Н. А. Вавилов, Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1982, том 116, 20–43

Н.А.Вавилов

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ

Описанию параболических подгрупп групп Шевалле над различными классами колец за последние годы было посвящено довольно значительное количество работ [2] , [3] , [9] - [15] , [20] , [21] ,[23]-[27] , [38] - [40] , [43] , [44] . Целью настоящей заметки является систематизация полученных в этом направлении результатов. Мы формулируем также некоторые новые результаты. В частности, для классических групп над произвольным коммутативным кольцом мы устанавливаем результат об описании параболических подгрупп, который может считаться окончательным. При этом для ясности изложения мы ограничиваемся случаем групп нормальных типов, хотя аналогичные результаты получены и для групп скрещенных типов.

1°. Обозначения. Пусть Φ - приведенная система корней; P - решетка, лежащая между решеткой корней $Q(\Phi)$ и решеткой весов $P(\Phi)$; $G(\Phi,\ )$ - групповая схема Шевалле-Демазюра типа Φ,P ; $T(\Phi,\ )$ - максимальный расщепимый тор в $G(\Phi,\ )$(см. [6]). Мы опускаем в обозначении решетку весов, так как она не играет существенной роли в рассматриваемых нами вопросах (мы могли бы, например, предполагать $G(\Phi,\ )$ односвязной). Так как общий случай стандартным образом сводится к случаю простых групп, далее мы будем, как правило, предполагать, что система Φ неприводима, но нам придется рассматривать ее подсистемы, не являющиеся неприводимыми.

Пусть теперь R - коммутативное кольцо с единицей, R^* - его мультипликативная группа. Как обычно, через $x_\alpha(t)$ для $\alpha\in\Phi$ и $t\in R$ обозначается соответствующий им корневой унипотентный элемент в группе Шевалле $G(\Phi,R)$, а через $h_\alpha(\varepsilon)$, $\varepsilon\in R^*$, $\alpha\in\Phi$,- корневой полупростой элемент (см. [29]).

Фиксируем в Φ раз навсегда некоторый порядок. Пусть Π - множество простых корней относительно этого порядка, а Φ^+ и Φ^- - множества положительных и отрицательных корней соответственно. Как обычно положим

$$U(\Phi,R)=\langle x_\alpha(t),\alpha\in\Phi^+,t\in R\rangle,$$

$$V(\Phi,R)=\langle x_\alpha(t),\alpha\in\Phi^-,t\in R\rangle$$

(для подмножества X группы G через $\langle X\rangle$ обозначается порожденная им группа). Подгруппа $B(\Phi,R)=U(\Phi,R)T(\Phi,R)$ называется стандартной борелевской подгруппой группы Шевалле $G(\Phi, R)$, а подгруппы в $G(\Phi, R)$, ее содержащие, называются стандартными параболическими подгруппами.

Подгруппа в $G(\Phi, R)$, порожденная всеми корневыми унипотентными элементами, называется элементарной и обозначается $E(\Phi, R)$. Положим $G_0(\Phi,R)=E(\Phi,R)T(\Phi,R)$ (для односвязных групп $G_0(\Phi,R)=$ $=E(\Phi,R)$, так как в этом случае $T(\Phi,R)$ совпадает с $H(\Phi,R)$ - подгруппой, порожденной всеми $h_\alpha(\varepsilon)$, $\alpha\in\Phi$, $\varepsilon\in R^*$). Для полулокальных и близких к ним колец имеет место равенство $G_0(\Phi,R)$ $=G(\Phi,R)$ (см. [37]). В общем случае очень часто $E(\Phi,R)$ является нормальным делителем в $G(\Phi,R)$ (например, если Φ - классическая система корней ранга $\geqslant 2$ [30], [31], [22] или на стабильном уровне [42]). Для односвязных групп фактор-группа $G(\Phi,R)/E(\Phi,R)$ обозначается $K_1(\Phi,R)$.

2^0. Случай поля. Параболические подгруппы групп Шевалле над полем были описаны Ж.Титсом ровно 20 лет назад в его поразительной по красоте заметке [45]. Сформулируем его результаты, которые служили образцом для всех последующих обобщений.

Напомним, что подмножество S системы корней Φ называется замкнутым, если из того, что $\alpha, \beta\in S$ и $\alpha+\beta\in\Phi$ следует, что $\alpha+\beta\in S$. Замыканием произвольного подмножества X системы Φ называется наименьшее замкнутое подмножество в Φ, содержащее X. Замкнутое множество S называется стандартным параболическим, если оно содержит Φ^+. Стандартные параболические подмножества перечисляются следующим образом. Пусть Δ - произвольное подмножество множества $\Pi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ простых корней системы Φ. Ему соответствует стандартное параболическое подмножество S_Δ, являющееся замыканием множества $\Phi^+\cup\{-\alpha_i;\ \alpha_i\in\Delta\}$. При этом различным подмножествам Δ_1 и Δ_2 множества Π соответствуют различные параболические подмножества S_{Δ_1} и S_{Δ_2} и каждое стандартное параболическое подмножество имеет вид S_Δ для некоторого $\Delta\subseteq\Pi$. Таким образом, число стандартных параболических подмножеств в системе корней ранга ℓ равно 2^ℓ.

Пусть снова S - любое замкнутое множество корней системы Φ, K - поле. Обозначим через $G(S)$ подгруппу в группе Шевалле $G(\Phi,K)$, порожденную всеми корневыми унипотентными элементами вида $x_\alpha(t)$, $\alpha\in S$, $t\in K$, и группой K-точек максимального тора $T(\Phi,K)$. Так определенная подгруппа $G(S)$ совпадает с группой K-точек некоторой (определенной над $\mathbb{Z}$) групповой схемы (см. [37]).

Чтобы сформулировать основной результат мы должны еще напомнить понятие абнормальной подгруппы. Говорят, что подгруппа H абнормальна в группе G, если любой элемент x из G принадлежит подгруппе $\langle H, xHx^{-1} \rangle$, порожденной H и xHx^{-1}. Легко проверить, что это эквивалентно тому, что выполнены следующие два условия:

а) Любая надгруппа группы H в G совпадает со своим нормализатором в G.

в) Любые две различные надгруппы группы H в G не сопряжены в G.

ТЕОРЕМА ТИТСА. (см. [45], [29], [34]). Пусть Φ - приведенная система корней, K - произвольное поле. Тогда

1) Отображение $S \longrightarrow G(S)$ является биекцией множества стандартных параболических подмножеств системы S на множество стандартных параболических подгрупп группы Шевалле $G(\Phi, K)$.

2) Борелевская подгруппа $B(\Phi, K)$ абнормальна в $G(\Phi, K)$, иными словами:

а) Каждая параболическая подгруппа группы $G(\Phi, R)$ совпадает со своим нормализатором в $G(\Phi, R)$.

в) Две различные стандартные параболические подгруппы группы $G(\Phi, R)$ не сопряжены в $G(\Phi, R)$.

На самом деле Титс доказал свою теорему для любых групп с BN-парой (см. [45], [46], [8]). Понятие BN-пары в очень удобной и гибкой форме отражает свойства групп Шевалле над полем, связанные с наличием у них разложения Брюа. Именно, пусть $N(\Phi, \ )$ обозначает нормализатор $T(\Phi, \ )$ в $G(\Phi, \ )$. Тогда разложением Брюа для группы Шевалле $G(\Phi, K)$ называется представление ее в виде

$$G(\Phi, K) = B(\Phi, K)\, N(\Phi, K)\, B(\Phi, K).$$

Каждая группа Шевалле над полем допускает разложение Брюа. Верно и обратное: если группа Шевалле над некоторым коммутативным кольцом допускает разложение Брюа, то это кольцо является полем. Поэтому доказательство теоремы Титса не может быть обобщено (хотя сама теорема, как мы вскоре увидим, обобщаться может).

Еще одним обращающим на себя внимание обстоятельством является то, что даже поля из двух или трех элементов не являются исключениями из этой теоремы.

3°. <u>Условия стабильности</u>. Здесь мы напомним определения двух условий на кольцо, которые играют исключительно важную роль в теории групп Шевалле над кольцами, в частности, и в результатах, о которых пойдет речь далее.

Вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ длины d с коэффициентами из кольца называется унимодулярным, если $\alpha_1 R + \dots + \alpha_d R = R$. Вектор

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_d,\alpha_{d+1})$ длины $d+1$ называется стабильным, если найдутся такие $\gamma_1,\ldots,\gamma_d\in R$, что идеал, порожденный $\alpha_1+\alpha_{d+1}\gamma_1,\ldots,\alpha_d+\alpha_{d+1}\gamma_d$ совпадает с идеалом, порожденным $\alpha_1,\ldots,\alpha_{d+1}$. Говорят, что стабильный ранг кольца равен d и пишут $sr\,R=d$, если любой унимодулярный вектор длины $d+1$ с коэффициентами из R стабилен и существует нестабильный унимодулярный вектор длины d. Х.Басс обозначает это условие $SR_{d+1}(R)$ (см. [I]).

Несколько менее известно понятие абсолютного стабильного ранга, введенное в [36] и использованное в теории групп Шевалле в [42]. Говорят, что абсолютный стабильный ранг кольца R равен d и пишут $asr\,R=d$, если для любого вектора $(\alpha_1,\ldots$ $\ldots,\alpha_{d+1})$ длины $d+1$ с коэффициентами из R найдутся такие $\gamma_1,\ldots,\gamma_d\in R$, что для любого максимального идеала m кольца R такого, что идеал $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{d+1})$ не содержится в m идеал $(\alpha_1+\alpha_{d+1}\gamma_1,\ldots,\alpha_d+\alpha_{d+1}\gamma_d)$ также не содержится в m, и существует вектор длины d, для которого аналогичное условие не выполнено.

Ясно, что $asr\,R\geqslant sr\,R$. В работе [36] доказана следующая теорема, усиливающая для коммутативного случая известную теорему Басса: если R - такое коммутативное кольцо, что пространство $max\,R$ максимальных идеалов кольца R (в топологии Зарисского) является нетеровым топологическим пространством размерности d, то $asr\,R\leqslant d+1$

Особенно простую интерпретацию допускает условие $sr\,R=1$. По определению оно означает, что для любого главного идеала (α) кольца R и любого элемента β обратимого по модулю R в множестве $\beta+(\alpha)$ найдется обратимый элемент кольца R или, что то же самое, каноническое отображение $R^*\to(R/(\alpha))^*$ мультипликативной группы кольца R в мультипликативную группу фактор-кольца $R/(\alpha)$ сюръективно. Ясно, что это эквивалентно сюръективности канонического гомоморфизма $R^*\to(R/\mathfrak{A})^*$ для любого идеала кольца R.

Таким образом, все кольца можно разделить на два класса: кольца близкие к полям, в которых очень много единиц - их стабильный ранг равен I, и кольца, в которых единиц не так много - их стабильный ранг больше I. Для многих вопросов теории линейных групп это различие приобретает фундаментальное значение.

4^{0}. <u>Сети и связанные с ними группы</u>. Естественным обобщением понятия замкнутого множества корней, учитывающим структуру идеалов основного кольца, является понятие сети идеалов. Набор $\sigma=(\sigma_\alpha)$,

$\alpha \in \Phi$ идеалов σ_α кольца R называется **сетью** идеалов в R типа Φ, если для любых корней $\alpha, \beta \in \Phi$ таких, что $\alpha+\beta \in \Phi$, имеет место включение

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \subseteq \sigma_{\alpha+\beta} .$$

Каждому замкнутому множеству корней S соответствует сеть $\sigma = (\sigma_\alpha)$ над произвольным кольцом, определенная по правилу

$$\sigma_\alpha = \begin{cases} R, & \text{если } \alpha \in S, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Эту сеть мы будем обозначать той же буквой S.

В приведенном выше определении не обязательно требовать, чтобы σ_α были идеалами в R (см. [5], [16]) – достаточно, чтобы они были аддитивными подгруппами. Однако возникающее таким образом понятие сети аддитивных групп не является столь полезным, так как в большинстве рассмотренных до сих пор случаев, связанных с описанием промежуточных подгрупп, все возникающие аддитивные подгруппы автоматически оказывались идеалами.

Для случая $\Phi = A_\ell$ понятие сети идеалов (и, более общо; сети аддитивных подгрупп) возникало в различных частных случаях и под разными названиями множество раз, начиная с 1936 года (так как это не относится к теме настоящей работы, мы не будем приводить полную библиографию, насчитывающую много десятков работ). Систематическое исследование групп, связанных с сетью и их применение к описанию подгрупп было начато З.И.Боревичем в работах [2] - [5].

Для систем корней остальных типов понятие сети идеалов было введено К.Судзуки [43], [44], исходя из работы [27] и независимо автором [11], исходя из работ [27], [2] - [4] (основная часть работы над [11] была проделана до того, как автор узнал не только о работе [44], но и о [43]).

Сети $\sigma = (\sigma_\alpha)$, $\alpha \in \Phi$, идеалов в R типа Φ соответствует несколько подгрупп в группе Шевалле $\Gamma = G(\Phi, R)$. Прежде всего положим

$$E(\sigma) = \langle x_\alpha(t), \alpha \in \Phi, t \in \sigma_\alpha \rangle .$$

Группа $E(\sigma)$ называется элементарной сетевой подгруппой, соответствующей сети σ. В работах [43], [44], [11], [15] рассматривалась группа $\Gamma_0(\sigma) = E(\sigma) T(\Phi, R)$.

В работах [16], I–II была введена еще одна группа, связанная с сетью, являющаяся аналогом сетевой подгруппы в GL_n, введенной в [2] - [4] . Эта группа строилась следующим образом. Рассматривалось рациональное представление π группы Γ в $GL(n, R)$ некоторого специального вида (так называемое базисное представление). По сети идеалов σ в R типа Φ строилась сеть $\tilde{\sigma}$ идеалов в R порядка n, равного размерности представления π (т.е. типа A_{n-1}) и полагалось

$$\Gamma(\sigma) = \pi^{-1}(G(\tilde{\sigma}) \cap \pi(G(\Phi, R))),$$

где $G(\tilde{\sigma})$ - сетевая подгруппа в $GL(n,R)$ (см. [2] - [4]). Мы не будем здесь останавливаться на (достаточно громоздких) деталях этой конструкции, а отошлем к [16] .

Группы $\Gamma(\sigma)$ и $\Gamma_0(\sigma)$, вообще говоря, различны. В [16] , II установлен следующий результат. Правда там требовалось совпадение групп $\Gamma(\sigma)$ и $\Gamma_0(\sigma)$ для всех сетей данного типа, но из доказательства видно, что фактически использовалось их совпадение только для параболических сетей, т.е. сетей $\sigma = (\sigma_\alpha)$ таких, что $\sigma_\alpha = R$ для всех $\alpha > 0$.

ЛЕММА I. Если для любой параболической сети σ некоторого типа Φ над кольцом R имеет место равенство $\Gamma(\sigma) = \Gamma_0(\sigma)$, то $sr\,R = 1$.

Обратно, в [16] . II установлено, что если R - коммутативное полулокальное кольцо, то для любой сети σ над R имеет место равенство $\Gamma(\sigma) = \Gamma_0(\sigma)$. Это связано с наличием у группы $\Gamma(\sigma)$ в этом случае разложения Гаусса, о чем мы подробно расскажем в следующем пункте.

5^0. <u>Разложение Гаусса</u>. Напомним, что разложением Гаусса для группы $G(\Phi, R)$ называется представление ее в виде

$$G(\Phi, R) = U(\Phi, R) V(\Phi, R) T(\Phi, R) U(\Phi, R).$$

Следующее утверждение очевидно и, как казалось автору, общеизвестно. Однако в связи с тем, что работа [24] может создать неправильное впечатление по этому поводу, мы приведем ее доказательство.

ЛЕММА 2. Если группа Шевалле $G(\Phi, R)$ допускает разложение Гаусса, то $sr\,R = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если группа Шевалле $G(\Phi, R)$ некоторого типа Φ допускает разложение Гаусса, то и группа $SL(2, K)$ допускает разложение Гаусса: достаточно рассмотреть регулярное отображение

$$\varphi_\alpha : SL(2, R) \longrightarrow G(\Phi, R),$$

где α - простой корень. Если элемент $\varphi_\alpha(x)$, $x\in SL(2,R)$ допускает разложение Гаусса в $G(\Phi,R)$, то все сомножители принадлежат $\varphi_\alpha(SL(2,R))$.

Пусть теперь стабильный ранг кольца R не равен I. Это значит, что найдется такой главный идеал (β), $\beta\in R$, и элемент α обратимый по модулю (β) такой, что $\alpha+(\beta)\cap R^*=\emptyset$. Обратимость α по модулю (β) означает, что найдется такое $\delta\in R$, что $\alpha\delta\equiv 1 \pmod{\beta}$, т.е. иными словами, $\alpha\delta=1+\beta\gamma$ для некоторого γ. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица не принадлежит множеству $\mathfrak{R}=U(2,R)\cdot V(2,R)\mathcal{D}(2,R)U(2,R)$, так как у любой матрицы

$$a=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in\mathfrak{R}$$

имеем $a_{11}, a_{22}\in R^*+(a_{21})$.

Хотелось бы думать, что условие $sr\,R=1$ является также и достаточным для того, чтобы в группе Шевалле любого типа над R имело место разложение Гаусса (некоторые специалисты высказывают мнение, что скорее всего это не так). Методы работ [37], [42] позволяют получить лишь следующий результат.

ЛЕММА 3. Предположим, что имеет место один из следующих трех случаев

1) $\Phi=A_\ell, C_\ell$ и $sr\,R=1$
2) $\Phi=B_\ell, D_\ell$ и $asr\,R=1$
3) $\Phi=E_\ell, F_4, G_2$ и кольцо R полулокально.

Тогда группа Шевалле $G(\Phi,R)$ допускает разложение Гаусса.

Таким образом, леммы 2 и 3 в совокупности утверждают, что группы $SL(\ell+1,R)$ и $Sp(2\ell,R)$ тогда и только тогда допускают разложение Гаусса, когда $sr\,R=1$. Для остальных же групп имеется небольшое расхождение между необходимым и достаточным условием. Отметим, что не известно ни одного примера кольца стабильного ранга I, в группе Шевалле какого-либо типа над которым не было бы разложения Гаусса. Автор не знает также примеров колец стабильного ранга I, для которых абсолютный стабильный ранг был бы больше I (как указал автору А.А.Суслин, для случая $sr\,R\geqslant 2$ легко привести примеры, когда $asr\,R > sr\,R$).

Естественно возникает вопрос, имеет ли место для подгруппы

$\Gamma(\sigma)$ аналог разложения Гаусса, т.е. можно ли в представлении элемента $x\in\Gamma(\sigma)$ в виде $x=u_1 v d u_2$, где $u_1,u_2\in U(\Phi,R)$, $v\in V(\Phi,R)$, $d\in T(\Phi,R)$ выбрать все сомножители принадлежащими $\Gamma(\sigma)$. Для подгрупп в GL_n и SL_n над полулокальным кольцом этот вопрос рассмотрен в [2], а над кольцом стабильного ранга I в [13], § 9. Положим

$$U(\sigma)=\langle x_\alpha(t),\ \alpha\in\Phi^+,\ t\in\sigma_\alpha\rangle,$$

$$V(\sigma)=\langle x_\alpha(t),\ \alpha\in\Phi^-,\ t\in\sigma_\alpha\rangle.$$

В [16], II доказан следующий результат.

ЛЕММА 4. Пусть $\sigma=(\sigma_\alpha)$ – сеть идеалов типа Φ над коммутативным полулокальным кольцом R. Тогда для соответствующей сетевой подгруппы $\Gamma(\sigma)$ в группе Шевалле $G(\Phi,R)$ имеет место разложение

$$\Gamma(\sigma)=U(\sigma)V(\sigma)T(\Phi,R)U(\sigma).$$

В частности, $\Gamma(\sigma)=\Gamma_0(\sigma)$.

6°. Параболические подгруппы над кольцом стабильного ранга I. В подавляющем большинстве опубликованных работ, посвященных описанию параболических подгрупп, рассматривались либо полулокальные и близкие к ним кольца, либо та часть параболических подгрупп, описание которой непосредственно сводится к таким кольцам (см. [38–40], [27], [2], [3], [21], [43], [44], [9], [11], [15], [26], [23] - [25]). Работы [39], [40] сводились фактически к разбору некоторых примеров. В них описаны небольшие куски структуры параболических конгруэнцподгрупп в полной и специальной линейной и симплектической группах над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел и некоторыми другими евклидовыми кольцами. Первый общий результат был получен в работе Н.С.Романовского [27], где описаны параболические подгруппы полной линейной группы над коммутативными локальным кольцом R таким, что $2\in R^*$. В этой же работе впервые появляется в полной общности понятие параболической сети идеалов (называемой там допустимым ковром) и определяется подгруппа $\Gamma_0(\sigma)$ для такой сети. Дальнейшие работы в этой области отправлялись от статьи [27]. С одной стороны З.И.Боревич в [2], [3] описал параболические подгруппы полной и элементарной линейных групп над произвольным (не обязательно даже коммутативным) полулокальным кольцом. В работах [2], [3] намечена схема описания параболических подгрупп в группах с разложением Гаусса, которая потом получила дальнейшее развитие в работах [21], [9], [11], [13], [15], [26]. С другой стороны, также отправляясь от работы [27] , К.Судзуки описал параболические подгруппы групп Шевалле вначале над локальным кольцом [43] , а потом над полулокальными кольцами (и, более общо, кольцами фактор-кольцо которых по радикалу Джекобсона есть прямое произведение любого числа полей.), удовлетворяющими некоторому дополнительному условию типа нетеровости (замкнутость всех идеалов в топологии максимальных идеалов) [44]. При этом доказательства в [43] , [44] апеллировали к известным результатам для поля. Кроме того, следуя [27] , в работах [43] , [44] предполагалось, что $2 \in R^*$. В работе автора [11] (см. также [13]) было дано описание параболических подгрупп групп Шевалле нормальных типов над произвольным полулокальным кольцом (в [11] отмечалось, что все результаты и их доказательства без всяких изменений переносятся и на случай, когда фактор-кольцо основного кольца по радикалу Джекобсона есть произведение любого числа полей). В дальнейшем эти результаты были перенесены на группы Шевалле скрещенных типов в [15] , [26] . Некоторые дальнейшие вариации на тему метода доказательства работ [2] , [3] , [9] , [21] , [11] , [15] , [26] содержатся в [24] . Резюмируем полученные в этих работах результаты, состоящие, грубо говоря, в том, что, за вычетом небольшого числа исключений, ситуация для таких колец не отличается от ситуации для полей.

ТЕОРЕМА I. Пусть приведенная неприводимая система корней Φ и коммутативное кольцо R таковы, что группа Шевалле $G(\Phi, R)$ допускает разложение Гаусса (например, $\operatorname{sr} R = 1$ для $\Phi = A_\ell, C_\ell$; $\operatorname{asr} R = 1$ для $\Phi = B_\ell, C_\ell$ и R полулокально в остальных случаях). Предположим кроме того, что кольцо R удовлетворяет следующим условиям

1) $2 \in R^*$ если $\Phi = B_\ell, C_\ell, F_4$ или G_2 и $3 \in R^*$, если $\Phi = G_2$.

2) $R = \mathbb{Z}[R^*]$, если $\Phi \neq C_\ell, \ell > 1$ и $R = \mathbb{Z}[R^{*2}]$, если $\Phi = C_\ell$.

3) Идеал в R , порожденный элементами $\varepsilon - 1$ (соответственно $\varepsilon^2 - 1$, $\varepsilon^3 - 1$), где $\varepsilon \in R^*$, совпадает с R , если $\Phi = A_\ell, \ell \geq 4$, E_ℓ , (соответственно, $\Phi = A_3, B_\ell, C_\ell, D_\ell, F_4, G_2$; $\Phi = A_2, G_2$).

При этих предположениях отображение $\sigma \mapsto \Gamma_0(\sigma)$ является биекцией множества параболических сетей идеалов в R типа Φ на множество стандартных параболических подгрупп в $G(\Phi, R)$. Кроме того, борелевская подгруппа $B(\Phi, R)$ абнормальна в $G(\Phi, R)$.

Обратно, если отображение $\sigma \mapsto \Gamma_0(\sigma)$ является биекцией множества параболических сетей на множество стандартных параболических подгрупп, то $\operatorname{sr} R = 1$ и выполнены условия 1)-3) теоремы.

7°. <u>Схема доказательства теоремы I</u>. Воспроизведем основные этапы доказательства этой теоремы.

<u>Шаг I</u>. Вначале доказывается, что существует единственная наи-

большая сеть идеалов σ такая, что $E(\sigma)\leq H$ (при этом достаточно предполагать, что H нормализуется максимальным тором).

Шаг 2. Доказывается, что если $v\in H\cap V(\Phi,R)$, то $v\in E(\sigma)$ (по прежнему достаточно предполагать, что H нормализуется $T(\Phi,R)$).

Отметим, что оба эти этапа не зависят от того, что в группе $G(\Phi,R)$ есть разложение Гаусса.

Шаг 3. Если в $G(\Phi,R)$ есть разложение Гаусса, то представляя элемент $x\in H$ в виде $x=u_1vu_2h$, где $u_1,u_2\in U(\Phi,R), v\in V(\Phi,R)$, $h\in T(\Phi,R)$ и пользуясь тем, что $B(\Phi,R)\leq H$, заключаем, что $v\in H\cap V(\Phi,R)\leq E(\sigma)$ и, таким образом, $x\in\Gamma_0(\sigma)$. Это и значит, что $H=\Gamma_0(\sigma)$.

Доказательство теоремы в обратную сторону значительно проще, но, по-видимому, нигде не фигурировало в явном виде. Возьмем произвольную параболическую сеть σ типа Φ и рассмотрим подгруппу $\Gamma(\sigma)$. Она является параболической и, следовательно, по предположению совпадает с группой $\Gamma_0(\tau)$ для некоторой параболической сети τ. Однако сравнение содержащихся в $\Gamma(\sigma)$ и $\Gamma_0(\tau)$ корневых унипотентных элементов (теорема I работы [16]) показывает, что тогда непременно $\sigma=\tau$, т.е. иными словами, $\Gamma_0(\sigma)=\Gamma(\sigma)$ для любой параболической сети. Но это по лемме I значит, что $sr\,R=1$. Не представляет труда убедиться и в том, что выполнены условия I)–3) теоремы (для группы SL_n это сделано в [3]).

Вторая часть теоремы I показывает, что для колец, стабильный ранг которых больше I, нельзя надеяться на то, что каждая стандартная параболическая подгруппа совпадает с $\Gamma_0(\sigma)$ (или $\Gamma(\sigma)$) для некоторой параболической сети σ. Правильная формулировка должна выглядеть так: при некоторых предположениях для каждой параболической подгруппы H из некоторого класса существует единственная параболическая сеть σ такая, что $E(\sigma)\leq H\leq\Gamma(\sigma)$. В оставшейся части статьи мы обсудим те ситуации, когда получено такое описание параболических подгрупп (см. [9] - [15] , [26] , [20]). Некоторые из формулируемых результатов являются новыми. Но прежде, чем сделать это, рассмотрим вопрос, какие изменения нужно внести в формулировку теоремы I, чтобы охватить случаи, когда $2\notin R^*$ или $3\notin R^*$.

8°. Квазисети. Как уже отмечалось, легко привести примеры, показывающие, что для случая, когда $2\notin R^*$ при $\Phi=B_l, C_l, F_4, G_2$ или $3\notin R^*$ для $\Phi=G_2$ сетевое описание параболических подгрупп больше не имеет места. В случае поля при описании параболических подгрупп этого явления не возникает, но аналогичное явление имеется в описании унипотентных подгрупп, нормализуемых максимальным тором. Именно, в случае неисключительных характеристик каждая такая подгруппа определяется единственным специальным (т. е. таким, что из $\alpha\in S$ следует, что $-\alpha\notin S$) замкнутым множеством корней $S\subseteq\Phi$. Для того, чтобы охватить и случай исключительных характеристик, в [7] было введено понятие квазизамкнутого множества корней. Именно, множество $S\subseteq\Phi$ называется квазизамкнутым, если подгруппа

$$E(S)=\langle x_\alpha(t),\ \alpha\in S,\ t\in K\rangle$$

не содержит никаких элементарных корневых унипотентных элементов, кроме тех, которые содержатся там по определению. Оказывается, что для любого поля, содержащего не менее 5 элементов, соответствие $S\mapsto E(S)$ является биекцией семейства специальных квазизамкнутых множеств корней на семейство унипотентных подгрупп, нормализуемых тором (см. [41], [35], на самом деле поля $\mathbb{F}_3$ и $\mathbb{F}_4$ являются исключениями далеко не для всех типов).

По аналогии с понятием квазизамкнутого множества корней для трактовки исключительных случаев в [11] было введено понятие квазисети. Именно, набор $\sigma=(\sigma_\alpha),\ \alpha\in\Phi$, идеалов σ_α кольца R называется квазисетью идеалов в R типа Φ, если из того, что $x_\alpha(t)$ принадлежит подгруппе $E(\sigma)$ для некоторых $\alpha\in\Phi$, $t\in R$, следует, что $t\in\sigma_\alpha$. Разумеется, можно говорить также о квазисетях аддитивных подгрупп. Сопоставление результатов работы [11] с результатами работ [7], [41], [35] об унипотентных подгруппах, нормализуемых максимальным тором, дает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть R - коммутативное полулокальное кольцо, $\Phi=B_\ell,\ C_\ell,\ F_4,\ G_2$ и $2\notin R^*$ или $\Phi=G_2$ и $3\notin R^*$. Предположим, что у R нет полей вычетов $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$, если $\Phi=B_\ell$, C_ℓ, F_4, и, кроме того, поля вычетов $\mathbb{F}_4$, если $\Phi=G_2$. Тогда отображение $\sigma\mapsto\Gamma_0(\sigma)$ является биекцией множества квазисетей идеалов в R типа Φ на множество стандартных параболических подгрупп в группе Шевалле $G(\Phi,R)$.

Разумеется, аналогичный результат справедлив для любых колец, для которых группа Шевалле соответствующего типа допускает разложение Гаусса. Нужно только заменить условия на поля вычетов на следующие условия:

1) R порождается R^*, если $\Phi\neq C_\ell$, и R^{*2}, если $\Phi=C_\ell$, $\ell\geqslant 1$.

2) Идеал в R, порожденный ε^2-1, $\varepsilon\in R^*$ (а в случае $\Phi=G_2$ еще и идеал, порожденный ε^3-1, $\varepsilon\in R^*$), совпадает с R.

В работе [24] было введено понятие "элементарного ковра". Именно, набор $\sigma = (\sigma_\alpha)$ идеалов σ_α в R назван в [24] "элементарным ковром", если $c_{\alpha,\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta \subseteq \sigma_{\alpha+\beta}$ каждый раз, как α, β, $\alpha+\beta \in \Phi$ (здесь $c_{\alpha,\beta}$ - константа в коммутационной формуле Шевалле, равная $\pm$ I, ± 2 или ± 3). "Элементарные ковры", являющиеся в то же время квазисетями, называются в [24] "допустимыми" (отметим отличие этой терминологии от терминологии работ [27] , [43]).

Лемма I работы [II] утверждает, что при $2 \in R^*$ и $3 \in R^*$ квазисети являются сетями. На самом деле сопоставление ее доказательства с упомянутыми выше результатами работ [7] , [4I] , [35] об унипотентных подгруппах, нормализуемых максимальным тором, позволяет заключить, что при незначительных предположениях квазисети являются "элементарными коврами" (по определению "допустимыми").

ЛЕММА 5. Пусть R - коммутативное полулокальное кольцо и $\Phi = B_\ell, C_\ell, F_4, G_2$, причем у R нет полей вычетов $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$, а если $\Phi = G_2$, то и поля вычетов $\mathbb{F}_4$. Тогда любая квазисеть $\sigma = (\sigma_\alpha)$ идеалов в R типа Φ удовлетворяет условию $c_{\alpha,\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta \subseteq \sigma_{\alpha+\beta}$ для всех троек $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, т.е. является "элементарным ковром".

Обратно, результаты первой части работы [I6] показывают (см.замечание в § 3 второй части работы [I6]), что каждый "элементарный ковер" идеалов является квазисетью (над любым коммутативным кольцом). Таким образом, понятие "элементарного ковра" не представляет собой ничего нового по сравнению с введенным в [II] понятием квазисети.

9°. Несколько замечаний по поводу работы [24]. Пользуясь случаем, отметим, что работа [24] содержит несколько принципиальных ошибок и пробелов в доказательствах. Ошибочен, в частности, основной результат этой работы - теорема 3. Еще одной особенностью этой работы является не всегда точное цитирование источников встречающихся там утверждений. Ниже мы укажем на некоторые наиболее заметные недостатки работы [24] .

Оставим в стороне § I. Являясь весьма поверхностной вариацией на принадлежащую З.И.Боревичу [2] , [3] тему описания параболических подгрупп в группах с разложением Гаусса, он все же может считаться как новым, так и верным.

Перейдем к § 2. Рассуждения на стр.5I3 после леммы 5 заимствованы (без ссылки) из работы [2] . В частности, формула после слов "несложно показывается, что..." - это окончание доказательства теоремы I работы [2] . Лемма 6 заимствована (без ссылки) из

[5] , § 3.

Леммы 7 и 8, доказательству которых посвящен § 3, общеизвестны (см., например, [29] или [34]). Заметим, что автор не приводит аналога леммы 5 для групп скрешенного типа. И это естественно, потому что, как установлено в [15] , "элементарно ковровые подгруппы" в этом случае соответствуют инвариантным сетям типа Φ , а не сетям типа $^n\Phi$.

Лемма 9 известна специалистам, видимо, около 20 лет. Впрочем, все-таки, следует отметить, что ее доказательство, приводимое В.М.Левчуком, дословно воспроизводит (без ссылки) доказательство предложения 2 работы [11] и предложения 4 работы [15] . Замечание после леммы 9 воспроизводит (без ссылки) замечание в § 3 работы [11] . Лемма 10 общеизвестна, и притом в более сильной форме. Именно, в этом случае разложение Гаусса имеется не только для группы $GL(n,R,\mathfrak{A})$, но и для группы $B(n,R,\mathfrak{A})$, состоящей из всех матриц $a=(a_{ij})\in GL(n,R)$, для которых $a_{ij}\in\mathfrak{A}$ для всех $i>j$. Лемма 11 доказана в работе [2] (теорема 1) и доказательство ее не просто. В то же время из замечания на стр.517 можно понять, что она является тривиальным следствием того, что стабильный ранг полулокального кольца равен 1.

Пункт а) теоремы 2 является частным случаем пункта в), так как для любого кольца R выполнено условие $SR_2(R,0)$. В работе [2] речь шла об условии $1\in R^*+R^*$, а не об условии, что идеал в R , порожденный $\varepsilon-1$, $\varepsilon\in R^*$, совпадает с R , так как для полулокальных колец эти условия эквивалентны. В первых же работах на эту тему, где возникали неполулокальные кольца, условие $1\in R^*+R^*$ было заменено на более слабое (см.,например, [10]). Далее на стр.519 говорится "с использованием теоремы 1 можно заменить здесь (в основных результатах работы [9]) требование $H\supset D_n(R)$ на более слабое". Это должно вызвать впечатление, что этого нельзя сделать без помощи теоремы 1 работы [24] . На самом деле это не так, указанное банальное "обобщение" содержалось в [13] . То же замечание относится к фразе "Аналогично обобщаются основные результаты работ [10] , [14] ".

Лемма 12, которая "обобщает и усиливает" одну лемму Шевалле, так же была известна в большинстве случаев (см.,например,[43] , [11]).

Основной результат работы [24] , теорема 3, ошибочен. Именно, безнадежно неверно утверждение, что подгруппа A абнормальна в $(A\cap H^L(K))\Phi(K)$ (в обозначениях работы [24]). Иными словами, автор утверждает, в частности, что любая подгруппа, лежащая между $E(\sigma)H(\Phi,\Theta)$ и $\Gamma_0(\sigma)$ (см.10° настоящей работы), где σ – параболическая сеть над полулокальным кольцом, абнормальна в некоторой подгруппе группы Шевалле, содержащей элементарную подгруппу. Но это, очевидно, не так, поскольку абнормальной среди них является только подгруппа $\Gamma_0(\sigma)$. Все остальные попросту отличны от своего нормализатора (ибо он совпадает с $\Gamma_0(\sigma)$). Интересно, что это обстоятельство отмечено в § 9 работы [II] , результаты которой "обобщает" В.М.Левчук. Неверно, разумеется, и утверждение теоремы, относящееся к группам скрещенных типов. По поводу первого утверждения теоремы 3 работы [24] см.следующий пункт. Заметим, что случай параболических подгрупп в группе Шевалле типа $^3D_4$ (единственный, оставшийся нерассмотренным в [I5]) разобран в работе [26] , но в [24] ссылка на [26] почему-то отсутствует.

Если автор работы [24] действительно предложил "новый подход, который позволил получить единым образом все известные результаты", то почему в теореме 3 выброшен случай скручивания типа $^2A_{2n}$? Дело в том, что теорема I работы [24] – и в этом ее принципиальное отличие от теоремы Титса – аксиоматизирует не все описание параболических подгрупп, а только шаг 3 в указанной выше схеме. Реальное положение вещей можно пояснить на примере самой статьи [24] . Доказательство теоремы I занимает там половину страницы. Установлению же тех фактов, которые нужны для того, чтобы применить ее к группам Шевалле, посвящено в общей сложности восемь страниц. Так что ни о каком "едином подходе" говорить не приходится. Не приходится говорить и о получении В.М.Левчуком "всех" известных результатов. Лемма 2 настоящей работы показывает, что метод описания параболических подгрупп, исходящий из разложения Гаусса, применим только к кольцам стабильного ранга I. Поэтому из результатов работы [24] – даже если бы они были верными – в принципе не могли бы вытекать, скажем, результаты работ [I0], [I2], [I4], [20].

Лемма I3 это, по-существу лемма I работы [II] (ссылка опять отсутствует). Фраза, долженствующая служить доказательством леммы I4, не может быть признана таковым. Однако предположим на мгновение, что лемма I4 в работе [24] автором доказана. Действительно ли она с легкостью влечет все основные результаты работы [I6] , I , как это утверждается на стр.523 работы [24] ("поэтому в силу леммы I3 следствием леммы I4 оказывается основная теорема 2, а вместе с ней и теоремы I,3,4 работы [I6] ")? Мы вынуждены констатировать, что и это не так. Основной целью работы [I6] , I было построение аналога сетевой подгруппы в группах Шевалле и основной ее результат – теорема I – описывал унипотентные матрицы, содержащиеся в сетевой подгруппе $\Gamma(\sigma)$ (а не в группе $E(\sigma)$). Теоремы же 2,3 и 4 – элементарные следствия теоремы I (наоборот, теорема 2 не влечет теорему I). Из леммы же I4 работы [24] теорема I работы [I6] следовать в принципе не может, поскольку все утверждения в работе [24] элементарны (т.е. относятся к элементарной подгруппе группы Шевалле, которая в общем случае заметно меньше самой группы Шевалле).

I0°. <u>Подгруппы, содержащие часть борелевской подгруппы.</u> В [9] было замечено, что принадлежащая З.И.Боревичу схема описания параболических подгрупп, приведенная выше, без всяких изменений переносится и на случай подгрупп, содержащих не всю группу $B(\Phi,R)$, а некоторую ее часть. Именно, пусть $\Theta\leqslant R^*$ – подгруппа мультипликативной группы кольца R , $H(\Phi,\Theta)$ – подгруппа, порожденная полупростыми корневыми элементами $h_\alpha(\theta)$, $\alpha\in\Phi$, $\theta\in\Theta$. Мы интересуемся подгруппами в $G(\Phi,R)$, содержащими $H(\Phi,\Theta)U(\Phi,R)$. Приведенное выше доказательство позволяет на самом деле получить следующий результат (и именно он доказан в [II]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть R – кольцо такое, что группа Шевалле $G(\Phi,R)$ допускает разложение Гаусса, а подгруппа $\Theta\leqslant R^*$ удовлетворяет следующим условиям

I) $-1\in\Theta$ и $2\in R^*$, если $\Phi=B_l, C_l, F_4, G_2$ и $3\in R^*$, если $\Phi=G_2$.

2) $R=\mathbb{Z}[\Theta]$, если $\Phi\neq C_l$ и $R=\mathbb{Z}[\Theta^2]$, если $\Phi=C_l$, $l\geqslant 1$.

3) идеал в R , порожденный разностями $\varepsilon-1$ (соответственно, ε^2-1, ε^3-1), где $\varepsilon\in\Theta$, совпадает с R , если $\Phi=$ $=A_l$, $l\geqslant 4$, E_l (соответственно, $\Phi=A_2, B_l, C_l$, D_l, F_4, G_2; $\Phi=A_3, G_2$).

Тогда для любой подгруппы H в $G(\Phi,R)$, содержащей $H(\Phi,\Theta)U(\Phi,R)$ существует единственная параболическая сеть σ такая, что

$$E(\sigma)H(\Phi,\Theta)\leqslant H\leqslant\Gamma_0(\sigma).$$

В [I5] , [26] доказаны аналогичные результаты для групп скрещенных типов. Ясно, что здесь, как и в теореме I, можно не требовать, чтобы $2\in R^*$ или $3\in R^*$, если перейти от сетей к квазисетям. Эти результаты содержат в частности, то правильное, что есть в теореме 3 работы [24] .

11°. <u>Параболические конгруэнцподгруппы</u>. Пусть $\mathfrak{a}$ – идеал в R. Обозначим через $\Gamma_{\mathfrak{a}}=G(\Phi,R,\mathfrak{a})$ главную конгруэнцподгруппу в $G(\Phi,R)$ уровня $\mathfrak{a}$, т.е. ядро естественного гомоморфизма

$$G(\Phi,R)\longrightarrow G(\Phi,R/\mathfrak{a}).$$

Ясно, что из предложения 2 немедленно вытекает следующий результат

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть Φ – система корней, R – произвольное коммутативное кольцо, $\mathfrak{a}$ – его идеал, $\circledast\leqslant R^*$. Предположим, что Φ, $\bar{R}=R/\mathfrak{a}$, $\bar{\circledast}=\circledast \bmod \mathfrak{a}\leqslant(R/\mathfrak{a})^*$ удовлетворяют условиям предложения 2. Тогда для любой подгруппы H в $G(\Phi,R)$, содержащей группу $U(\Phi,R)H(\Phi,\circledast)\Gamma_{\mathfrak{a}}$ существует единственная параболическая сеть σ идеалов в R типа Φ такая, что

$$E(\sigma)H(\Phi,\circledast)\Gamma_{\mathfrak{a}}\leqslant H\leqslant\Gamma(\sigma).$$

В формулировке этого предложения уже весьма существенно, что $\Gamma(\sigma)$ это именно сетевая подгруппа, введенная в работе [16]. Дело в том, что здесь уже, вообще говоря, $\Gamma_0(\sigma)$ не совпадает с $\Gamma(\sigma)$ (если функтор $K_1(\Phi,R,\mathfrak{a})$ нетривиален), хотя для сети $\bar{\sigma}=(\bar{\sigma}_{ij})$ над кольцом $\bar{R}$ (где $\bar{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}/\mathfrak{a}$) и $\Gamma_0(\bar{\sigma})=\Gamma(\bar{\sigma})$.

12°. <u>Параболические подгруппы, содержащие большую группу элементарных матриц</u>. Для идеала $\mathfrak{a}$ кольца R через $E_{\mathfrak{a}}=E(\Phi,R,\mathfrak{a})$ обозначим элементарную подгруппу уровня $\mathfrak{a}$, т.е. нормальный делитель в $E(\Phi,R)$, порожденный всеми элементарными унипотентными матрицами вида $x_\alpha(t),\alpha\in\Phi$, $t\in\mathfrak{a}$. Как и группа $E(\Phi,R)$, группа $E(\Phi,R,\mathfrak{a})$ очень часто является нормальным делителем в $G(\Phi,R)$ (см. [30], [31], [22], [42]). Нас будет интересовать случай, когда $E_{\mathfrak{a}}$ – нормальный делитель в Γ и $\Gamma_{\mathfrak{a}}/E_{\mathfrak{a}}$ лежит в центре фактор-группы $\Gamma/E_{\mathfrak{a}}$, т.е., иными словами, имеет место включение

$$[G(\Phi,R),G(\Phi,R,\mathfrak{a})]\leqslant E(\Phi,R,\mathfrak{a}). \qquad (*)$$

Это так на стабильном уровне.

ЛЕММА 5. Пусть Φ, R, $\circledast$, $\mathfrak{a}$ удовлетворяют условию (*) и условиям предложения 2. Тогда для любой подгруппы H в $G(\Phi,R)$ содержащей $E_{\mathfrak{a}}$ и нормализуемой $H(\Phi,\circledast)$ из того, что $x_\alpha(t)\in H\Gamma_{\mathfrak{a}}$ для некоторых $\alpha\in\Phi$, $t\in R$, следует, что $x_\alpha(t)\in H$.

Из этой леммы и предложения 3 немедленно вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\Phi, R, \Theta, \mathfrak{a}$ удовлетворяют условиям предложения 3 и, кроме того, условию (*). Тогда для любой подгруппы H в $G(\Phi, R)$, содержащей группу $U(\Phi,R)H(\Phi,\Theta)E_{\mathfrak{a}}$ существует единственная параболическая сеть идеалов σ в R типа Φ такая, что

$$E(\sigma)H(\Phi,\Theta)\leqslant H\leqslant\Gamma(\sigma).$$

Для случая подгрупп в полной линейной группе (над не обязательно коммутативным кольцом) все эти результаты содержались в [13], § 11.

13°. <u>Параболические подгруппы над дедекиндовым кольцом арифметического типа</u>. Пусть K – глобальное поле, т.е. конечное расширение либо поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, либо поля $\mathbb{F}_q(t)$ рациональных функций от одной переменной над конечным полем констант, S – конечное множество неэквивалентных нормирований (точек) поля K, включающее все архимедовы точки в числовом случае и непустое в функциональном случае. Для неархимедова нормирования $\mathfrak{p}$ обозначим через $\nu_{\mathfrak{p}}$ соответствующий ему показатель. Множество $R = R_S$ элементов $x \in K$, для которых $\nu_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant 0$ для всех $\mathfrak{p} \notin S$ является кольцом, которое называется дедекиндовым кольцом арифметического типа, определенным при помощи множества S нормирований глобального поля K. Известно, что для любого дедекиндова кольца R фактор-кольцо R по любому ненулевому идеалу полулокально. Из работы [37] известно, что для любой системы корней Φ ранга $\geqslant 2$ и любого ненулевого идеала $\mathfrak{a}$ дедекиндова кольца R выполнено условие (*). Известно, также, что для дедекиндова кольца арифметического типа при $rK\Phi \geqslant 2$ подгруппы конечного индекса в $G(\Phi, R)$ это в точности подгруппы, содержащие подгруппу $E_{\mathfrak{a}}$ для какого-либо ненулевого идеала $\mathfrak{a}$ в R. Таким образом, предложение 4 превращается в этом случае в следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть R – дедекиндово кольцо арифметического типа, $R, \Phi\ (rK\Phi \geqslant 2)$ и $\Theta \leqslant R^*$ удовлетворяют условиям предложения 2. Тогда для любой содержащей $U(\Phi,R)H(\Phi,\Theta)$ подгруппы H в $G(\Phi, R)$, имеющей там конечный индекс, существует единственная параболическая сеть σ идеалов в R типа Φ такая, что

$$E(\sigma)H(\Phi,\Theta)\leqslant H\leqslant\Gamma(\sigma).$$

Аналогичный результат справедлив и для группы SL_2, если предполагать, что $\mathrm{Card}\, S > 2$. Для групп SL_n в [10] получено обобщение предложения 5 на все параболические подгруппы (не обязательно конечного индекса). Точнее, там доказан следующий результат: пусть $\mathrm{Card}\, S \geq 2, R, \Phi = A_\ell, \circledast \leq R^*$ удовлетворяют условиям предложения 2. Тогда если H – подгруппа в $SL(\ell+1, R) = G(A_\ell, R)$, содержащая $U(A_\ell, R) H(A_\ell, \circledast)$, то существует единственная параболическая сеть σ идеалов в R типа Φ такая, что $E(\sigma) \leq H \leq \Gamma(\sigma)$. Идея редукции общего случая к подгруппам конечного индекса заимствована из статьи [28]. Автор не умеет проводить аналогичную редукцию для групп других типов. Кроме того в работе [11] для случая $\Phi = A_\ell$, $\mathrm{Card}\, S \geq 2$ доказывалось, что $E(\sigma)$ – нормальный делитель в $\Gamma(\sigma)$ и, используя результаты работы [17], вычислялась фактор-группа $\Gamma(\sigma)/E(\sigma)$.

14°. <u>Параболические подгруппы классических групп</u>. В этом пункте предполагается, что $\Phi = A_\ell, B_\ell, C_\ell$ или D_ℓ. Пусть, далее, Δ – подмножество множества Π всех простых корней системы Φ, которое получается следующим образом. Мы вычеркиваем из Π некоторые простые корни соблюдая при этом два правила: 1) не вычеркиваются крайние корни (выбрасывание которых из диаграммы Дынкина оставляет ее связной), 2) не вычеркиваются два корня подряд (т.е. два корня, связанных в диаграмме Дынкина). Не вдаваясь в объяснения по этому поводу, мы будем в этом случае писать, что $h(\Delta) \geq 1$ (можно было бы определить, что означает выражение $h(\Delta) \geq m$, но нам это не понадобится). Через S_Δ мы как и в 2° обозначаем соответствующее Δ стандартное параболическое множество корней.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – произвольное коммутативное кольцо, $\Phi = A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$, причем $2 \in R^*$, если $\Phi = B_\ell$ или C_ℓ, подмножество Δ простых корней таково, что $h(\Delta) \geq 1$. Тогда для любой подгруппы H в группе Шевалле $G(\Phi, R)$, содержащей группу $E(S_\Delta)$, существует единственная параболическая сеть σ идеалов в R типа Φ такая, что

$$E(\sigma) \leq H \leq \Gamma(\sigma).$$

Для случая полной линейной группы подгруппа $E(S_\Delta)$, соответствующая параболическому подмножеству S_Δ – это группа элементарных клеточно треугольных матриц фиксированного типа. Подгруппы полной линейной группы, содержащие группу всех клеточно треугольных матриц, описывались в [12] – [14] в предположении, что порядки всех диагональных клеток (кроме, быть может, одной) больше стабильного ранга основного кольца (которое не предполагалось коммутативным). Для произвольных коммутативных колец в предположении, что порядки диагональных клеток не меньше трех (т.е. $h(\Delta)\geqslant 2$) теорема 2 доказана в [12], II. В [20] И.З.Голубчик перенес этот результат на PI-кольца, понизив при этом требование на Δ до $h(\Delta)\geqslant 1$. Доказательство теоремы 2 для групп типов C_ℓ и D_ℓ использует некоторые приемы, развитые И.З.Голубчиком для описания нормальных делителей классических групп [18], [19]. Мы не приводим здесь доказательства этой теоремы, так как она является весьма частным случаем результатов автора о подгруппах классических групп Шевалле, содержащих регулярную подгруппу, доказательство которых будет опубликовано в другом месте. Теорема 2 является неулучшаемым результатом и по-видимому, это максимум из того, на что можно надеяться для общих колец.

15^0. <u>Особые группы</u>. Было бы интересно распространить теорему 2 также на особые группы. К сожалению, это связано с преодолением некоторых принципиальных трудностей. Этот вопрос решается одновременно со следующими вопросами:

1) Описание нормальных делителей группы $G(\Phi,R)$;
2) Описание автоморфизмов группы $G(\Phi,R)$;
3) Доказательство коммутационных формул

$$[G(\Phi,R),\ E(\Phi,R,\mathfrak{a})]\leqslant E(\Phi,R,\mathfrak{a}),$$

$$[G(\Phi,R,\mathfrak{a}),\ E(\Phi,\mathfrak{p})]\leqslant E(\Phi,R,\mathfrak{a});$$

4) Доказательство центральности расширения $St(\Phi,R)\to E(\Phi,R)$.

Все эти вопросы решены для классических групп над произвольными коммутативными кольцами и для групп всех типов над кольцами, близкими к полям (например, полулокальными). Решение этих вопросов для групп всех типов над произвольными коммутативными кольцами явилось бы решающим продвижением в теории групп Шевалле.

Сложность здесь состоит в следующем. Для элементов групп Шевалле над полулокальными кольцами имеются канонические разложения в произведения элементов специального вида (разложение Брюа над радикалом и разложение Гаусса под радикалом). Для элементов групп Шевалле над кольцами общего вида никаких подобных разложений не существует. В связи с этим единственной возможностью является изучение этих групп в конкретных матричных представлениях. Здесь выясняется принципиальное различие между двумя типами вычислений: вычислениями, которые используют отдельную строку или столбец матрицы и вычислениями, которые используют всю матрицу в целом. К первому типу относятся, например, все вычисления на стабильном уровне. Они весьма хорошо проводятся для групп всех типов при помощи теории базисных представлений (см. [37], [42]). К сожалению, вычисления, необходимые для решения вопросов I)–4) и для описания подгрупп, относятся ко второму типу. И здесь выясняется следующее различие между классическими и особыми группами. В обычных представлениях классических групп длинные корневые элементы представляются матрицами, отличными от единичной в одном или двух местах. Если же мы возьмем представления наименьшей размерности групп типов E_6 и F_4 (т.е. размерностей 27 и 26 соответственно), то там длинные корневые элементы представляются матрицами, отличающимися от единичной уже в шести местах. Для типов E_7 и E_8 ситуация еще хуже. Попытка непосредственно перенести на особые группы методы, использовавшиеся для классических групп, сразу же приводит, таким образом, к необозримым вычислениям, которые никому пока не удалось провести до конца. Поэтому нужно искать какой-то обходной путь.

Сделаем еще одно замечание по поводу задач I),2). Если ставить их не для всей группы Шевалле, а для ее элементарной подгруппы, то существующие методы вполне достаточны для их решения. Описание нормальных делителей элементарных подгрупп групп Шевалле над классом колец, включающим в себя, в частности, нетеровы кольца, получено Э.Абе и К.Судзуки [33]. Но элементарные соображения, связанные с переходом к индуктивному пределу по всем конечно порожденным подкольцам данного кольца, показывают, что их результаты справедливы и для произвольных коммутативных колец. Метод описания автоморфизмов элементарных подгрупп групп Шевалле, состоящий в их логарифмировании и сведении задачи к алгебрам Ли, был недавно предложен Е.И.Зельмановым.

I6°. Заключительные замечания. Отметим несколько других обобщений сформулированных выше результатов и дальнейшие вопросы.

I) Во-первых, результаты, аналогичные приведенным выше справедливы для групп Шевалле скрещенных типов. Относительно теоремы I см. [I5], [26]. Автор перенес также теорему 2 на группы типов ${}^2A_{2\ell+1}$, ${}^2D_\ell$.

2) Аналогичные результаты справедливы для других групп типа Ли, например, групп Стейнберга, расширений групп Шевалле при помощи диагональных автоморфизмов и т.д. При этом в некоторых случаях предположения на основное кольцо удается несколько ослабить.

3) В связи с предыдущим замечанием представляет интерес во-

прос нахождения какой-то абстрактной структуры хорошо отражающей свойства групп типа Ли над общими кольцами (для полей это хорошо известные структуры "расщепимой BN -пары", "группы с разложением Брюа" или "группы с корневыми данными"). Попытка принять за основу разложение Гаусса, предпринятая в [24] является чрезвычайно наивной. Впрочем и другие, гораздо более изощренные, схемы, выдвинутые до сих пор (см.,например, [32]) достаточно удачны лишь для колец типа полулокальных.

4) Отметим еще одно обобщение в духе работ [2] , [3] . На самом деле, как явствует из разложения Гаусса для группы $\Gamma(\sigma)$, в теореме I можно говорить о подгруппах в $\Gamma(\sigma)$, содержащих $\mathcal{U}(\sigma)$.

Литература

I. Басс Х. Алгебраическая К-теория. М., 1973, 59I с.

2. Боревич З.И. О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом. - Вестн.Ленингр.ун-та, 1976, № 13, с.16-24.

3. Боревич З.И. О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом. - Вестн.Ленингр. ун-та, 1976, № 19, с.29-34.

4. Боревич З.И. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.64, с.12-29.

5. Боревич З.И. Описание подгрупп линейных групп, богатых трансвекциями. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1978, т.75, с.22-3I.

6. Борель А. Свойства и линейные представления групп Шевалле. - В кн.: Семинар по алгебраическим группам. М., 1973, с.9-59.

7. Борель А., Титс Ж. Редуктивные группы. - Математика. Период.сб.перев.ин-статей, 1967, т.II, № I, с.43-II; № 2, с.3-3I.

8. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, Гл.IУ-УI. М., 1972, 33I с.

9. Вавилов Н.А. О параболических конгруэнцподгруппах в линейных группах. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.64, с.55-63.

10. Вавилов Н.А. Параболические подгруппы полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа. - Зап. науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1977, т.7I, с.66-79.

II. В а в и л о в Н.А. О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом. - XIУ Всесоюзная алгебр.конф., Тезисы докл., ч.I, Новосибирск, 1977, с.15-16; - Зап.науч. семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1978, т.75, с.43-58.
I2. В а в и л о в Н.А. Подгруппы полной линейной группы над кольцом, содержащие группу клеточно треугольных матриц.I,II.- Вестн.Ленингр.ун-та 1977, № 19, с.139-140; 1982, № 13,с.5-10.
I3. В а в и л о в Н.А. Расположение подгрупп в линейных группах над кольцами. - Автореф. канд. дис. Л.,1977.
I4. В а в и л о в Н.А. О подгруппах полной линейной группы над кольцом, содержащих группу клеточно треугольных матриц. - В сб.: Алгебра и теория чисел, вып.3, Орджоникидзе, 1978, с.33-43.
I5. В а в и л о в Н.А. О параболических подгруппах групп Шевалле скрещенного типа над полулокальным кольцом. - Зап.науч. семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1979, т.94, с.21-36.
I6. В а в и л о в Н.А., П л о т к и н Е.Б. Сетевые подгруппы групп Шевалле. I,II. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1979, т.94, с.40-49; 1982, т.114, с.62-76.
I7. В а с е р ш т е й н Л.Н. О группе SL_2 над дедекиндовыми кольцами арифметического типа. - Мат.сб., 1972, т.89, № 2, с.313-322.
I8. Г о л у б ч и к И.З. О нормальных делителях ортогональной группы над ассоциативным кольцом с инволюцией. - Успехи мат. наук, 1975, т.30, № 6, с.165.
I9. Г о л у б ч и к И.З. Нормальные делители в группах единиц ассоциативных колец. - Автореф. канд. дис. М., 1981.
20. Г о л у б ч и к И.З. О подгруппах полной линейной группы над ассоциативным кольцом. - ХУI Всесоюзная алгебр.конф., тез., ч.I, Л., 1981, с.39-40.
21. Д ы б к о в а Е.В. О некоторых конгруэнцподгруппах симплектической группы. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.64, с.80-91.
22. К о п е й к о В.И. Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов. - Мат.сб., 1978, т.106, № 1, с.94-107.
23. Л е в ч у к В.М. К теореме Титса о параболических подгруппах. - УII Всесоюзный симп. по теории групп, тез.докл., Красноярск, 1980, с.65.
24. Л е в ч у к В.М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп. - Мат.заметки, 1982, т.31, № 4, с.509-525.
25. Л е в ч у к В.М., Н у ж и н Я.Н. О некоторых подгруппах групп Шевалле. - ХУ Всесоюзная алгебр.конф., тез.докл., ч.I,

Красноярск, 1979, с.94.

26. П л о т к и н Е.Б. О параболических подгруппах в $^{3}D_4(R)$. – Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1980, т.103, с.106–113.
27. Р о м а н о в с к и й Н.С. О подгруппах общей и специальной линейных групп над кольцом. – Мат.заметки, 1971, т.9, № 6, с.699–708.
28. С е р р Ж.-П. Проблема конгруэнцподгрупп для SL_2 . – Математика. Период.сб.перев.ин.статей, 1971, т.15, № 6, с.12–45.
29. С т е й н б е р г Р. Лекции о группах Шевалле. М., 1975, 262 с.
30. С у с л и н А.А. О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов. – Изв.АН СССР, Сер.мат., 1977, т.41, № 2, с.235–253.
31. С у с л и н А.А., К о п е й к о В.И. Квадратичные модули и ортогональная группа над кольцами многочленов. – Зап.науч. семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1977, т.71, с.216–250.
32. A b e E. A generalisation of groups with a root data and coverings of the groups. - Tsukuba J.Math., 1977, vol.1, N 1, p.7-26.
33. A b e E., S u z u k i K. On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings. - Tôhoku Math.J., 1976, vol. 28, N 2, p.185-198.
34. C a r t e r R. Simple groups of Lie type, London - New--York-Sydney-Toronto, J.Wiley & Sons, 1972, 331 p.
35. C l i n e E., P a r s h a l l B., S c o t t L. Minimal elements of $\mathcal{N}(H,p)$ and conjugacy of Levi complements in finite Chevalley groups. - J.Algebra, 1975, vol.34, N 3, p.521-523.
36. E s t e s D., O h m J. Stable range in commutative rings.- J.Algebra, 1967, vol.7, N 2, p.343-362.
37. M a t s u m o t o H. Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simples dèployès. - Ann.scient.Ecole Norm.Super. 4eme serie, 1969, t.2, p.1-62.
38. N e w m a n M. Integral Matrices, New York - London, 1972, 224 p.
39. N e w m a n M., R e i n e r I. Inclusion theorems for congruence subgroups. - Trans.Amer.Math.Soc., 1959, vol.91, N 3, p.369-379.
40. R e i n e r I., S w i f t J.D. Congruence subgroups of matrix groups. - Pacific J.Math., 1956, vol.6, N 3, p.529-540.

41. S e i t z G.M. Small rank permutational representations of finite Chevalley groups. - J.Algebra, 1974, vol.28, N 3, p.508-517.
42. S t e i n M.R. Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groups. - Japan.J.Math., 1978, vol.4, N 1, p.77-108.
43. S u z u k i K. On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings. - Tôhoku Math.J., 1976, vol.28, N 1, p.57-66.
44. S u z u k i K. On parabolic subgroups of Chevalley groups over commutative rings. - Sci.Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1977, a13, N 366-382, p.225-232.
45. T i t s J. Thèorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques. - C.R.Acad.Sci.Paris, 1962, t.254, p.2910-2912.
46. T i t s J. Buildings of spherical type and finite BN-pairs. Lect.Notes.Math., vol.386, Berlin et al., 1974, 299 p.