестве базиса для $A_{F^*\omega_0}(v)$ мы можем выбрать векторы

$$e_1 = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2i}} \frac{\partial}{\partial v_{2i-1}} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f_{2n}}{\partial v_{2i-1}} \frac{\partial}{\partial v_{2i}} + \frac{\partial}{\partial v_{2n-1}}, \qquad \text{полагая} \quad w_{2n-1} = 1, \quad w_{2n} = 0,$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial v_{2n}}, \qquad \text{полагая} \quad w_{2n-1} = 0, \quad w_{2n} = 1.$$

Это завершает доказательство предложения 3.2. $\square$

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЗАМКНУТЫХ 2-ФОРМ

В этом разделе мы построим классификацию особенностей отображений коранга 1, основанную на классификации “устойчивых” особенностей замкнутых дифференциальных 2-форм (см. [15, 18, 16]).

Пусть

$$\omega = \sum_{1 \le i < j \le 2n} \alpha_{i,j} \, dv_i \wedge dv_j$$

— росток замкнутой 2-формы на $\mathbb{R}^{2n}$ в нуле. В качестве формы объема на $\mathbb{R}^{2n}$ выберем форму

$$\Omega = dv_1 \wedge dv_2 \wedge \dots \wedge dv_{2n}.$$

Пусть

$$\omega^n = f\Omega.$$

Если $f(0) \neq 0$, то по теореме Дарбу ω изоморфна форме Дарбу

$$dv_1 \wedge dv_2 + dv_3 \wedge dv_4 + \dots + dv_{2n-1} \wedge dv_{2n}.$$

Теперь предположим, что $f(0) = 0$, в то время как $df(0) \neq 0$. Пусть

$$\Sigma_2(\omega) = \{v \in \mathbb{R}^{2n} \mid f(v) = 0\}.$$

Так как $df(0) \neq 0$, то $\Sigma_2(\omega)$ — подмногообразие размерности $2n-1$ в $\mathbb{R}^{2n}$ и в точке $v \in \Sigma_2(\omega)$ ядро

$$A_\omega(v) = \bigl\{w \in T_v\mathbb{R}^{2n} \mid i(w)\omega(v) = 0\bigr\}$$

формы $\omega(v)$ есть двумерное линейное подпространство в $T_v\mathbb{R}^{2n}$; здесь $i(w)\omega(v)$ обозначает свертку касательного вектора w и 2-формы ω.

Определение 4.1 (Ж. Мартине). Пусть $f(0) = 0$ и $df(0) \neq 0$. Если $A_\omega(0)$ трансверсально подпространству $T_0\Sigma_2(\omega)$, мы говорим, что ω имеет *особенность типа $\Sigma_{2,0}$ в нуле.*

Теорема 4.1 (Ж. Мартине). *Если замкнутая 2-форма ω имеет особенность типа $\Sigma_{2,0}$ в нуле, то ω изоморфна следующей замкнутой 2-форме*:

$$v_1 dv_1 \wedge dv_2 + dv_3 \wedge dv_4 + \dots + dv_{2n-1} \wedge dv_{2n}.$$

Рассмотрим множество

$$\Sigma_{2,2}(\omega) = \bigl\{v \in \Sigma_2(\omega) \mid A_\omega(v) \subset T_v\Sigma_2(\omega)\bigr\}.$$

Известно, что $\Sigma_{2,2}(\omega)$ — подмногообразие размерности $2n-3$ в $\mathbb{R}^{2n}$.

Определение 4.2 (Ж. Мартине)**.** Пусть $0 \in \Sigma_{2,2}(\omega)$. Если $A_\omega(0)$ трансверсально подпространству $T_0\Sigma_{2,2}(\omega)$ в $T_0\Sigma_2(\omega)$, мы говорим, что ω имеет *особенность типа* $\Sigma_{2,2,0}$ *в нуле.*

Поскольку особенности типа $\Sigma_{2,2,0}$ замкнутых 2-форм классифицированы только при $n = 2$, с этого момента мы будем рассматривать только замкнутые 2-формы на $\mathbb{R}^4$.

Теорема 4.2 (Р. Руссари)**.** *Если замкнутая 2-форма ω на $\mathbb{R}^4$ имеет особенность типа $\Sigma_{2,2,0}$ в нуле, то ω изоморфна одной из следующих двух замкнутых 2-форм*:

$$dv_1 \wedge dv_2 + v_3 dv_2 \wedge dv_3 + d\left(v_1 v_3 + v_2 v_4 - \frac{v_3^3}{3}\right) \wedge dv_4,$$

$$dv_1 \wedge dv_2 + v_3 dv_2 \wedge dv_3 + d\left(v_1 v_3 - v_2 v_4 - \frac{v_3^3}{3}\right) \wedge dv_4.$$

Определение 4.3. Будем говорить, что ω имеет *особенность типа* $\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0}$ (эллиптического типа $\Sigma_{2,2,0}$) в нуле, если ω изоморфна первой из этих двух форм, и *особенность типа* $\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}$ (гиперболического типа $\Sigma_{2,2,0}$) в нуле, если ω изоморфна второй из них.

Эти два случая различаются следующим образом. Пусть замкнутая 2-форма ω на $\mathbb{R}^4$ имеет особенность типа $\Sigma_{2,2,0}$ в нуле. Пусть Ω — положительная форма объема на $\mathbb{R}^4$ с координатами $v_1, \dots, v_4$, например $\Omega = dv_1 \wedge dv_2 \wedge dv_3 \wedge dv_4$. Тогда ω^2 имеет вид

$$\omega^2 = f\Omega$$

для некоторой функции f, такой что $f(0) = 0$ и $df(0) \neq 0$.

Пусть $\overline{\Omega}_{\Sigma_2(\omega)}$ — форма объема на $\Sigma_2(\omega)$ такая, что

$$\overline{\Omega}_{\Sigma_2(\omega)} \wedge df \quad \text{и} \quad \Omega \quad \text{определяют одну и ту же ориентацию на } \mathbb{R}^4.$$

Пусть $\Sigma_2(\omega)$ ориентировано так, что $\overline{\Omega}_{\Sigma_2(\omega)}$ — положительная форма объема на $\Sigma_2(\omega)$. Известно (см. [18, p. 147]), что существует гладкое векторное поле X на $\Sigma_2(\omega)$ такое, что

$$(\omega_{|\Sigma_2(\omega)}) = i(X)(\overline{\Omega}_{\Sigma_2(\omega)}),$$

где $i(X)(\overline{\Omega}_{\Sigma_2(\omega)})$ обозначает свертку векторного поля X и 3-формы $\overline{\Omega}_{\Sigma_2(\omega)}$.

Пусть w_1, w_2, w_3 — координаты в окрестности точки 0 на $\Sigma_2(\omega)$, которые задают положительную ориентацию на $\Sigma_2(\omega)$. Тогда векторное поле X имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^{3} a_i(w) \frac{\partial}{\partial w_i}.$$

По определению $\Sigma_{2,2}(\omega)$ форма ω обращается в нуль на $\Sigma_{2,2}(\omega)$. Значит, матрица Якоби поля X в нуле

$$\left(\frac{\partial a_i}{\partial w_j}(0)\right)$$

имеет ранг 2 и тогда имеет два ненулевых собственных значения $\lambda_{\omega,1}$, $\lambda_{\omega,2}$; известно, что либо оба они вещественные, либо оба чисто мнимые.

Теорема 4.3 (Р. Руссари)**.** *Пусть ω имеет особенность типа $\Sigma_{2,2,0}$ в нуле.*

1. *Если оба собственных значения $\lambda_{\omega,1}$, $\lambda_{\omega,2}$ вещественны, то ω имеет особенность типа $\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}$ в нуле.*

2. *Если оба собственных значения $\lambda_{\omega,1}$, $\lambda_{\omega,2}$ чисто мнимые, то ω имеет особенность типа $\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0}$ в нуле.*

Теорема 4.4. *Пусть F — росток отображения вида (2.2). Тогда $F^*\omega_0$ изоморфна нормальной форме Мартине особенности типа $\Sigma_{2,0}$ замкнутых 2-форм*

$$\sum_{i=1}^{n-1} dv_{2i-1}\wedge dv_{2i} + v_{2n-1}\, dv_{2n-1}\wedge dv_{2n}, \tag{4.1}$$

если и только если

$$(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) \neq (0,0). \tag{4.2}$$

Доказательство. Согласно (2.2) имеем

$$(F^*\omega_0)^n = n\Delta\, dv_1\wedge dv_2\wedge\ldots\wedge dv_{2n}.$$

Так как по предположению $da_1(0)\neq 0$, то $d\Delta(0) = da_1(0)\neq 0$. Значит, по определению $\Sigma_{2,0}$ достаточно найти условие, при котором $A_\omega(0)$ трансверсально подпространству $T_0\Sigma_2(\omega)$ в нуле.

Поскольку

$$\Sigma_2(\omega) = \{v\in\mathbb{R}^{2n} \mid \Delta(v) = 0\}$$

и $A_\omega(0)$ есть линейная оболочка векторов e_1 и e_2, мы знаем, что $A_\omega(0)$ трансверсально подпространству $T_0\Sigma_2(\omega)$ в нуле тогда и только тогда, когда $(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) \neq (0,0)$. Значит, по теореме Мартине $F^*\omega_0$ изоморфна нормальной форме Мартине особенности типа $\Sigma_{2,0}$ тогда и только тогда, когда $(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) \neq (0,0)$. $\square$

Теорема 4.5. *Предположим, что $F^*\omega_0$ не изоморфна нормальной форме Мартине особенности типа $\Sigma_{2,0}$, т.е.*

$$(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) = (0,0).$$

Тогда $F^*\omega_0$ изоморфна нормальным формам Руссари особенностей типа $\Sigma_{2,2,0}$, если и только если

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} e_1(e_1(\Delta))(0) & e_1(e_2(\Delta))(0) \\ e_2(e_1(\Delta))(0) & e_2(e_2(\Delta))(0)\end{pmatrix} = 2.$$

Доказательство. Поскольку

$$\Sigma_{2,2}(F^*\omega_0) = \bigl\{v\in\mathbb{R}^4 \mid \Delta(v) = 0,\ e_1(\Delta)(v) = 0,\ e_2(\Delta)(v) = 0\bigr\}$$

и $A_\omega(0)$ есть линейная оболочка векторов e_1 и e_2, мы знаем, что $A_\omega(0)$ трансверсально подпространству $T_0\Sigma_{2,2}(\omega)$ в $T_0\Sigma_2(\omega)$ в нуле тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} e_1(\Delta)(0) & e_1(e_1(\Delta))(0) & e_1(e_2(\Delta))(0) \\ e_2(\Delta)(0) & e_2(e_1(\Delta))(0) & e_2(e_2(\Delta))(0)\end{pmatrix} = 2.$$

Значит, по определению особенности типа $\Sigma_{2,2,0}$ форма $F^*\omega_0$ изоморфна особенности типа Руссари $\Sigma_{2,2,0}$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} e_1(\Delta)(0) & e_1(e_1(\Delta))(0) & e_1(e_2(\Delta))(0) \\ e_2(\Delta)(0) & e_2(e_1(\Delta))(0) & e_2(e_2(\Delta))(0)\end{pmatrix} = 2,$$

что выполняется, если и только если

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} e_1(e_1(\Delta))(0) & e_1(e_2(\Delta))(0) \\ e_2(e_1(\Delta))(0) & e_2(e_2(\Delta))(0)\end{pmatrix} = 2,$$

так как $(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) = (0,0)$ по предположению. $\square$

Пусть $F = (f_1, \dots, f_4)\colon (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$ — преднормальная форма ростка отображения коранга 1, введенная в предложении 2.1, такая, что

$$d\Delta(0) \neq 0, \qquad (e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) = (0,0),$$
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} e_1(\Delta)(0) & e_1(e_1(\Delta))(0) & e_1(e_2(\Delta))(0) \\ e_2(\Delta)(0) & e_2(e_1(\Delta))(0) & e_2(e_2(\Delta))(0) \end{pmatrix} = 2,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial f_4}{\partial v_4}, \qquad e_1 = -\frac{\partial f_4}{\partial v_2}\frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{\partial}{\partial v_3}, \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial v_4}.$$

Тогда по теореме 4.5 форма $F^*\omega_0$ имеет особенность типа $\Sigma_{2,2,0}$.

Поскольку $d\Delta(0) \neq 0$,

$$\Sigma_2(F^*\omega_0) = \bigl\{v = (v_1, \dots, v_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \Delta = 0\bigr\}$$

является трехмерным подмногообразием в $\mathbb{R}^4$ и

$$\frac{\partial\Delta}{\partial v_i}(0) \neq 0 \qquad \text{для некоторого} \quad i = 1, \dots, 4.$$

Так как $(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) = (0,0)$, имеем

$$\frac{\partial\Delta}{\partial v_4}(0) = 0, \qquad \biggl(-\frac{\partial f_4}{\partial v_2}\frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{\partial}{\partial v_3}\biggr)\Delta(0) = 0.$$

Если $\partial\Delta/\partial v_1(0) = 0$ и $\partial\Delta/\partial v_2(0) = 0$, то по приведенной выше формуле $\partial\Delta/\partial v_3(0) = 0$, что противоречит тому, что $d\Delta(0) \neq 0$. Таким образом, справедлива

Лемма 4.1.
$$\frac{\partial\Delta}{\partial v_1}(0) \neq 0 \qquad \textit{или} \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial v_2}(0) \neq 0.$$

Значит, после замен координат

$$\overline{z}_1 = -z_2, \quad \overline{z}_2 = z_1, \quad \overline{z}_3 = -z_3, \quad \overline{z}_4 = z_4 \qquad \text{в пространстве образов,}$$
$$\overline{v}_1 = -v_2, \quad \overline{v}_2 = v_1, \quad \overline{v}_3 = -v_3, \quad \overline{v}_4 = v_4 \qquad \text{в пространстве прообразов}$$

можно предполагать, что

$$\frac{\partial\Delta}{\partial v_1}(0) \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции существует функция $\varphi(v_2, v_3, v_4)$ такая, что

$$\Sigma_2(F^*\omega_0) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid \Delta(v) = 0\} = \bigl\{(v_1, \dots, v_4) \in \mathbb{R}^4 \mid v_1 = \varphi(v_2, v_3, v_4)\bigr\},$$

и мы можем выбрать v_2, v_3, v_4 в качестве координат на $\Sigma_2(F^*\omega_0)$. Введем обозначения

$$\alpha_2 = -\frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_4}, \qquad \alpha_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial v_4}, \qquad \alpha_4 = \frac{\partial\varphi}{\partial v_3} - \frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial\varphi}{\partial v_2} - \frac{\partial f_4}{\partial v_2}.$$

Рассматривая матрицу Якоби функций α_2, α_3, α_4, мы видим, что

$$\operatorname{rank}\biggl(\frac{\partial\alpha_i}{\partial v_j}(0)\biggr)_{2 \le i,j \le 4} = 2. \tag{4.3}$$

Теорема 4.6. *Пусть выполнены предположения теоремы* 4.5. *Тогда*

(1) $F^*\omega_0$ *изоморфна нормальной форме Руссари особенности типа* $\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}$, *если и только если оба ненулевых собственных значения матрицы*

$$\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial v_j}(0)\right)_{2\le i,j\le 4} \tag{4.4}$$

вещественные;

(2) $F^*\omega_0$ *изоморфна нормальной форме Руссари особенности типа* $\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0}$, *если и только если оба ненулевых собственных значения матрицы* (4.4) *чисто мнимые.*

Доказательство. Пусть $\iota=(\iota_1,\dots,\iota_4)\colon \Sigma_2(F^*\omega_0)\to\mathbb{R}^4$,

$$\iota(\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4)=(\varphi(\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4),\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4),$$

— отображение включения. Тогда можно легко проверить, что

$$d\overline{v}_2\wedge d\overline{v}_3\wedge d\overline{v}_4=\iota^*(dv_2\wedge dv_3\wedge dv_4).$$

Положим

$$\overline{\Omega}_{\Sigma_2(F^*\omega_0)}=-d\overline{v}_2\wedge d\overline{v}_3\wedge d\overline{v}_4=-\iota^*(dv_2\wedge dv_3\wedge dv_4).$$

Тогда формы

$$\Omega=dv_1\wedge dv_2\wedge dv_3\wedge dv_4 \qquad \text{и} \qquad \overline{\Omega}_{\Sigma_2(F^*\omega_0)}\wedge df=2\overline{\Omega}_{\Sigma_2(F^*\omega_0)}\wedge d\Delta$$

определяют одну и ту же ориентацию $\mathbb{R}^4$. Напомним, что функция f была определена равенством

$$(F^*\omega_0)^2=f\Omega,$$

и также напомним, что

$$F^*\omega_0=dv_1\wedge dv_2+\Delta\,dv_3\wedge dv_4-\sum_{i=1,2}\frac{\partial f_{2n}}{\partial v_i}\,dv_i\wedge dv_3, \qquad (F^*\omega_0)^2=2\Delta\Omega.$$

Теперь найдем такое векторное поле X на $\Sigma_2(F^*\omega_0)$, что

$$F^*\omega_{0|\Sigma_2(F^*\omega_0)}=i(X)(\overline{\Omega}_{\Sigma_2(F^*\omega_0)}). \tag{4.5}$$

Полагая

$$X=\sum_{i=2}^4\alpha_i(\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4)\frac{\partial}{\partial\overline{v}_i},$$

решим уравнение (4.5). Напомним, что $\overline{\Omega}_{\Sigma_2(F^*\omega_0)}=-d\overline{v}_2\wedge d\overline{v}_3\wedge d\overline{v}_4$. Тогда

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{v}_3}-\frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{v}_2}-\frac{\partial f_4}{\partial v_2}=F^*\omega_{0|\Sigma_2(F^*\omega_0)}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{v}_2},\frac{\partial}{\partial\overline{v}_3}\right)=i(X)(\overline{\Omega}_{\Sigma_2(F^*\omega_0)})\left(\frac{\partial}{\partial\overline{v}_2},\frac{\partial}{\partial\overline{v}_3}\right)=$$

$$=-d\overline{v}_2\wedge d\overline{v}_3\wedge d\overline{v}_4\left(\sum_{i=2}^4\alpha_i\frac{\partial}{\partial\overline{v}_i},\frac{\partial}{\partial\overline{v}_2},\frac{\partial}{\partial\overline{v}_3}\right)=-\alpha_4,$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{v}_4}=F^*\omega_{0|\Sigma_2(F^*\omega_0)}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{v}_2},\frac{\partial}{\partial\overline{v}_4}\right)=$$

$$=-d\overline{v}_2\wedge d\overline{v}_3\wedge d\overline{v}_4\left(\sum_{i=2}^4\alpha_i\frac{\partial}{\partial\overline{v}_i},\frac{\partial}{\partial\overline{v}_2},\frac{\partial}{\partial\overline{v}_4}\right)=\alpha_3,$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{v}_4} = F^*\omega_{0|\Sigma_2(F^*\omega_0)}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{v}_3}, \frac{\partial}{\partial \overline{v}_4}\right) =$$

$$= -d\overline{v}_2 \wedge d\overline{v}_3 \wedge d\overline{v}_4\left(\sum_{i=2}^{4}\alpha_i\frac{\partial}{\partial \overline{v}_i}, \frac{\partial}{\partial \overline{v}_3}, \frac{\partial}{\partial \overline{v}_4}\right) = -\alpha_2.$$

Теперь рассмотрим матрицу Якоби в нуле

$$\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \overline{v}_j}(0)\right)_{2\le i,j\le 4} \tag{4.6}$$

коэффициентов

$$\left(\alpha_2 = -\frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{v}_4},\ \alpha_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{v}_4},\ \alpha_4 = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{v}_3} - \frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{v}_2} - \frac{\partial f_4}{\partial v_2}\right)$$

векторного поля X. Согласно теореме Руссари

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \overline{v}_j}(0)\right)_{2\le i,j\le 4} = 2,$$

что влечет за собой (4.3). Таким образом,

(1) $F^*\omega_0$ изоморфна нормальной форме Руссари особенности типа $\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}$, если и только если оба ненулевых собственных значения матрицы (4.6) вещественные;

(2) $F^*\omega_0$ изоморфна нормальной форме Руссари особенности типа $\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0}$, если и только если оба ненулевых собственных значения матрицы (4.6) чисто мнимые.

Это завершает доказательство теоремы 4.6. $\square$

5. УСЛОВИЯ ДЛЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ТИПА A_k

В этом разделе мы применим результаты предыдущего раздела к различным примерам, содержащим ростки отображений с особенностями типа A_k. Пусть F — росток отображения вида (2.2) такой, что $d\Delta(0) \neq 0$. Тогда $F^*\omega_0$ изоморфна нормальной форме Мартине особенностей типа $\Sigma_{2,0}$ замкнутых 2-форм

$$\sum_{i=1}^{n-1} dv_{2i-1} \wedge dv_{2i} + v_{2n-1}\, dv_{2n-1} \wedge dv_{2n},$$

если и только если

$$(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) \neq (0,0).$$

Пусть F — росток отображения со складкой:

$$F = (f_1, \dots, f_{2n})\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0),$$

$$f_i(v) = v_i \quad (i \le 2n-1), \qquad f_{2n}(v) = v_{2n}^2.$$

Тогда

$$F^*\omega_0 = \sum_{i=1}^{n-1} dv_{2i-1} \wedge dv_{2i} + 2v_{2n}\, dv_{2n-1} \wedge dv_{2n}.$$

Эта форма, очевидно, изоморфна нормальной форме Мартине особенности типа $\Sigma_{2,0}$, данной в теореме 4.4:

$$\sum_{i=1}^{n-1} dv_{2i-1} \wedge dv_{2i} + v_{2n-1}\, dv_{2n-1} \wedge dv_{2n}.$$

Поскольку

$$\Delta = 2v_{2n}, \qquad e_1(\Delta) = 0, \qquad e_2(\Delta) = 2$$

и

$$(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) = (0,2) \neq (0,0),$$

форма $F^*\omega_0$ удовлетворяет условию, приведенному в теореме 4.4, достаточному для того, чтобы форма была изоморфной нормальной форме Мартине особенности типа $\Sigma_{2,0}$.

Предложение 5.1 (ростки отображений с особенностью типа A_k, $k \geq 2$)**.** *Пусть* $F = (f_1, \dots, f_{2n})\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ *— росток отображения с особенностью типа* A_k *вида*

$$f_i(v) = v_i \qquad (i \leq 2n-1),$$

$$f_{2n}(v) = v_{2n}^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(v_1, \dots, v_{2n-1}) v_{2n}^i + b(v_1, \dots, v_{2n-1}) \qquad (k \geq 2).$$

В частности, при $n = 1$ *пусть* $F = (f_1, f_2)\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ *— росток отображения со сборкой:*

$$f_1(v) = v_1, \qquad f_2(v) = v_2^3 + v_1 v_2. \tag{5.1}$$

Тогда

(1) $F^*\omega_0$ *изоморфна приведенной выше нормальной форме Мартине, если и только если*

$$e_1(\Delta)(0) \neq 0 \tag{5.2}$$

или, что эквивалентно, если и только если

$$\frac{\partial a_1}{\partial v_{2n-1}}(0) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{\partial a_1}{\partial v_{2i}}(0)\frac{\partial b}{\partial v_{2i-1}}(0) + \frac{\partial a_1}{\partial v_{2i-1}}(0)\frac{\partial b}{\partial v_{2i}}(0)\right) \neq 0; \tag{5.3}$$

(2) *в частности, если* $b = 0$, *то* $F^*\omega_0$ *изоморфна нормальной форме Мартине тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial a_1}{\partial v_{2n-1}}(0) \neq 0;$$

(3) *если* $n = 1$, *то для ростка отображения со сборкой* (5.1) *форма* $F^*\omega_0$ *изоморфна нормальной форме Мартине.*

Доказательство. Докажем утверждение (1). Так как $k \geq 2$, то $e_2(\Delta)(0) = 0$. Значит,

$$(e_1(\Delta)(0), e_2(\Delta)(0)) \neq (0,0), \qquad \text{если и только если} \qquad e_1(\Delta)(0) \neq 0.$$

Таким образом, $F^*\omega_0$ изоморфна приведенной выше нормальной форме Мартине, если и только если выполнено условие (5.2) или, что эквивалентно, если и только если выполнено условие (5.3).

Утверждения (2) и (3) легко следуют из утверждения (1). □

Пример 5.1. Рассмотрим следующие два ростка отображений:

$$F_1 = (f_1, \dots, f_{2n})\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0),$$

$$f_i(v) = v_i \quad (i \leq 2n-1), \qquad f_{2n}(v) = v_{2n}^3 + v_{2n-1} v_{2n},$$

и

$$F_2 = (f_1, \dots, f_{2n})\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0),$$

$$f_i(v) = v_i \quad (i \leq 2n-1), \qquad f_{2n}(v) = v_{2n}^3 + v_k v_{2n}$$

(для некоторого фиксированного k, $k < 2n-1$).

Тогда

(1) $F_1^*\omega_0$ изоморфна нормальной форме Мартине, поскольку

$$\frac{\partial a_1}{\partial v_{2n-1}}(0) = \frac{\partial v_{2n-1}}{\partial v_{2n-1}}(0) = 1 \neq 0;$$

(2) $F_2^*\omega_0$ не изоморфна нормальной форме Мартине, поскольку

$$\frac{\partial a_1}{\partial v_{2n-1}}(0) = \frac{\partial v_i}{\partial v_{2n-1}}(0) = 0.$$

Пример 5.2. Мы изменим F_2 в примере 5.1, добавив слагаемое b:

$$F_3 = (f_1, \dots, f_{2n})\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0),$$

$$f_i(v) = v_i \quad (i \leq 2n-1), \qquad f_{2n}(v) = v_{2n}^3 + v_{2k-1}v_{2n} + v_{2k} \quad (\text{или}\ \ v_{2n}^3 + v_{2k}v_{2n} + v_{2k-1})$$

(для некоторого фиксированного k, $k < n$).

Тогда $F_3^*\omega_0$ изоморфна нормальной форме Мартине, поскольку

$$e_1(\Delta)(0) = \frac{\partial a_1}{\partial v_{2n-1}}(0) + \sum_{i=1}^{n-1}\biggl(-\frac{\partial a_1}{\partial v_{2i}}(0)\frac{\partial b}{\partial v_{2i-1}}(0) + \frac{\partial a_1}{\partial v_{2i-1}}(0)\frac{\partial b}{\partial v_{2i}}(0)\biggr) =$$

$$= -\frac{\partial a_1}{\partial v_{2k}}(0)\frac{\partial b}{\partial v_{2k-1}}(0) + \frac{\partial a_1}{\partial v_{2k-1}}(0)\frac{\partial b}{\partial v_{2k}}(0) = \pm 1 \neq 0.$$

Пример 5.3. Пусть

$$F_4 = (f_1, \dots, f_{2n})\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0),$$

$$f_i(v) = v_i \quad (i \leq 2n-1), \qquad f_{2n}(v) = v_{2n-1}v_{2n}.$$

Тогда, хотя F_4 сильно вырождено как росток отображения, $F_4^*\omega_0$ устойчива как замкнутая 2-форма и изоморфна нормальной форме Мартине, поскольку $\Delta = v_{2n-1}$ и

$$e_1(\Delta)(0) = \frac{\partial v_{2n-1}}{\partial v_{2n-1}}(0) + \sum_{i=1}^{n-1}\biggl(-\frac{\partial v_{2n-1}}{\partial v_{2i}}(0)\frac{\partial b}{\partial v_{2i-1}}(0) + \frac{\partial v_{2n-1}}{\partial v_{2i-1}}(0)\frac{\partial b}{\partial v_{2i}}(0)\biggr) = 1 \neq 0.$$

Так как классификация особенностей типа $\Sigma_{2,2,0}$ замкнутых 2-форм завершена только при $n = 2$, мы рассмотрим только случай $n = 2$. В этом случае возьмем предварительную преднормальную форму вида (2.2). Предположим, что $F^*\omega_0$ не изоморфна нормальной форме Мартине особенности типа $\Sigma_{2,0}$, т.е. что

$$e_1(\Delta)(0) = \frac{\partial a_1}{\partial v_3}(0) - \frac{\partial a_1}{\partial v_2}(0)\frac{\partial b}{\partial v_1}(0) + \frac{\partial a_1}{\partial v_1}(0)\frac{\partial b}{\partial v_2}(0) = 0.$$

Тогда $F^*\omega_0$ изоморфна нормальной форме Руссари особенности типа $\Sigma_{2,2,0}$ (см. теорему 4.5), если и только если

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} e_1(\Delta)(0) & e_1(e_1(\Delta))(0) & e_1(e_2(\Delta))(0) \\ e_2(\Delta)(0) & e_2(e_1(\Delta))(0) & e_2(e_2(\Delta))(0) \end{pmatrix} = 2.$$

Теорема 5.1. *Пусть $F = (f_1, \dots, f_4)\colon (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$ — росток отображения с особенностью типа A_k с $b = 0$ вида*

$$f_i(v) = v_i \quad (i \leq 3), \qquad f_4(v) = v_4^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(v_1, v_2, v_3)v_4^i \quad (2 \leq k \leq 4)$$

такой, что $F^*\omega_0$ *не изоморфна нормальной форме Мартине особенностей типа* $\Sigma_{2,0}$. *Тогда* $F^*\omega_0$ *изоморфна нормальным формам Руссари особенности типа* $\Sigma_{2,2,0}$

$$dv_1 \wedge dv_2 + v_3 dv_2 \wedge dv_3 + d\left(v_1v_3 + v_2v_4 - \frac{v_3^3}{3}\right) \wedge dv_4 \qquad (\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0})$$

или

$$dv_1 \wedge dv_2 + v_3 dv_2 \wedge d_3 + d\left(v_1v_3 - v_2v_4 - \frac{v_3^3}{3}\right) \wedge dv_4 \qquad (\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}),$$

если и только если

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial v_3^2}(0) & 2\frac{\partial a_2}{\partial v_3}(0) \\ 2\frac{\partial a_2}{\partial v_3}(0) & 6 \end{pmatrix} = 2.$$

Доказательство. В этом случае

$$\Delta = (k+1)v_4^k + \sum_{i=1}^{k-1} i a_i(v_1, v_2, v_3) v_4^{i-1},$$

$$e_1 = -\frac{\partial f_4}{\partial v_2}\frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial f_4}{\partial v_1}\frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{\partial}{\partial v_3} = -\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial a_i}{\partial v_2}v_4^i\right)\frac{\partial}{\partial v_1} + \left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial a_i}{\partial v_1}v_4^i\right)\frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{\partial}{\partial v_3},$$

$$e_2 = \frac{\partial}{\partial v_4},$$

$$e_1(\Delta) = -\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial a_i}{\partial v_2}v_4^i\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} j\frac{\partial a_j}{\partial v_1}v_4^{j-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial a_i}{\partial v_1}v_4^i\right)\left(\sum_{j=1}^{k-1} j\frac{\partial a_j}{\partial v_2}v_4^{j-1}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} j\frac{\partial a_j}{\partial v_3}v_4^{j-1},$$

$$e_2(\Delta) = (k+1)kv_4^{k-1} + \sum_{j=2}^{k-1} j(j-1)a_j v_4^{j-2}.$$

Тогда прямыми вычислениями для $k = 2, 3, 4$ получаем

$$\begin{pmatrix} e_1(\Delta)(0) & e_1(e_1(\Delta))(0) & e_1(e_2(\Delta))(0) \\ e_2(\Delta)(0) & e_2(e_1(\Delta))(0) & e_2(e_2(\Delta))(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 a_1}{\partial v_3^2}(0) & 2\frac{\partial a_2}{\partial v_3}(0) \\ 0 & 2\frac{\partial a_2}{\partial v_3}(0) & 6 \end{pmatrix}.$$

Это завершает доказательство теоремы 5.1. $\square$

Пример 5.4. Рассмотрим следующие ростки отображений со сборкой:

$$F_{5\pm} = (f_1, \dots, f_4)\colon (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0),$$

$$f_i(v) = v_i \quad (i \le 3), \qquad f_4(v) = v_4^3 + (v_1 \pm v_3^2)v_4,$$

и

$$F_6 = (f_1, \dots, f_4)\colon (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0),$$

$$f_i(v) = v_i \quad (i \le 3), \qquad f_4(v) = v_4^3 + v_1v_4.$$

Используя теорему 4.4 или ее следствие, можно легко проверить, что формы $F_{5\pm}^*\omega_0$ и $F_6^*\omega_0$ не изоморфны нормальной форме Мартине особенности типа $\Sigma_{2,0}$. Мы видим, что $F_{5\pm}^*\omega_0$ изоморфны нормальной форме Руссари особенности типа $\Sigma_{2,2,0}$, а $F_6^*\omega_0$ не изоморфна. Чтобы доказать это, применим теорему 5.1 при $k = 2$. Сначала рассмотрим $F_{5\pm}^*\omega_0$. В этом случае

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial v_3^2}(0) & 2\frac{\partial a_2}{\partial v_3}(0) \\ 2\frac{\partial a_2}{\partial v_3}(0) & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \pm 2.$$

Поэтому по теореме 5.1 формы $F^*_{5\pm}\omega_0$ изоморфны форме Руссари типа $\Sigma_{2,2,0}$. Более того, $F^*_{5+}\omega_0$ имеет тип $\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0}$, а $F^*_{5-}\omega_0$ имеет тип $\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}$.

Теперь рассмотрим $F^*_6\omega_0$. В этом случае, поскольку $f_4 = v_4^3 + v_1 v_4$, имеем

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial v_3^2}(0) & 2\frac{\partial a_2}{\partial v_3}(0) \\ 2\frac{\partial a_2}{\partial v_3}(0) & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \neq 2.$$

Поэтому по теореме 5.1 форма $F^*_6\omega_0$ не изоморфна форме Руссари типа $\Sigma_{2,2,0}$.

6. АЛГЕБРА ЛИ–ПУАССОНА ГАМИЛЬТОНИАНОВ, АССОЦИИРОВАННАЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИМИ ФОРМАМИ

В этом разделе мы приведем основные свойства алгебр Ли–Пуассона сингулярных гамильтонианов, определяемых сингулярными замкнутыми 2-формами.

Два ростка ω и ω' замкнутых 2-форм на $\mathbb{R}^{2n}$ в точках p и q соответственно называются *изоморфными*, если существует росток диффеоморфизма $\varphi\colon (\mathbb{R}^{2n}, q) \to (\mathbb{R}^{2n}, p)$ такой, что $\omega' = \varphi^*\omega$.

Пусть ω — росток в точке $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ замкнутой 2-формы на $\mathbb{R}^{2n}$. Для ростка функции h в точке $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ гамильтоново векторное поле ростка h относительно ω — это векторное поле $X_{\omega,h}$, *формально* определенное равенством (см. [11, 21])

$$\omega(X_{\omega,h}, Y) = -Y(h) \qquad \text{для всякого векторного поля } Y \text{ на } \mathbb{R}^{2n}. \tag{6.1}$$

Мы часто будем использовать сокращенное обозначение X_h для $X_{\omega,h}$.

Причина, по которой мы говорим лишь о формальном определении в (6.1), состоит в том, что если ω — вырожденная замкнутая 2-форма, то существуют функции h, для которых гамильтоновы векторные поля $X_{\omega,h}$ не определены на множестве особых точек формы ω (см. пример в конце этого раздела).

Для ростка ω замкнутой 2-формы на $\mathbb{R}^{2n}$ в точке $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ мы полагаем

$$\mathcal{H}_\omega = \{h \in \mathcal{E}_{2n} \mid X_h \text{ гладкое}\}. \tag{6.2}$$

Теперь для двух элементов $h, k \in \mathcal{H}_\omega$ определим формально вырожденную скобку Ли–Пуассона $\{h,k\}_\omega$ относительно вырожденной 2-формы ω равенством

$$\{h,k\}_\omega = \omega(X_h, X_k) = X_k(h) = -X_h(k). \tag{6.3}$$

В случае, когда ω — вырожденная 2-форма, утверждение, что $\{h,k\}_\omega \in \mathcal{H}_\omega$, нетривиально. Однако мы можем показать, что $\{h,k\}_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ при условии, что ω является ростком общего положения в том смысле, что ω имеет представителя — замкнутую 2-форму, определенную на открытой окрестности U точки 0, которую мы обозначим тем же символом ω, такую, что множество

$$O = \{p \in U \mid \operatorname{corank}_p \omega = 0\} \tag{6.4}$$

открыто и плотно в U, где $\operatorname{corank}_p \omega$ — коранг формы ω в точке p.

Теорема 6.1. *Пусть ω — росток замкнутой 2-формы, удовлетворяющий приведенному выше условию общего положения. Тогда $\mathcal{H}_\omega$ — алгебра Ли–Пуассона с вырожденной скобкой Ли–Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_\omega$.*

Доказательство. Поскольку ограничение $\omega_{|O}$ формы ω на O — невырожденная 2-форма на O, для любой гладкой функции h на U ограничение $X_{h|O}$ поля X_h на O есть обыкновенная гамильтонова система относительно симплектической структуры $\omega_{|O}$.

Пусть $h, k \in \mathcal{H}_\omega$. Тогда h, k, X_h, X_k гладкие на U, а значит, гладкой на O будет и скобка $\{h,k\}_\omega = X_h(k)$ и

$$X_{\{h,k\}_\omega|O} = \big[X_{h|O}, X_{k|O}\big]. \tag{6.5}$$

Поскольку $h, k \in \mathcal{H}_\omega$, поля X_h и X_k гладкие на U. Поэтому правая часть (6.5) продолжается до векторного поля $[X_h, X_k]$, являющегося скобкой Ли полей X_h и X_k, которое гладко на U. Значит, $X_{\{h,k\}_\omega|O}$ также продолжается до гладкого векторного поля на U, которое обязано быть равным $X_{\{h,k\}_\omega}$, поскольку O открыто и плотно в U. Следовательно, поле $X_{\{h,k\}_\omega}$ гладкое и $\{h,k\}_\omega \in \mathcal{H}_\omega$. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Теорема 6.2. *Пусть ω и ω' — ростки замкнутых 2-форм. Если они изоморфны и $\omega' = \varphi^*\omega$, то ассоциированные с ними алгебры Ли–Пуассона также изоморфны*:

$$\varphi^*\colon \mathcal{H}_\omega \cong \mathcal{H}_{\omega'}. \tag{6.6}$$

Пусть ω и ω' — ростки замкнутых 2-форм в точке $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Пусть ω и ω' изоморфны: $\omega' = \varphi^*\omega$ для некоторого ростка диффеоморфизма $\varphi\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0)$. Чтобы доказать, что $\mathcal{H}_\omega$ и $\mathcal{H}_{\omega'}$ изоморфны, мы покажем, что изоморфизм колец

$$\varphi^*\colon \mathcal{E}_{2n} \to \mathcal{E}_{2n}, \qquad \varphi^*(h) = h \circ \varphi$$

индуцирует изоморфизм

$$\varphi^*\colon \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}_{\omega'}$$

алгебр Ли. Мы установим этот факт, доказав следующие две леммы.

Лемма 6.1. *Если $h \in \mathcal{H}_\omega$, то $\varphi^*(h) \in \mathcal{H}_{\omega'}$.*

Лемма 6.2. *Пусть $h, k \in \mathcal{H}_\omega$. Тогда $\varphi^*(\{h,k\}_\omega) = \{\varphi^*(h), \varphi^*(k)\}_{\omega'}$.*

Поскольку $\varphi\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0)$ — диффеоморфизм, из леммы 6.1 следует, что $\varphi^*(\mathcal{H}_\omega) \subset \subset \mathcal{H}_{\omega'}$ и $(\varphi^{-1})^*(\mathcal{H}_{\omega'}) \subset \mathcal{H}_\omega$, а значит, $\varphi^*\colon \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}_{\omega'}$ — биекция. Так как $\varphi^*\colon \mathcal{E}_{2n} \to \mathcal{E}_{2n}$ — изоморфизм колец, то для $h, k \in \mathcal{H}_\omega$

$$\varphi^*(h+k) = \varphi^*(h) + \varphi^*(k).$$

Тогда, применяя лемму 6.2, мы видим, что $\varphi^*\colon \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}_{\omega'}$ является изоморфизмом алгебр Ли.

Доказательство леммы 6.1. Пусть $\omega' = \varphi^*\omega$ для некоторого ростка диффеоморфизма φ, и пусть $h \in \mathcal{H}_\omega$. Покажем, что тогда $\varphi^*(h) = h \circ \varphi \in \mathcal{H}_{\omega'}$. По определению

$$\mathcal{H}_\omega = \{h \in \mathcal{E}_{2n} \mid X_{\omega,h} \text{ гладкое}\}$$

и $X_{\omega,h}$ определено соотношением

$$\omega(X_{\omega,h}, Y) = -Y(h)$$

для всякого векторного поля Y на $\mathbb{R}^{2n}$.

Мы хотим доказать, что если $X_{\omega,h}$ гладкое, то $X_{\omega',h\circ\varphi}$ также гладкое. Мы докажем это, используя локальные координаты. Пусть $(u_1, u_2, \dots, u_{2n})$ — локальные координаты в окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^{2n}$, и пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{2n})\colon (\mathbb{R}^{2n}, 0) \to (\mathbb{R}^{2n}, 0)$. Поскольку $X_{\omega,h}$ и $X_{\omega',h\circ\varphi}$ — векторные поля, они могут быть формально записаны в виде

$$X_{\omega,h} = \sum_{i=1}^{2n} a_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}, \qquad X_{\omega',h\circ\varphi} = \sum_{i=1}^{2n} b_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Так как $\omega' = \varphi^*\omega$, имеем

$$\omega'\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \sum_{k=1}^{2n}\sum_{\ell=1}^{2n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial u_\ell}\right)\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial u_j}. \tag{6.7}$$

Поэтому

$$\omega'\left(X_{\omega',h\circ\varphi}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \omega'\left(\sum_{i=1}^{2n} b_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \sum_{i=1}^{2n} b_i(u)\sum_{k=1}^{2n}\sum_{\ell=1}^{2n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial u_\ell}\right)\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial u_j}.$$

С другой стороны,

$$\omega'\left(X_{\omega',h\circ\varphi}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial u_j}(h\circ\varphi) = -\sum_{m=1}^{2n}\frac{\partial h}{\partial u_m}(\varphi(u))\frac{\partial \varphi_m}{\partial u_j} =$$
$$= \sum_{m=1}^{2n}\omega\left(X_{\omega,h}(\varphi(u)), \frac{\partial}{\partial u_m}\right)\frac{\partial \varphi_m}{\partial u_j} = \sum_{m=1}^{2n}\sum_{p=1}^{2n} a_p(\varphi(u))\,\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_p}, \frac{\partial}{\partial u_m}\right)\frac{\partial \varphi_m}{\partial u_j},$$

где первое равенство выполнено по определению векторного поля $X_{\omega',h\circ\varphi}$, а третье — по определению векторного поля $X_{\omega,h}$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{2n} b_i(u)\sum_{k=1}^{2n}\sum_{\ell=1}^{2n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}\,\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial u_\ell}\right)\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial u_j} = \omega'\left(X_{\omega',h\circ\varphi}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) =$$
$$= \sum_{m=1}^{2n}\sum_{p=1}^{2n} a_p(\varphi(u))\,\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_p}, \frac{\partial}{\partial u_m}\right)\frac{\partial \varphi_m}{\partial u_j}.$$

Выражая это равенство в матричном виде, получаем

$$(b_1(u),\dots,b_{2n}(u))\,{}^{\mathrm t}\!\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u)\right)\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_k}, \frac{\partial}{\partial u_\ell}\right)(\varphi(u))\right)\left(\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial u_j}(u)\right) =$$
$$= \bigl(a_1(\varphi(u)),\dots,a_{2n}(\varphi(u))\bigr)\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_p}, \frac{\partial}{\partial u_m}\right)(\varphi(u))\right)\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial u_j}(u)\right)$$

и, следовательно,

$$(b_1(u),\dots,b_{2n}(u))\,{}^{\mathrm t}\!\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u)\right) = \bigl(a_1(\varphi(u)),\dots,a_{2n}(\varphi(u))\bigr). \tag{6.8}$$

Так как векторное поле $X_{\omega,h} = \sum_{i=1}^{2n} a_i(u)(\partial/\partial u_i)$ гладкое, а $a_1,\dots,a_{2n}$ — гладкие функции и ${}^{\mathrm t}(\partial\varphi_k/\partial u_i)$ — обратимая матрица, гладко зависящая от u, мы видим, что $b_1,\dots,b_{2n}$ — гладкие функции. Таким образом, векторное поле $X_{\omega',h\circ\varphi} = \sum_{i=1}^{2n} b_i(u)(\partial/\partial u_i)$ гладкое и $\varphi^*(h) = h\circ\varphi \in \mathcal{H}_{\omega'}$. $\square$

Доказательство леммы 6.2. По определению

$$\{h,k\}_\omega(u) = \omega(X_{\omega,h}, X_{\omega,k})(u), \qquad \{h\circ\varphi, k\circ\varphi\}_{\omega'}(u) = \omega'(X_{\omega',h\circ\varphi}, X_{\omega',k\circ\varphi})(u).$$

Выразим $X_{\omega,h}$, $X_{\omega,k}$, $X_{\omega',h\circ\varphi}$, $X_{\omega',k\circ\varphi}$, опять используя локальные координаты $u_1,\dots,u_{2n}$:

$$X_{\omega,h} = \sum_{i=1}^{2n} a_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}, \qquad X_{\omega',h\circ\varphi} = \sum_{i=1}^{2n}\alpha_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i},$$
$$X_{\omega,k} = \sum_{i=1}^{2n} b_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}, \qquad X_{\omega',k\circ\varphi} = \sum_{i=1}^{2n}\beta_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Тогда из (6.8) имеем

$$(\alpha_1(u),\dots,\alpha_{2n}(u))\,{}^{\mathrm t}\!\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_i}(u)\right) = \bigl(a_1(\varphi(u)),\dots,a_{2n}(\varphi(u))\bigr),$$

$$(\beta_1(u),\dots,\beta_{2n}(u))\,{}^{\mathrm t}\!\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_i}(u)\right) = \bigl(b_1(\varphi(u)),\dots,b_{2n}(\varphi(u))\bigr).$$

Значит,

$$\begin{aligned}\{h\circ\varphi,k\circ\varphi\}_{\omega'}(u) = \omega'(X_{\omega',h\circ\varphi},X_{\omega',k\circ\varphi})(u) = \omega'\left(\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i},\sum_{i=1}^{2n}\beta_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\alpha_i(u)\beta_i(u)\,\omega'\left(\frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial u_j}\right) = \\ = (\alpha_1(u),\dots,\alpha_{2n}(u))\left(\omega'\left(\frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial u_j}\right)(u)\right){}^{\mathrm t}(\beta_1(u),\dots,\beta_{2n}(u)).\end{aligned}$$

Поскольку $\omega'=\varphi^*\omega$, из доказательства леммы 6.1 имеем

$$\omega'\left(\frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial u_j}\right)(u) = \sum_{k=1}^{2n}\sum_{\ell=1}^{2n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_i}(u)\,\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_k},\frac{\partial}{\partial u_\ell}\right)(u)\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial u_j}(u)$$

и, следовательно,

$$\left(\omega'\left(\frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial u_j}\right)(u)\right) = {}^{\mathrm t}\!\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_i}(u)\right)\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_k},\frac{\partial}{\partial u_\ell}\right)(u)\right)\left(\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial u_j}(u)\right).$$

Значит,

$$\begin{aligned}&\{h\circ\varphi,k\circ\varphi\}_{\omega'}(u) = \\ &= (\alpha_1(u),\dots,\alpha_{2n}(u))\,{}^{\mathrm t}\!\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial u_i}(u)\right)\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_k},\frac{\partial}{\partial u_\ell}\right)(u)\right)\left(\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial u_j}(u)\right){}^{\mathrm t}(\beta_1(u),\dots,\beta_{2n}(u)) = \\ &= \bigl(a_1(\varphi(u)),\dots,a_{2n}(\varphi(u))\bigr)\left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial u_k},\frac{\partial}{\partial u_\ell}\right)(u)\right){}^{\mathrm t}\bigl(b_1(\varphi(u)),\dots,b_{2n}(\varphi(u))\bigr) = \\ &= \omega(X_{\omega,h},X_{\omega,k})(\varphi(u)) = \{h,k\}_\omega(\varphi(u)).\end{aligned}$$

И тогда

$$\{\varphi^*h,\varphi^*k\}_{\omega'} = \varphi^*\{h,k\}_\omega.$$

Это завершает доказательство леммы 6.2. $\square$

Пример 6.1. Рассмотрим замкнутую 2-форму

$$\omega = u_1\,du_1\wedge du_2 \qquad \text{на } \mathbb{R}^2$$

и функцию $h=u_2$. Тогда X_h определено соотношением

$$\omega\left(X_h,\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = -\frac{\partial h}{\partial u_i}.$$

Поскольку X_h имеет вид $X_h=a_1(u)(\partial/\partial u_1)+a_2(u)(\partial/\partial u_2)$, это соотношение можно записать как

$$u_1\,du_1\wedge du_2\left(a_1(u)\frac{\partial}{\partial u_1}+a_2(u)\frac{\partial}{\partial u_2},\frac{\partial}{\partial u_i}\right) = -\frac{\partial h}{\partial u_i}, \qquad i=1,2.$$

Тогда

$$-u_1 a_2(u) = -\frac{\partial h}{\partial u_1} = 0, \qquad u_1 a_1(u) = -\frac{\partial h}{\partial u_2} = -1.$$

Поскольку $u_1(0) = 0$, не существует функций $a_1(u)$ таких, что $u_1 a_1 = -1$. В этом случае X_h не определено на множестве $\{u_1 = 0\}$, которое представляет собой множество особых точек формы ω.

7. АЛГЕБРЫ ЛИ–ПУАССОНА ДЛЯ УСТОЙЧИВЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ТИПОВ $\Sigma_{2,0}$, $\Sigma^{\mathrm{e}}_{2,2,0}$, $\Sigma^{\mathrm{h}}_{2,2,0}$

В этом разделе мы опишем свойства алгебры Ли–Пуассона для сингулярных симплектических структур, имеющих формы Мартине и Руссари.

Предложение 7.1. *Пусть $\omega_{2,0}$ обозначает нормальную форму Мартине*:

$$\omega_{2,0} = v_1\, dv_1 \wedge dv_2 + dv_3 \wedge dv_4 + \ldots + dv_{2n-1} \wedge dv_{2n}. \tag{7.1}$$

Тогда

$$\mathcal{H}_{\omega_{2,0}} = \langle v_1^2 \rangle_{\mathcal{E}_{v_1,\ldots,v_{2n}}} + \mathcal{E}_{v_3,\ldots,v_{2n}}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Везде далее полагаем $\partial_i = \partial/\partial v_i$. Для $1 \le i \le j \le 2n$

$$\omega_{2,0}(\partial_i, \partial_j) = \begin{cases} v_1 & \text{при } i = 1,\ j = 2, \\ 1 & \text{при } i = 2k-1,\ j = 2k,\ 2 \le k \le n, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и, значит,

$$\omega_{2,0}^{-1}(\partial_i, \partial_j) = \begin{cases} -\dfrac{1}{v_1} & \text{при } i = 1,\ j = 2, \\ -1 & \text{при } i = 2k-1,\ j = 2k,\ 2 \le k \le n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $h \in \mathcal{H}_{\omega_{2,0}}$, если функции $\sum_j \omega_{2,0}^{-1}(\partial_i, \partial_j)(\partial h/\partial v_j)$ гладкие при $1 \le i \le 2n$. Но отсюда следует, что

$$\frac{\partial h}{\partial v_1}, \frac{\partial h}{\partial v_2} \in \langle v_1 \rangle_{\mathcal{E}_v}.$$

Поэтому мы выразим h в виде

$$h(v) = v_1^2 \alpha(v) + v_1 \beta(v_2, \ldots, v_{2n}) + \gamma(v_2, \ldots, v_{2n}).$$

Тогда $\partial h/\partial v_1, \partial h/\partial v_2 \in \langle v_1 \rangle_{\mathcal{E}_v}$, если и только если

$$\beta(v_2, \ldots, v_{2n}), \frac{\partial \gamma}{\partial v_2}(v_2, \ldots, v_{2n}) \in \langle v_1 \rangle_{\mathcal{E}_v},$$

что верно тогда и только тогда, когда

$$\beta(v_2, \ldots, v_{2n}) = 0, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial v_2}(v_2, \ldots, v_{2n}) = 0,$$

а это выполнено, если и только если h имеет вид

$$h(v) = v_1^2 \alpha(v) + \gamma(v_3, \ldots, v_{2n}).$$

Поэтому $h \in \mathcal{H}_{\omega_{2,0}}$ тогда и только тогда, когда $h \in \langle v_1^2 \rangle_{\mathcal{E}_v} + \mathcal{E}_{v_3,\ldots,v_{2n}}$. $\square$

Для сравнения с общими вычислениями далее мы рассмотрим пример и эллиптическую и гиперболическую нормальные формы Руссари.

Пример 7.1 (сборки типа $\Sigma_{2,2,0}$). Рассмотрим следующие два ростка со сборкой $F_{5\pm}$:

$$F_{5\pm} = (f_1, \dots, f_4)\colon (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0),$$
$$f_i(v) = v_i \quad (i \le 3), \qquad f_4(v) = v_4^3 + (v_1 \pm v_3^2)v_4.$$

Тогда $F_{5+}^*\omega_0$ имеет тип $\Sigma_{2,2,0}^{\mathrm{e}}$, а $F_{5-}^*\omega_0$ имеет тип $\Sigma_{2,2,0}^{\mathrm{h}}$ и

$$F_{5\pm}^*\omega_0 = dv_1 \wedge dv_2 - v_4\, dv_1 \wedge dv_3 + (3v_4^2 + v_1 \pm v_3^2)\, dv_3 \wedge dv_4. \tag{7.3}$$

Пусть ω_{e} и ω_{h} обозначают соответственно эллиптическую и гиперболическую нормальные формы Руссари:

$$\omega_{\mathrm{e}} = dv_1 \wedge dv_2 + v_3\, dv_1 \wedge dv_4 + v_3\, dv_2 \wedge dv_3 + v_4\, dv_2 \wedge dv_4 + (v_1 - v_3^2)\, dv_3 \wedge dv_4, \tag{7.4}$$
$$\omega_{\mathrm{h}} = dv_1 \wedge dv_2 + v_3\, dv_1 \wedge dv_4 + v_3\, dv_2 \wedge dv_3 - v_4\, dv_2 \wedge dv_4 + (v_1 - v_3^2)\, dv_3 \wedge dv_4. \tag{7.5}$$

Всюду далее положим $\partial_i = \partial/\partial v_i$. Тогда из (7.4), (7.5) и (7.3) имеем

$$(\omega_{\mathrm{e}}(\partial_i, \partial_j))^{-1} = \frac{1}{v_1}\begin{pmatrix} 0 & -(v_1 - v_3^2) & v_4 & -v_3 \\ v_1 - v_3^2 & 0 & -v_3 & 0 \\ -v_4 & v_3 & 0 & -1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\omega_{\mathrm{h}}(\partial_i, \partial_j))^{-1} = \frac{1}{v_1}\begin{pmatrix} 0 & -(v_1 - v_3^2) & -v_4 & -v_3 \\ v_1 - v_3^2 & 0 & -v_3 & 0 \\ v_4 & v_3 & 0 & -1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bigl(F_{5\pm}^*\omega_0(\partial_i, \partial_j)\bigr)^{-1} = \frac{1}{v_1 \pm v_3^2 + 3v_4^2}\begin{pmatrix} 0 & -(v_1 \pm v_3^2 + 3v_4^2) & 0 & 0 \\ v_1 \pm v_3^2 + 3v_4^2 & 0 & 0 & -v_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & v_4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\det(\omega_{\mathrm{e}}(\partial_i, \partial_j)) = \det(\omega_{\mathrm{h}}(\partial_i, \partial_j)) = v_1^2, \qquad \det\bigl(F_{5\pm}^*\omega_0(\partial_i, \partial_j)\bigr) = \bigl(v_1 \pm v_3^2 + 3v_4^2\bigr)^2.$$

Теперь приведем неявные формулы для алгебр Ли–Пуассона $\mathcal{H}_{\omega_{\mathrm{e}}}$, $\mathcal{H}_{\omega_{\mathrm{h}}}$ и $\mathcal{H}_{F_{5\pm}^*\omega_0}$, ассоциированных соответственно с гиперболической и эллиптической нормальными формами Руссари ω_{e}, ω_{h} и с примером сборки типа $\Sigma_{2,2,0}$. Прямыми вычислениями получаем

Предложение 7.2 (первая неявная формула). 1. *Пусть $h \in \mathcal{E}_v$. Тогда $h \in \mathcal{H}_{\omega_{\mathrm{e}}}$, если и только если h удовлетворяет следующим условиям*:

$$-v_4\frac{\partial h}{\partial v_1} + v_3\frac{\partial h}{\partial v_2} - \frac{\partial h}{\partial v_4} \in \langle v_1\rangle_{\mathcal{E}_v}, \qquad v_3\frac{\partial h}{\partial v_1} + \frac{\partial h}{\partial v_3} \in \langle v_1\rangle_{\mathcal{E}_v}. \tag{7.6}$$

2. *Пусть $h \in \mathcal{E}_v$. Тогда $h \in \mathcal{H}_{\omega_{\mathrm{h}}}$, если и только если h удовлетворяет следующим условиям*:

$$v_4\frac{\partial h}{\partial v_1} + v_3\frac{\partial h}{\partial v_2} - \frac{\partial h}{\partial v_4} \in \langle v_1\rangle_{\mathcal{E}_v}, \qquad v_3\frac{\partial h}{\partial v_1} + \frac{\partial h}{\partial v_3} \in \langle v_1\rangle_{\mathcal{E}_v}. \tag{7.7}$$

3. *Пусть* $h \in \mathcal{E}_v$. *Тогда* $h \in \mathcal{H}_{F^*_{5\pm}\omega_0}$, *если и только если* h *удовлетворяет следующим условиям*:

$$\frac{\partial h}{\partial v_4} \in \langle v_1 \pm v_3^2 + 3v_4^2\rangle_{\mathcal{E}_v}, \qquad v_4\frac{\partial h}{\partial v_2} + \frac{\partial h}{\partial v_3} \in \langle v_1 \pm v_3^2 + 3v_4^2\rangle_{\mathcal{E}_v}.$$

Далее для $\mathcal{H}_{\omega_\mathrm{e}}$ и $\mathcal{H}_{\omega_\mathrm{h}}$ мы найдем несколько более явные дифференциальные алгебраические формулы. Представляя h в виде

$$h = v_1^2\alpha(v) + v_1\beta(v_2, v_3, v_4) + \gamma(v_2, v_3, v_4), \tag{7.8}$$

получаем

Предложение 7.3 (вторая неявная формула).

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\omega_\mathrm{e}} = \langle v_1^2\rangle_{\mathcal{E}_v} + \Big\{ v_1\beta + \gamma \;\Big|\; \beta, \gamma \in \mathcal{E}_{v_2,v_3,v_4} \ &\textit{удовлетворяют уравнениям} \\ -v_4\beta(v_2,v_3,v_4) + v_3\frac{\partial\gamma}{\partial v_2}(v_2,v_3,v_4) - \frac{\partial\gamma}{\partial v_4}&(v_2,v_3,v_4) = 0, \\ v_3\beta(v_2,v_3,v_4) + \frac{\partial\gamma}{\partial v_3}&(v_2,v_3,v_4) = 0\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\omega_\mathrm{h}} = \langle v_1^2\rangle_{\mathcal{E}_v} + \Big\{ v_1\beta + \gamma \;\Big|\; \beta, \gamma \in \mathcal{E}_{v_2,v_3,v_4} \ &\textit{удовлетворяют уравнениям} \\ v_4\beta(v_2,v_3,v_4) + v_3\frac{\partial\gamma}{\partial v_2}(v_2,v_3,v_4) - \frac{\partial\gamma}{\partial v_4}&(v_2,v_3,v_4) = 0, \\ v_3\beta(v_2,v_3,v_4) + \frac{\partial\gamma}{\partial v_3}&(v_2,v_3,v_4) = 0\Big\}.\end{aligned}$$

Благодарности. Авторы благодарны рецензентам за полезные предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений: Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
2. *Bruce J.W., Giblin P.J.* Curves and singularities. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
3. *Давыдов А.А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19, № 2. С. 1–10.
4. *Davydov A.A., Basto-Gonçalves J.* Controllability of generic inequalities near singular points // J. Dyn. Control Syst. 2001. V. 7, N 1. P. 77–99.
5. *Fukuda T.* Local topological properties of differentiable mappings. I // Invent. math. 1981. V. 65. P. 227–250.
6. *Fukuda T., Janeczko S.* Singularities of implicit differential systems and their integrability // Geometric singularity theory. Warsaw: Pol. Acad. Sci., Inst. Math., 2004. P. 23–47. (Banach Cent. Publ.; V. 65).
7. *Fukuda T., Janeczko S.* Global properties of integrable implicit Hamiltonian systems // Singularity theory: Proc. 2005 Marseille Singularity Sch. Conf. Singapore: World Scientific, 2007. P. 593–611.
8. *Fukuda T., Janeczko S.* On the Poisson algebra of a singular map // J. Geom. Phys. 2014. V. 86. P. 194–202.
9. *Fukuda T., Janeczko S.* Symplectic singularities and solvable Hamiltonian mappings // Demonstr. math. 2015. V. 48, N 2. P. 118–146.
10. *Golubitsky M., Tischler D.* An example of moduli for singular symplectic forms // Invent. math. 1977. V. 38. P. 219–225.
11. *Hofer H., Zehnder E.* Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics. Basel: Birkhäuser, 1994. (Birkhäuser Adv. Texts).
12. *Ishikawa G.* Symplectic and Lagrange stabilities of open Whitney umbrellas // Invent. math. 1996. V. 126, N 2. P. 215–234.

13. *Ishikawa G.* Determinacy, transversality and Lagrange stability // Geometry and topology of caustics—CAUSTICS'98: Proc. Banach Cent. Symp., Warsaw, 1998. Warsaw: Pol. Acad. Sci., Inst. Math., 1999. P. 123–135. (Banach Cent. Publ.; V. 50).
14. *Janeczko S.* On implicit Lagrangian differential systems // Ann. Pol. math. 2000. V. 74. P. 133–141.
15. *Martinet J.* Sur les singularités des formes différentielles // Ann. Inst. Fourier. 1970. V. 20, N 1. P. 95–178.
16. *Martinet J.* Miscellaneous results and problems about differential forms and differential systems // Global analysis and applications: Int. Sem. Course, Trieste, 1972. Vienna: Int. At. Energy Agency, 1974. V. 3. P. 41–46.
17. *Morin B.* Formes canoniques des singularités d'une application différentiable // C. r. Acad. sci. Paris. 1965. V. 260. P. 5662–5665, 6503–6506. Рус. пер.: *Морэн Б.* Канонические формы особенностей дифференцируемого отображения // Особенности дифференцируемых отображений / Под ред. В.И. Арнольда. М.: Мир, 1968. С. 153–163.
18. *Roussarie R.* Modèles locaux de champs et de formes. Paris: Soc. math. France, 1976. (Astérisque; V. 30).
19. *Takens F.* Implicit differential equations: Some open problems // Singularités d'applications différentiables. Berlin: Springer, 1976. P. 237–253. (Lect. Notes Math.; V. 535).
20. *Wassermann G.* Stability of unfoldings. Berlin: Springer, 1974. (Lect. Notes Math.; V. 393).
21. *Weinstein A.* Lectures on symplectic manifolds. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977. (CBMS Reg. Conf. Ser. Math.; V. 29).

Перевод с английского Р.В. Пальвелева