УДК 517.98

В. Р. ОЛЬШЕВСКИЙ

ИЗМЕНЕНИЕ ЖОРДАНОВОЙ СТРУКТУРЫ G-САМОСОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ И САМОСОПРЯЖЁННЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассматривается задача об изменении длин жордановых цепочек при переходе от G_0-самосопряжённого оператора A_0 к G-самосопряжённому оператору A, если величина $\|A-A_0\|+\|G-G_0\|$ достаточно мала. Выясняется роль, которую играют при этом так называемые знаковые характеристики. Полученные результаты переносятся на малые возмущения голоморфных самосопряжённых оператор-функций.

Введение

В работах [1—3] было получено описание возможной области изменения длин жордановых цепочек линейных операторов и голоморфных оператор-функций при малых возмущениях. В этой работе аналогичные задачи рассматриваются в классах G-самосопряжённых операторов и самосопряжённых голоморфных оператор-функций (о. ф.).

Для описания основных результатов введём некоторые обозначения (подробности см. в § 1—3). Пусть $\mathfrak{Z}$ — гильбертово пространство и $L(\mathfrak{Z})$ — множество всех линейных операторов в $\mathfrak{Z}$. Если λ_0 — изолированное фредгольмовское собственное значение (с. з.) оператора A, то через $m_i(A, \lambda_0)$ $(i=1, \ldots, r=\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_0 I))$ обозначим длины соответствующих жордановых цепочек (*частичные кратности*), занумерованные в порядке невозрастания. Для удобства положим $m_i(A, \lambda_0)=0$ при $i>r$. Ограниченную область Ω $(\subset \mathbf{C})$ назовём *нормальной* для оператора $A\in L(\mathfrak{Z})$, если на её границе нет точек спектра A, а весь спектр A в Ω состоит из конечного числа фредгольмовских с. з. $\{\lambda_i\}_1^n$. Положим в этом случае

$$m_i(A, \Omega) = \sum_{j=1}^{n} m_i(A, \lambda_j).$$

Если $u=\{u_i\}_1^\infty$, $v=\{v_i\}_1^\infty$ — две невозрастающие финитные последовательности целых неотрицательных чисел и выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} v_i, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} v_i,$$

то будем писать $u \prec v$.

В [1—3] было показано, что

$$\{m_i(A_0, \Omega)\} \prec \{m_i(A, \Omega)\} \tag{0.1}$$

для любого оператора A, достаточно близкого к A_0. Была доказана также обратная теорема: если оператор A_0 имеет в Ω единственное с. з. λ_0 (общий случай легко сводится к этому) и если заданы натуральное число p и невозрастающие последовательности $\{m'_{ij}\}_{i=1}^{\infty}$ $(j=1, \ldots, p)$ такие, что

$$\{m_i(A_0, \lambda_0)\} \prec \left\{\sum_{j=1}^{p} m'_{ij}\right\},$$

то в любой окрестности оператора A_0 найдётся оператор A, который имеет в Ω ровно p с. з. $\{\lambda_i\}_1^p$, причём $m_i(A, \lambda_j)=m_{ij}'$.

Мы рассматриваем задачу об изменении частичных кратностей для случая, когда исходный оператор A_0 является *G_0-самосопряжённым* (т. е. $G_0A_0=A_0^*G_0$, где G_0 — обратимый самосопряжённый оператор), а возмущённый оператор A является G-самосопряжённым. При решении этой задачи весьма существенным является то обстоятельство, что жорданов базис, отвечающий с. з. λ_0, G-самосопряжённого оператора A можно выбрать так, чтобы каждой цепочке был приписан определённый знак. Иными словами, каждой частичной кратности $m_i(A, \lambda_0)$ ставится в соответствие число $\varepsilon_i(A, G, \lambda_0)=\pm 1$, называемое *знаковой характеристикой* (определение знаковой характеристики приведено в § 2; см. также [4, 5]).

В § 2 доказан следующий результат, устанавливающий связь между изменением частичных кратностей и знаковых характеристик при малых возмущениях (теорема 2.2). Пусть Ω — область, нормальная для G-самосопряжённого оператора A_0. Если A является G-самосопряжённым оператором и $\|A-A_0\|+\|G-G_0\|$ достаточно мала, то

$$|\alpha_k(A, G, \Omega)-\alpha_k(A_0, G_0, \Omega)| \leqslant \sum_{i=1}^{k}(m_i(A, \Omega)-m_i(A_0, \Omega)), \quad k=1, 2, \ldots, \qquad (0,2)$$

где $\alpha_k(A, G, \Omega)$ — сумма знаковых характеристик всех жордановых цепочек нечётной длины с номером, не превосходящим k, отвечающих вещественным с. з. из Ω. Заметим, что правые части неравенств (0.2) неотрицательны в силу (0.1).

В этом же параграфе приводятся некоторые аналоги неравенств (0.2) для цепочек чётной длины. Отметим, что доказательства результатов § 2 основаны на полученных в § 1 утверждениях об изменении линейных оболочек нескольких первых жордановых цепочек оператора при его малом возмущении (напомним, что цепочки нумеруются в порядке невозрастания их длин).

В § 3 получены аналоги результатов § 2 для самосопряжённых голоморфных оператор-функций. При этом частичные кратности понимаются в смысле М. В. Келдыша [6], а знаковые характеристики — в смысле А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликова [7].

В § 4—6 рассматриваются обратные задачи, т. е. отыскиваются ограничения на числа m_{ij}' $(i=1, 2, \ldots; j=1, \ldots, p)$, при которых в любой окрестности G-самосопряжённого оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор A, имеющий в Ω p с. з. $\{\lambda_i\}_1^p$, причём $m_i(A, \lambda_j)=m_{ij}'$ (в некоторых случаях эта задача видоизменяется, о чём будет сказано ниже).

Самым простым является рассматриваемый в § 4 случай, когда область Ω не содержит вещественных точек спектра оператора A_0. Если при этом она не содержит также ни одной пары сопряжённых точек спектра, то в нашей задаче не появляется никаких дополнительных ограничений по сравнению с работами [1—3] (хотя методы доказательств другие).

В § 5 изучается случай вещественного спектра, но при этом отыскиваются ограничения не на частичные кратности $m_i(A, \lambda_j)$, а на суммарные величины $m_i(A, \Omega)$ (*числа Гохберга — Касхука*). Оказывается, что и здесь не приходится налагать на эти числа никаких других ограничений, кроме (0.1).

С другой стороны, результаты § 2 показывают, что при рассмотрении нашей обратной задачи для самих частичных кратностей, отвечающих вещественным с. з., могут возникнуть дополнительные ограничения. Например, если одинаковы знаковые характеристики всех цепочек нечётной длины, отвечающих вещественным с. з. оператора A_0 из области Ω, то в силу (0.2) у возмущённого оператора A количество цепочек нечётной длины, отвечающих вещественным с. з. из Ω, будет не меньше, чем у A_0. Некоторые результаты, относящиеся к этой (наиболее сложной) ситуации, получены в § 6. Здесь предполагается, что операторы A_0 и A имеют в Ω единственное с. з. λ_0 ($\lambda_0 \in \mathbf{R}$). Показано, что неравенства

$$| \gamma_k^{\bullet} - \gamma_k | \leqslant \sum_{i=1}^{k} (m_i' - m_i(A_0, \lambda_0)), \quad k = 1, 2 \ldots, \tag{0.3}$$

где γ_k (соответственно γ_k') — количество нечётных чисел среди $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_1^k$ (соответственно $\{m_i(A, \lambda_0)\}_1^k$), вместе с условием (0.1) являются достаточными для того, чтобы в любой окрестности G-самосопряжённого оператора A_0 нашёлся G-самосопряжённый оператор A такой, что $m_i(A, \lambda_0) = m_i'$. В случае, когда для оператора A_0 выполнено так называемое знаковое условие [8], т. е. числа $\varepsilon_i(A_0, G, \lambda_0)$ зависят только от чётности чисел $m_i(A_0, \lambda_0)$, условия (0.3), очевидно, совпадают с (0.2), и поэтому они вместе с условием (0.1) дают полное решение рассматриваемой задачи.

Все результаты § 4—6 переносятся на самосопряжённые голоморфные о. ф.

Для удобства все результаты, относящиеся к линейным операторам, излагаются в случае конечномерного пространства. Общий случай сводится к этому, если перейти к рассмотрению сужений операторов A и A_0 на прямые суммы корневых подпространств, отвечающих с. з. из Ω (эти прямые суммы имеют одинаковые размерности, и их можно надлежащим образом отождествить).

Основные результаты этой статьи анонсированы в [9].

Автор, пользуясь случаем, выражает глубокую благодарность А. С. Маркусу за постановку задачи и полезные обсуждения.

§ 1. Изменение линейной оболочки жордановых цепочек оператора при малом возмущении

1. Пусть $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ — гильбертовы пространства и $L(\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2)$ — множество всех линейных операторов, действующих из $\mathfrak{Z}_1$ в $\mathfrak{Z}_2$. Вместо $L(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ будем писать $L(\mathfrak{Z})$. В § 1—6 предполагается, что пространства, обозначаемые буквой $\mathfrak{Z}$ (с индексом или без него), являются конечномерными.

Обозначим через $m_1(A, \lambda) \geqslant \ldots \geqslant m_r(A, \lambda)$ порядки всех жордановых клеток (*частичные кратности*) оператора $A \in L(\mathfrak{Z})$, отвечающие его с. з. λ. Для удобства положим $m_i(A,\lambda)=0$ при $i>r$. Выберем некоторый жорданов базис

$$\varphi_i^j, \quad i=0, 1, \ldots, m_j-1; \quad j=1, \ldots, r, \tag{1.1}$$

в корневом подпространстве $\mathscr{R}(A,\lambda)$, отвечающем числу λ (т. е. $(A-\lambda I)\varphi_0^j=0$, $(A-\lambda I)\varphi_i^j=\varphi_{i-1}^j$, причём векторы $\{\varphi_0^j\}_1^r$ образуют базис в собственном подпространстве $(\mathrm{Ker}(A-\lambda I))$. Здесь $m_j=m_j(A, \lambda)$, $r=\dim \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$.

Для натурального k ($\leqslant r$) обозначим через $\mathscr{R}^k(A,\lambda)$ линейную оболочку векторов φ_i^j ($i=0,\ldots,m_j-1$; $j=1,\ldots,k$) и через $\mathscr{R}_k(A,\lambda)$ — линейную оболочку всех остальных векторов из (1.1). При $k>r$ считаем $\mathscr{R}^k(A,\lambda)=\mathscr{R}(A,\lambda)$, $\mathscr{R}_k(A,\lambda)=\{0\}$.

Если спектр $\sigma(A)$ оператора A в некоторой области Ω ($\subset\mathbf{C}$) состоит из p различных с. з. $\{\lambda_i\}_1^p$, то положим

$$\mathscr{R}(A,\Omega)=\mathscr{R}(A,\lambda_1)\dotplus\ldots\dotplus\mathscr{R}(A,\lambda_p),$$
$$\mathscr{R}^k(A,\Omega)=\mathscr{R}^k(A,\lambda_1)\dotplus\ldots\dotplus\mathscr{R}^k(A,\lambda_p),$$
$$\mathscr{R}_k(A,\Omega)=\mathscr{R}_k(A,\lambda_1)\dotplus\ldots\dotplus\mathscr{R}_k(A,\lambda_p).$$

Заметим, что подпространства $\mathscr{R}^k(A,\Omega)$ и $\mathscr{R}_k(A,\Omega)$ определяются неоднозначно и зависят от выбора жордановых базисов в подпространствах $\mathscr{R}(A,\lambda_i)$ ($i=1,\ldots,p$). Говоря в дальнейшем о выборе подпространств $\mathscr{R}^k(A,\Omega)$ или $\mathscr{R}_k(A,\Omega)$ с некоторыми свойствами, мы будем иметь в виду выбор жорданового базиса такого, что отвечающие ему подпространства $\mathscr{R}^k(A,\Omega)$ и $\mathscr{R}_k(A,\Omega)$ обладают этими свойствами. Очевидно, что при фиксированном жордановом базисе подпространства $\{\mathscr{R}^k(A,\Omega)\}_1^\infty$ (соответственно $\{\mathscr{R}_k(A,\Omega)\}_1^\infty$) образуют возрастающую (соответственно убывающую) цепочку, т. е. $\mathscr{R}^k(A,\Omega)\subset\mathscr{R}^{k+1}(A,\Omega)$ $(\mathscr{R}_{k+1}(A,\Omega)\subset\mathscr{R}_k(A,\Omega))$. Числа $m_i(A,\Omega)=\sum_{j=1}^{p} m_i(A,\lambda_j)$ называются *числами Гохберга — Касхука* оператора A в области Ω.

Область Ω ($\subset\mathbf{C}$) назовём *нормальной для оператора* $A\in L(\mathfrak{Z})$, если её граница $\partial\Omega$, состоящая из конечного числа простых замкнутых спрямляемых кривых, не содержит точек спектра оператора A.

Для подпространств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{Z}$ положим

$$\theta_0(\mathfrak{N},\mathfrak{M})=\max_{\substack{x\in\mathfrak{N}\\ \|x\|=1}}\ \min_{y\in\mathfrak{M}}\|x-y\|.$$

Симметризованная величина $\theta(\mathfrak{N},\mathfrak{M})=\max\{\theta_0(\mathfrak{N},\mathfrak{M}),\ \theta_0(\mathfrak{M},\mathfrak{N})\}$ хорошо известна и называется *раствором* подпространств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$. Она совпадает с нормой разности ортогональных проекторов на эти подпространства. Величину $\theta_0(\mathfrak{N},\mathfrak{M})$ можно назвать *полураствором* подпространств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$.

Подпространство $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{Z}$ называется *инвариантным* относительно оператора A (A-*инвариантным*) если $A\mathfrak{N}\subset\mathfrak{N}$. Через $A|\mathfrak{N}$ обозначим сужение оператора A на A-инвариантное подпространство $\mathfrak{N}$.

Если пространство $\mathfrak{Z}$ представляется в виде прямой суммы подпространств $\mathfrak{Z}_1,\ldots,\mathfrak{Z}_m$, то оператор $A\in L(\mathfrak{Z})$ удобно записывать в виде операторной матрицы $A=(A_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$, где $A_{ij}\in L(\mathfrak{Z}_i,\mathfrak{Z}_j)$.

2. ЛЕММА 1.1. *Пусть λ_0 — с. з. оператора $A\in L(\mathfrak{Z})$. Для произвольных чисел $\varepsilon>0$, $q\in\mathbf{N}$ и любых q векторов $\{\psi_k\}_1^q$ из $\mathscr{R}(A,\lambda_0)$ можно выбрать цепочку подпространств $\{\mathscr{R}^k(A,\lambda_0)\}_1^\infty$ так, что найдутся векторы $\varphi_k\in$*

$\in \mathcal{R}^k(A, \lambda_0)$ $(k=1, \ldots, q)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\|\varphi_k - \psi_k\| < \varepsilon, \quad k=1, \ldots, q.$$

Доказательство. Очевидно, что доказательство достаточно провести для случая, когда $q < r = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I)$.

Искомый жорданов базис построим с помощью q шагов. Пусть $\{f^j_{ik}\}$ $(i=0, 1, \ldots, m_j - 1;\ \ j=1, \ldots, r;\ \ k=0, \ldots, q)$ — жордановы базисы в $\mathcal{R}(A, \lambda_0)$, первый из которых $\{f^j_{i0}\}$ произволен, а каждый из остальных связан с предыдущим следующим образом. Для натурального $s \in [1, q]$ рассмотрим подпространства $\mathcal{R}^{s-1}(A, \lambda_0)$ и $\mathcal{R}_{s-1}(A, \lambda_0)$, отвечающие жорданову базису $\{f^j_{i,s-1}\}$. Пусть $\psi_s = \psi_s^1 + \psi_s^2$ — разложение вектора ψ_s, отвечающее разложению подпространства $\mathcal{R}(A, \lambda_0)$ в прямую сумму подпространств $\mathcal{R}^{s-1}(A, \lambda_0)$ и $\mathcal{R}_{s-1}(A, \lambda_0)$. Базис $\{f^j_{is}\}$ получается из $\{f^j_{i,s-1}\}$ заменой жордановой цепочки $\{f^j_{i,s-1}\}_{i=1}^{m_s}$ оператора A цепочкой

$$f^s_{is} = \delta_s f^s_{i,s-1} + (A - \lambda_0 I)^{m_s - i - 1} \psi^2_s, \quad i = 0, \ldots, m_s - 1. \tag{1.2}$$

При этом положительное число δ_s, удовлетворяющее условию

$$\delta_s < \varepsilon \| f^s_{m_s-1, s-1} \|^{-1}, \tag{1.3}$$

выбирается так, чтобы первый вектор f^s_{0s} цепочки (1.2) не входил в линейную оболочку собственных векторов $f^r_{0,s-1}$ $(r \neq s)$ из остальных цепочек. Так как $\psi_s^2 \in \mathcal{R}_{s-1}(A, \lambda_0)$, то отсюда вытекает, что система векторов $\{f^j_{is}\}$ является жордановым базисом в $\mathcal{R}(A, \lambda_0)$. Из неравенств (1.3) вытекает, что векторы $\varphi_k = \psi^1_k + f^k_{m_k - 1, q}$ $(k=1, \ldots, q;\ m_k = m_k(A, \lambda_0))$ удовлетворяют утверждениям леммы.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть Ω—область, нормальная для оператора $A_0 \in L(\mathfrak{Z})$, и выбрана некоторая цепочка подпространств $\{\mathcal{R}^k(A_0, \Omega)\}_1^\infty$. Существует число $K > 0$ такое, что для каждого оператора $A \in L(\mathfrak{Z})$ можно выбрать цепочку подпространств $\{\mathcal{R}^k(A, \Omega)\}_1^\infty$, удовлетворяющую неравенствам*

$$\theta_0(\mathcal{R}^k(A_0, \Omega), \mathcal{R}^k(A, \Omega)) \leqslant K \|A - A_0\|, \quad k=1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

Доказательство. Предположим вначале, что $\Omega = \mathbf{C}$ и что оператор A_0 имеет лишь одно с. з. λ_0, при этом без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 = 0$. Пусть подпространства $\{\mathcal{R}^k(A_0, 0)\}_1^\infty$ отвечают жорданову базису f_i^j $(i=0, \ldots, m_j - 1;\ j=1, \ldots, r)$ оператора A_0 и $\{\lambda_l\}_1^p$ — полный набор различных с. з. оператора A. Пусть $f^j_{m_j-1} = \psi_{j1} \dotplus \ldots \dotplus \psi_{jp}$ $(j=1, \ldots, r)$ — разложение вектора $f^j_{m_j-1}$ по прямой сумме подпространств $\mathcal{R}(A, \lambda_1) \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{R}(A, \lambda_p)$. Согласно лемме 1.1 для любого $\delta > 0$ можно выбрать цепочку подпространств $\{\mathcal{R}^j(A, \lambda_l)\}_{j=1}^\infty$ такую, что найдутся векторы $\varphi_{jl} \in \mathcal{R}^j(A, \lambda_l)$ $(j=1, \ldots, r;\ l=1, \ldots, p)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|\varphi_{jl} - \psi_{jl}\| < \delta. \tag{1.5}$$

Положим $\mathcal{R}^j(A, \mathbf{C}) = \mathcal{R}^j(A, \lambda_1) \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{R}^j(A, \lambda_p)$ $(j=1, 2, \ldots)$. Очевидно, что векторы $h^j_i = A^{m_j - i - 1} \left(\sum_{l=1}^p \psi_{jl} \right)$ $(i=0, \ldots, m_j - 1)$ принадлежат подпространству $\mathcal{R}^j(A, \mathbf{C})$ $(j=1, \ldots, r)$. Кроме того, так как число δ в (1.5) можно считать сколь угодно малым, то имеют место неравенства

$$\| f_i^j - h_i^j \| \leqslant K_1 \| A - A_0 \|,$$

причём число $K_1 > 0$ зависит только от исходного жорданова базиса $\{f_i^j\}$ оператора A_0. Таким образом, для случая, когда спектр оператора A_0 состоит из одной точки, теорема доказана.

Перейдём теперь к общему случаю. Пусть $\{\lambda_l\}_1^t$ — все различные с. з. оператора A_0, лежащие в Ω. Выберем открытые кружки G_l $(\subset\Omega)$ с центрами в точках λ_l $(l=1, \ldots, t)$ столь малых радиусов, что $G_k \cap G_l = \varnothing$ при $k \neq l$. Как известно, найдётся положительное число ε такое, что при условии $\|A - A_0\| < \varepsilon$ у операторов A и A_0 совпадают суммы кратностей с. з., лежащих в G_l $(l=1, \ldots, t)$. Легко видеть, что неравенства (1.4) достаточно установить только для таких операторов A, так как всегда $\theta_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) \leqslant 1$ $(\mathfrak{N}, \mathfrak{M} \subset \mathfrak{Z})$. Рассмотрим оператор

$$S = I - \sum_{l=1}^{t} (P_l(A_0) - P_l(A)) \cdot P_l(A_0),$$

где

$$P_l(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_l} (A - \lambda I)^{-1} \, d\lambda$$

— риссовский проектор на подпространство $\mathcal{R}(A, G_l)$ (проектор $P_l(A_0)$ определяется аналогично).

Нетрудно показать, что существует зависящее только от оператора A_0 и кругов G_l число $K_1 > 0$ такое, что

$$\|I - S\| \leqslant K_1 \|A - A_0\|. \tag{1.6}$$

Легко проверить также, что в силу равенства $\mathcal{R}(A_0, \lambda_l) = \mathcal{R}(S^{-1}AS, G_l)$ из установленного в первой части доказательства вытекает, что можно выбрать цепочку подпространств $\{\mathcal{R}^k(S^{-1}AS, G_l)\}_{k=1}^{\infty}$ таким образом, чтобы при $k=1, 2, \ldots$; $l=1, \ldots, t$ выполнялись неравенства

$$\theta_0(\mathcal{R}^k(A_0, \lambda_l), \mathcal{R}^k(S^{-1}AS, G_l)) \leqslant K_2 \| (S^{-1}AS - A_0) \mid \mathcal{R}(A_0, \lambda_l) \|, \tag{1.7}$$

где $K_2 > 0$ зависит только от оператора A_0. Положим

$$\mathcal{R}^k(A, \Omega) = S(\mathcal{R}^k(S^{-1}AS, G_1) \dotplus \ldots \dotplus \mathcal{R}^k(S^{-1}AS, G_t)).$$

Как легко видеть,

$$\theta_0(\mathcal{R}^k(A_0, \Omega), \mathcal{R}^k(A, \Omega)) \leqslant \theta_0(\mathcal{R}^k(A_0, \Omega), \mathcal{R}^k(S^{-1}AS, \Omega)) + \\ + \theta_0(\mathcal{R}^k(S^{-1}AS, \Omega), \mathcal{R}^k(A, \Omega)).$$

Отсюда и из неравенств (1.7), (1.6) с учётом очевидного соотношения $\theta_0(\mathfrak{N}, S\mathfrak{N}) \leqslant \|I - S\|$ вытекает, что подпространства $\{\mathcal{R}^k(A, \Omega)\}_1^{\infty}$ удовлетворяют неравенствам (1.4). Теорема доказана.

3. Следующая теорема является обобщением хорошо известной (и вытекающей из неравенства (1.6)) оценки величины $\theta(\mathcal{R}(A_0, \Omega), \mathcal{R}(A, \Omega))$ через $\|A - A_0\|$.

ТЕОРЕМА 1.3. *Если в теореме* 1.2 *для оператора* $A \in L(\mathfrak{Z})$ *при некотором* $k \in \mathbf{N}$ *выполняется равенство*

$$\sum_{i=1}^{k} m_i(A, \Omega) = \sum_{i=1}^{k} m_i(A_0, \Omega),$$

то в k-ом из неравенств (1.4) θ_0 *можно заменить на* θ. *В этом случае можно также считать, что подпространство* $\mathcal{R}_k(A, \Omega)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\theta(\mathcal{R}_k(A_0, \Omega), \mathcal{R}_k(A, \Omega)) \leqslant K\|A-A_0\|. \tag{1.8}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как $\theta_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) = \theta(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ при $\dim \mathfrak{M} = \dim \mathfrak{N}$. Далее, согласно теореме 1.2 можно считать, что подпространства $\mathcal{R}^k(A, \Omega)$ и $\mathcal{R}(A, \Omega)$ удовлетворяют неравенствам

$$\theta(\mathcal{R}^k(A_0, \Omega), \ \mathcal{R}^k(A, \Omega)) \leqslant K_1\|A - A_0\|,$$
$$\theta(\mathcal{R}(A_0, \Omega), \ \mathcal{R}(A, \Omega)) \leqslant K_1\|A - A_0\|.$$

Нетрудно подобрать обратимый оператор $T \in L(\mathfrak{Z})$, переводящий подпространства $\mathcal{R}^k(A_0, \Omega)$ и $\mathcal{R}(A, \Omega)$ соответственно в подпространства $\mathcal{R}^k(A, \Omega)$ и $\mathcal{R}(A, \Omega)$ и удовлетворяющий неравенству

$$\|I-T\| \leqslant K_2\|A-A_0\|, \tag{1.9}$$

где число $K_2 > 0$ зависит только от оператора A_0. Легко убедиться, что оператор $A_1 = T^{-1}AT$ удовлетворяет следующим равенствам: $\mathcal{R}(A_0, \Omega) = \mathcal{R}(A_1, \Omega)$, $\mathcal{R}^k(A_0, \Omega) = \mathcal{R}^k(A_1, \Omega)$. Пусть $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1$ — сужения операторов A_0 и A_1 на подпространство $\mathcal{R}(A_0, \Omega)$. Запишем матрицы операторов $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1$ относительно разложения подпространства $\mathcal{R}(A_0, \Omega)$ в прямую сумму подпространств $\mathcal{R}^k(A_0, \Omega)$ и $\mathcal{R}_k(A_0, \Omega)$:

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Поскольку подпространство $\mathcal{R}^k(\tilde{A}_1, \Omega)$ $(= \mathcal{R}^k(A_0, \Omega))$ обладает $\tilde{A}_1$-инвариантным дополнением, то оператор $\tilde{A}_1$ можно привести к диагональному виду. Легко видеть, что это приведение можно осуществить с помощью оператора подобия

$$S = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

причём X оказывается решением уравнения $B_{11}X - XB_{22} = B_{12}$. Рассмотрим трансформаторы $Q(X) = A_{11}X - XA_{22}$ и $R(X) = B_{11}X - XB_{22}$, действующие в пространстве $L(\mathcal{R}_k(A_0, \Omega), \mathcal{R}^k(A_0, \Omega))$. Из [10, с. 202—203] вытекает, что размерности ядер этих трансформаторов совпадают и равны $k \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} m_j(A_0, \Omega)$. Поэтому для всех A, достаточно близких к A_0 (а теорему достаточно доказать только для таких A), уравнение $R(Z) = Y$ (если оно разрешимо) имеет решение Z такое, что $\|Z\| \leqslant K_3\|Y\|$, где $K_3 > 0$ зависит только от A_0. В частности, можно считать, что

$$\|X\| \leqslant K_3\|B_{12}\|. \tag{1.11}$$

Расширим оператор S на всё пространство $\mathfrak{Z}$, положив его равным тождественному оператору на подпространстве $\mathcal{R}(A_0, \mathbf{C} \setminus \bar{\Omega})$. Из (1.10) и (1.11) вытекает, что оператор S удовлетворяет неравенству

$$\|I-S\| \leqslant K_4\|A-A_0\|. \tag{1.12}$$

Так как величина $\|A-A_0\|$ достаточно мала, то в силу (1.9) и (1.12) можно считать, что операторы T и S обратимы. Кроме того, легко видеть, что

$$\mathscr{R}^k(S^{-1}T^{-1}ATS, \Omega) = \mathscr{R}^k(A_0, \Omega),$$
$$\mathscr{R}_k(S^{-1}T^{-1}ATS, \Omega) = \mathscr{R}_k(A_0, \Omega).$$

Полагая $\mathscr{R}^k(A, \Omega) = TS(\mathscr{R}^k(A_0, \Omega))$ и $\mathscr{R}_k(A, \Omega) = TS(\mathscr{R}_k(A_0, \Omega))$, с помощью (1.9) и (1.12) убеждаемся в справедливости равенства (1.8). Теорема доказана.

§ 2. Изменение знаковых характеристик и частичных кратностей G-самосопряжённого оператора при малом возмущении

1. Будем рассматривать в $\mathfrak{Z}$ наряду с обычным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ также *индефинитное* скалярное произведение

$$[x, y] = (Gx, y), \quad x, y \in \mathfrak{Z},$$

заданное с помощью обратимого самосопряжённого оператора $G \in L(\mathfrak{Z})$. Теория пространств с индефинитной метрикой и линейных операторов в таких пространствах изложена во многих книгах (см., например, [4, 5, 11]). Здесь мы только напомним основные определения.

С помощью скалярного произведения $[\cdot, \cdot]$ естественно определяется *G-ортогональность* векторов и подпространств.

Подпространство $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{Z}$ называется *G-вырожденным*, если найдётся ненулевой вектор $x \in \mathfrak{N}$, G-ортогональный всему подпространству $\mathfrak{N}$. Если подпространство $\mathfrak{N}$ не содержит таких векторов, то оно называется *G-невырожденным*. Оператор $A \in L(\mathfrak{Z})$ называется *G-самосопряжённым*, если равенство $[Ax, y] = [x, Ay]$ выполняется для всех векторов $x, y \in \mathfrak{Z}$, или же, другими словами, справедливо тождество $GA = A^*G$. Из последнего соотношения вытекает, что спектр оператора A симметричен относительно вещественной оси, и, более того, $m_i(A, \lambda) = m_i(A, \bar{\lambda})$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где $\lambda \in \sigma(A)$.

Если λ — вещественное с. з. G-самосопряжённого оператора $A \in L(\mathfrak{Z})$, то согласно [4, п. 28.1] (см. также [5, теорема 1.3.3]) в корневом подпространстве $\mathscr{R}(A, \lambda)$ оператора A, отвечающем числу λ, можно выбрать жорданов базис φ_i^j $(i = 0, \ldots, m_j - 1;\ j = 1, \ldots, r)$ оператора A такой, что для некоторых чисел $\varepsilon_j(A, G, \lambda) = \pm 1$ $(j = 1, \ldots, r)$ имеем $[\varphi_i^j, \varphi_k^l] = \varepsilon_j(A, G, \lambda)$, если $j = l$ и $i + k = m_j$; $[\varphi_i^j, \varphi_k^l] = 0$ во всех остальных случаях. Числа $\varepsilon_j(A, G, \lambda)$ называются *знаковыми характеристиками* G-самосопряжённого оператора A, отвечающими его с. з. $\lambda \in \mathbf{R}$, и определяются с точностью до порядка нумерации тех из них, которым соответствуют одинаковые частичные кратности $m_j(A, \lambda)$. Если же λ — невещественное с. з. оператора A, то можно выбрать жордановы базисы φ_i^j и ψ_i^j $(i = 0, \ldots$ $\ldots, m_j - 1;\ j = 1, \ldots, r)$ в подпространствах $\mathscr{R}(A, \lambda)$ и $\mathscr{R}(A, \bar{\lambda})$ соответственно такие, что $[\varphi_i^j, \varphi_k^l] = 1$, если $j = l$ и $i + k = m_j$; и $[\varphi_i^j, \varphi_k^l] = 0$ во всех остальных случаях.

Представим пространство $\mathfrak{Z}$ в виде прямой суммы:

$$\mathfrak{Z} = \mathscr{R}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathscr{R}_s, \tag{2.1}$$

где каждое из слагаемых является либо корневым подпространством оператора A, отвечающим его вещественному с. з., либо суммой его корневых подпространств, отвечающих паре сопряжённых невещественных с. з. Объединив жордановы базисы, выбранные в каждом из подпространств $\mathcal{R}_i$ ($i=1, \ldots, s$), способом, указанным выше, получим жорданов базис G-самосопряжённого оператора A, который мы будем называть его *G-нормальным* базисом.

2. ЛЕММА 2.1. *Пусть заданы G-самосопряжённый оператор $A \in L(\mathfrak{Z})$ и обладающее A-инвариантным дополнением подпространство $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{Z}$, которое само является A-инвариантным. Предположим также, что оператор $A|\mathfrak{L}$ подобен своему сопряжённому. Каково бы ни было положительное число ε, найдётся G-невырожденное A-инвариантное подпространство $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{Z}$, обладающее свойством*

$$\theta(\mathfrak{L}, \mathfrak{S}) < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим разложение (2.1) пространства $\mathfrak{Z}$ и положим $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L} \cap \mathcal{R}_i$ ($i=1, \ldots, s$). Легко видеть, что подпространство $\mathfrak{L}$ разлагается в прямую сумму G-ортогональных A-инвариантных подпростарнств: $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{L}_s$. Пусть $\mathcal{R}_i$ — корневое подпространство оператора A, отвечающее его вещественному с. з. λ_i. Обозначим через $\mathfrak{N}_1'$ линейную оболочку векторов одной из цепочек $\{g_j\}_1^t$ какого-нибудь жорданова базиса оператора $A|\mathfrak{L}_i$ и через $\mathfrak{M}_1'$ — линейную оболочку всех остальных векторов этого базиса. Если $\mathfrak{N}_1'$ является G-невырожденным подпространством, то полагаем $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1'$, в противном случае считаем $\mathfrak{N}_1$ линейной оболочкой векторов $\{g_j + \delta f_j\}_1^t$, где $\delta > 0$, а $\{f_j\}_1^t$ — какая-нибудь цепочка длины t из какого-нибудь G-нормального базиса в $\mathcal{R}(A, \lambda_i)$. Существование такой цепочки вытекает из наличия A-инвариантного прямого дополнения у подпространства $\mathfrak{L}$. Если бы подпространство $\mathfrak{N}_1$ было G-вырожденным, то в силу G-самосопряжённости оператора A его собственный вектор $g_1 + \delta f_1$ ($\in \mathfrak{N}_1$) был бы в этом случае G-ортогонален подпространству $\mathfrak{N}_1$. Так как $[f_1, f_t] = \pm 1$, то $[g_1 + \delta f_1, g_t + \delta f_t] \neq 0$ при достаточно малых δ, и поэтому можно считать, что $\mathfrak{N}_1$ является G-невырожденным A-инвариантным подпространством. Положим $\mathfrak{L}_i^1 = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{M}_1'$. Легко видеть, что за счёт выбора δ величину $\theta(\mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_i^1)$ можно сделать сколь угодно малой.

Обозначим через $\mathfrak{B}_1$ множество всех векторов из $\mathcal{R}_i$, G-ортогональных подпространству $\mathfrak{N}_1$. Хорошо известно, что при переходе от подпространства $\mathfrak{N}_1$ к подпространству $\mathfrak{B}_1$ сохраняется свойство быть G-невырожденным и A-инвариантным подпространством. Положим $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{L}_i^1 \cap \mathfrak{B}_1$. Действуем далее в подпространстве $\mathfrak{M}_1$ точно так же, как мы действовали в подпространстве $\mathfrak{L}_i$: выбираем некоторую цепочку из произвольного жорданова базиса оператора $A|\mathfrak{M}_1$, рассматриваем, при необходимости, её возмущение с помощью цепочки той же длины из некоторого G-нормального базиса оператора $A|\mathfrak{B}_1$ и продолжаем этот процесс, пока не построим G-невырожденное A-инвариантное подпространство $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{L}_i^q$ ($q = \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I) \cap \mathfrak{L}_i)$), причём число $\theta(\mathfrak{L}_i, \mathfrak{S}_i)$ можно считать сколь угодно малым.

Сходным образом доказывается существование такого подпространства $\mathfrak{S}_i$ и в случае, когда $\mathcal{R}_i$ представляет собой прямую сумму двух корневых подпространств, отвечающих комплексно сопряжённым с. з. Положим $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{S}_s$. Очевидно, что подпространство $\mathfrak{S}$ обладает всеми требуемыми свойствами. Лемма доказана.

3. Пусть λ — вещественное с. з. G-самосопряжённого оператора $A \in L(\mathfrak{Z})$. Обозначим через $\alpha_k(A, G, \lambda)$ (соответственно $\beta_k(A, G, \lambda)$) сумму чисел $\varepsilon_i(A, G, \lambda)$, отвечающих нечётным (соответственно чётным и

не равным нулю) числам среди $\{m_i(A,\lambda)\}_1^k$. Очевидно, что числа $\alpha_k(A, G, \lambda)$ и $\beta_k(A, G, \lambda)$ зависят от выбора нумерации чисел $\varepsilon_i(A, G, \lambda)$ и поэтому определяются неоднозначно. Тем не менее, если при некотором k справедливо неравенство $m_{k+1}(A,\lambda)>m_k(A,\lambda)$, то числа $\alpha_k(A, G, \lambda)$ и $\beta_k(A, G, \lambda)$ определяются единственным образом. Если среди с. з. оператора A, лежащих в области Ω ($\subset \mathbf{C}$), содержится n вещественных $\{\lambda_l\}_1^n$, то положим

$$\alpha_k(A, G, \Omega)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_k(A, G, \lambda_j).$$

И наконец, если Ω вообще не содержит вещественных с. з. оператора A, то будем считать $\alpha_k(A, G, \Omega)=0$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть Ω — область, нормальная для G_0-самосопряжённого оператора $A_0 \in L(\mathfrak{Z})$. Предположим также, что зафиксирован порядок нумерации знаковых характеристик вещественных с. з. оператора A_0, лежащих в Ω. Тогда существует число $\delta>0$ такое, что для любого самосопряжённого оператора $G\in L(\mathfrak{Z})$ и любого G-самосопряжённого оператора $A\subset L(\mathfrak{Z})$ при условии $\|A-A_0\|+\|G-G_0\|<\delta$ нумерация знаковых характеристик вещественных с. з. оператора A, лежащих в Ω, может быть осуществлена таким образом, чтобы выполнялись неравенства*

$$|\alpha_k(A, G, \Omega)-\alpha_k(A_0, G_0, \Omega)|\leqslant\sum_{j=1}^{k}(m_j(A, \Omega)-m_j(A_0, \Omega)),\quad k=1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать для случая, когда Ω не содержит невещественного спектра оператора A_0. Пусть цепочка подпространств $\{\mathcal{R}^k(A_0,\Omega)\}_1^\infty$ отвечает некоторому G-нормальному базису в $\mathcal{R}(A_0,\Omega)$. Согласно теореме 1.2 для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что можно выбрать цепочку подпространств $\{\mathcal{R}^k(A,\Omega)\}_1^\infty$, обладающую свойством

$$\theta_0(\mathcal{R}^k(A_0,\Omega),\ \mathcal{R}^k(A,\Omega))<\varepsilon,\quad k=1,2,\ldots \tag{2.3}$$

При этом из леммы 2.1 вытекает, что подпространства $\mathcal{R}^k(A,\Omega)$ ($k=1,2,\ldots$) можно считать G-невырожденными, или, другими словами, что цепочка $\{\mathcal{R}^k(A,\Omega)\}_1^\infty$ отвечает некоторому G-нормальному базису в $\mathcal{R}(A,\Omega)$. Из [4, с. 323] вытекают следующие равенства:

$$\begin{gathered}\alpha_k(A_0, G_0, \Omega)=\operatorname{sig}[P_k(A_0)\,G_0|\mathcal{R}^k(A_0,\Omega)],\\ \alpha_k(A, G, \Omega)=\operatorname{sig}[P_k(A)\,G|\mathcal{R}^k(A,\Omega)],\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $P_k(A_0)$ (соответственно $P_k(A)$) — ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{R}^k(A_0,\Omega)$ (соответственно $\mathcal{R}^k(A,\Omega)$), а через $\operatorname{sig} H$ обозначается разность между числом положительных и отрицательных с. з. самосопряжённого оператора H (*сигнатура* H). Из (2.3) вытекает, что существуют подпространства $\mathcal{R}^k\subset\mathcal{R}^k(A,\Omega)$ ($k=1,2,\ldots$) такие, что $\theta(\mathcal{R}^k(A_0,\Omega),\mathcal{R}^k)<\varepsilon$ ($k=1,2,\ldots$), и поэтому $\dim\mathcal{R}^k=\dim\mathcal{R}^k(A_0,\Omega)$. Число δ можно считать настолько малым, что выполняются равенства

$$\operatorname{sig}[P_k(A_0)\,G_0|\mathcal{R}^k(A_0,\Omega)]=\operatorname{sig}[P_kG|\mathcal{R}^k],\quad k=1,2,\ldots, \tag{2.5}$$

где P_k — ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{R}^k$. Оператор $P_k(A)\,G|\mathcal{R}^k(A,\Omega)$ имеет не меньше положительных с. з. (с учётом кратностей), чем оператор $P_k G|\mathcal{R}^k$ (см., например, [12, гл. 3, задача 238]). Аналогичное утверждение справедливо и для отрицательных с. з. этих операторов. Поэтому

$$|\operatorname{sig}[P_k(A)\, G|\mathcal{R}^k(A,\Omega)]-\operatorname{sig}[P_k G|\mathcal{R}^k]|\leqslant\dim\mathcal{R}^k(A,\Omega)-\dim\mathcal{R}^k,\quad k=1,2,\ldots$$

Отсюда, с учётом (2.4), (2.5) и того, что

$$\dim\mathcal{R}^k(A,\Omega)=\sum_{j=1}^{k} m_j(A,\Omega),$$

$$\dim\mathcal{R}^k=\dim\mathcal{R}^k(A_0,\Omega)=\sum_{j=1}^{k} m_j(A_0,\Omega),$$

и вытекает утверждение теоремы.

При достаточно больших k правая часть неравенства (2.2) обращается в нуль, и поэтому (2.2) переходит в равенство $\alpha_k(A,G,\Omega)=\alpha_k(A_0,G_0,\Omega)$. Это равенство содержится в теореме III.1.1 из [5], где обсуждается также вопрос о возможных значениях разности между количествами вещественных с. з. операторов A и A_0 в области Ω.

4. ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Предположим также, что вещественный спектр оператора* A_0 (*соответственно* A) *в области* Ω *состоит ровно из одной точки* λ_0 (*соответственно* λ_1). *Тогда нумерацию чисел* $\varepsilon_i(A,G,\lambda_1)$ *можно осуществить таким образом, чтобы кроме неравенств* (2.2) *выполнялись также и неравенства*

$$|\beta_k(A,G,\lambda_1)-\beta_k(A_0,G_0,\lambda_0)|\leqslant\sum_{j=1}^{k}(m_j(A,\Omega)-m_j(A_0,\Omega))+C_k,\quad k=1,2,\ldots,\tag{2.6}$$

где $C_k=\max\{0,k-\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)\}$.

В том простейшем случае, когда $m_j(A,\lambda_1)=m_j(A_0,\lambda_0)$, из теорем 2.2 и 2.3 вытекают равенства $\varepsilon_j(A,G,\lambda_1)=\varepsilon_j(A_0,G_0,\lambda_0)$ $(j=1,\ldots,r)$, где $r=\dim\operatorname{Ker}(A_0-\lambda_0 I)$. Этот результат известен [5, с. 283].

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.2. *Предположим также, что вещественный спектр оператора* A_0 *в* Ω *состоит из одной точки* λ_0, *а оператор* A *не имеет в* Ω *вещественных с. з. Тогда, наряду с неравенствами* (2.2), *справедливы неравенства*

$$|\beta_k(A_0,G_0,\lambda_0)|\leqslant\sum_{j=1}^{k}(m_j(A,\Omega)-m_j(A_0,\Omega))+k,\quad k=1,2,\ldots\tag{2.7}$$

Теоремы 2.3 и 2.4 будут доказаны в § 5, так как для этого нам понадобятся некоторые сведения из теории голоморфных самосопряжённых матриц-функций.

5. Говорят [8], что G-самосопряжённый оператор $A\in L(\mathfrak{Z})$ удовлетворяет *знаковому условию* в точке $\lambda_0\in\mathbf{R}$, если знаковые характеристики $\varepsilon_i(A,G,\lambda_0)$, отвечающие с. з. λ_0 оператора A, зависят только от чётности числа $m_i(A,\lambda_0)$. Если $\{\lambda_j\}_1^s$ — полный набор вещественных с. з. оператора A, лежащих в нормальной для него области Ω, и оператор A удовлетворяет знаковому условию в каждой точке λ_j $(j=1,\ldots,s)$, то будем говорить, что оператор A *удовлетворяет знаковому условию* в области Ω. В случае, когда область Ω вообще не содержит вещественных с. з. опе-

ратора A, мы также будем считать, что A удовлетворяет знаковому условию в Ω.

В [8, 13] было установлено, что знаковое условие играет важную роль при изучении устойчивости специальных инвариантных подпространств оператора A, а также при изучении устойчивости специальных решений матричных уравнений Риккатти. Там же приведён пример, в котором знаковое условие перестаёт выполняться при переходе от G_0-самосопряжённого оператора A_0 к G-самосопряжённому оператору A, где величину $\|A-A_0\|+\|G-G_0\|$ можно считать сколь угодно малой. Из этого примера следует, что свойство оператора удовлетворять знаковому условию, вообще говоря, не является устойчивым. Следующие две теоремы показывают, что это свойство является устойчивым в некоторых классах G-самосопряжённых операторов A.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть Ω — нормальная область для G_0-самосопряжённого оператора $A_0 \in L(\mathfrak{Z})$, в Ω содержится ровно одна точка λ_0 вещественного спектра оператора A_0, причём A_0 удовлетворяет знаковому условию в точке λ_0. Тогда существует число $\delta>0$ такое, что для любого самосопряжённого оператора $G \in L(\mathfrak{Z})$ и любого G-самосопряжённого оператора $A \in L(\mathfrak{Z})$, имеющего в Ω только одно вещественное с. з. (скажем, λ_1), при условии $\|A-A_0\|+\|G-G_0\|$ справедливы следующие утверждения:*

а) *оператор A удовлетворяет знаковому условию в точке λ_1, и, более того, знаковые характеристики $\varepsilon_i(A, G, \lambda_1)$ и $\varepsilon_i(A_0, G_0, \lambda_0)$, отвечающие нечётным (чётным) числам $m_i(A, \lambda_1)$ и $m_i(A_0, \lambda_0)$, одинаковы.*

б) *количества нечётных чисел в последовательностях $\{m_i(A, \lambda_1)\}_1^\infty$ и $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_1^\infty$ совпадают.*

Доказательство. Положим $r=\dim \operatorname{Ker}(A_0-\lambda_0 I)$, $r_1=\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)$. Из неравенств (2.2) и (2.6) при $k=r$ вытекают соотношения

$$\alpha_r(A, G, \lambda_1)=\alpha_r(A_0, G_0, \lambda_0), \tag{2.8}$$

$$|\beta_r(A, G, \lambda_1)-\beta_r(A_0, G_0, \lambda_0)| \leqslant r-r_1. \tag{2.9}$$

Из (2.8) следует, что количество нечётных чисел среди $\{m_i(A, \lambda_1)\}_1^r$ во всяком случае не меньше величины $|\alpha_r(A_0, G_0, \lambda_0)|$. С другой стороны, из неравенства (2.9) вытекает, что это количество не может быть строго больше, чем $|\alpha_r(A_0, G_0, \lambda_0)|$. Таким образом, свойство б) доказано. Утверждение а) непосредственно следует из условия б) и соотношений (2.8) и (2.9). Теорема доказана.

Следствие 2.6. *Пусть Ω — нормальная область для G_0-самосопряжённого оператора $A_0 \in L(\mathfrak{Z})$ и оператор A_0 удовлетворяет в Ω знаковому условию. Существует число $\delta>0$ такое, что G-самосопряжённый оператор $A \in L(\mathfrak{Z})$ удовлетворяет знаковому условию в Ω, если $\|A-A_0\|-\|G-G_0\|<\delta$, и число вещественных с. з., лежащих в Ω, у оператора A не больше, чем у оператора A_0.*

§ 3. Самосопряжённые оператор-функции и их возмущения

1. Пусть Ω — некоторая область в $\mathbf{C}$, $\mathfrak{G}$ — комплексное гильбертово пространство и $W(\lambda)$ — голоморфная в Ω оператор-функция (о. ф.) со значениями в $L(\mathfrak{G})$. Множество всех точек $\lambda_0 \in \Omega$, для которых оператор $W(\lambda)$ необратим, назовём *спектром* о. ф. $W(\lambda)$ (в области Ω); если уравнение $W(\lambda_0)\varphi_0=0$ имеет ненулевое решение φ_0, то λ_0 называется *собственным значением* (с. з.) $W(\lambda)$, а φ_0, — *собственным вектором* $W(\lambda)$, отвечающим числу λ_0. Следуя М. В. Келдышу [6], введём понятие кратности с. з. голоморфной о. ф. (и частичных кратностей). Векторы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ называются *присоединёнными* к собственному вектору φ_0, если

$$\sum_{s=0}^{t} \frac{1}{s!} W^{(s)}(\lambda)\, \varphi_{t-s} = 0, \quad t = 1, \ldots, m.$$

Число $m+1$ называется *длиной цепочки* $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ из собственного и присоединённых к нему векторов. Если длины всех цепочек, отвечающих собственному вектору φ_0, ограничены, то максимальная из них называется *кратностью* вектора φ_0. Если же эти длины неограничены, то условимся считать кратность φ_0 бесконечной.

Если собственное подпространство $\operatorname{Ker} W(\lambda_0)$ конечномерно и кратность каждого вектора $\varphi \in \operatorname{Ker} W(\lambda_0)$ $(\varphi \neq 0)$ конечна, то *канонической системой* собственных и присоединённых к ним векторов о. ф. $W(\lambda)$, отвечающих числу λ_0, называется система

$$\varphi_i^j, \quad i = 0, \ldots, m_j - 1; \quad j = 1, \ldots, r = \dim \operatorname{Ker} W(\lambda_0),$$

где φ_0^j — собственный вектор кратности m_j, $\varphi_1^j, \ldots, \varphi_{m_j-1}^j$ — цепочка присоединённых к нему векторов, причём m_1 — максимальная из кратностей всех собственных векторов, отвечающих λ_0; m_j $(j=2, \ldots, r)$ — максимальная из кратностей всех собственных векторов, не принадлежащих подпространству, натянутому на векторы $\{\varphi_0^k\}_{k=1}^{j-1}$. Числа m_j (*частичные кратности*) будем обозначать через $m_j(W(\lambda), \lambda_0)$ $(j=1, \ldots, r)$. Для удобства положим $m_j(W(\lambda), \lambda_0) = 0$ при $j > r$. Число

$$m(W(\lambda), \lambda_0) = \sum_{j=1}^{\infty} m_j(W(\lambda), \lambda_0)$$

называется *кратностью* с. з. λ_0. Если $\dim \operatorname{Ker} W(\lambda_0) = \infty$ или кратность хотя бы одного вектора из $\operatorname{Ker} W(\lambda_0)$ бесконечна, то положим $m(W(\lambda), \lambda_0) = \infty$.

Ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{C}$, граница $\partial\Omega$ которой состоит из конечного числа простых замкнутых спрямляемых кривых, называется *нормальной* для голоморфной в Ω и непрерывной в $\overline{\Omega}$ о. ф. $W(\lambda)$, если оператор $W(\lambda)$ обратим для всех $\lambda \in \partial\Omega$ и является фредгольмовым оператором (т. е. $\dim \operatorname{Ker} W(\lambda) < \infty$, $\dim \mathfrak{G}/\operatorname{Im} W(\lambda) < \infty$) для всех $\lambda \in \Omega$. Хорошо известно, что весь спектр о. ф. $W(\lambda)$ в нормальной для неё области Ω состоит из конечного числа с. з. $\{\lambda_j\}_1^s$, каждое из которых имеет конечную кратность [14]. Поэтому для такой области можно ввести суммарные величины

$$m_i(W(\lambda), \Omega) = \sum_{j=1}^{s} m_i(W(\lambda), \lambda_j), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

называемые *числами Гохберга — Касхука* о. ф. $W(\lambda)$ в области Ω.

Известно [6], что главная часть о. ф. $W^{-1}(\lambda)$ в окрестности её полюса $\lambda = \lambda_0$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{r} \left[\frac{(\cdot, \psi_0^j)\, \varphi_0^j}{(\lambda - \lambda_0)^{m_j}} + \cdots + \frac{(\cdot, \psi_0^j)\, \varphi_{m_j-1}^j + \cdots + (\cdot, \psi_{m_j-1}^j)\, \varphi_0^j}{\lambda - \lambda_0} \right], \quad (3.1)$$

где

$$\varphi_i^j, \quad i = 0, \ldots, m_j - 1; \quad j = 1, \ldots, r, \quad (3.2)$$

— каноническая система собственных и присоединённых векторов голоморфной о. ф. $W(\lambda)$, отвечающая числу λ_0, а

$$\psi_i^j, \quad i=0, \ldots, m_j-1; \quad j=1, \ldots, r, \tag{3.3}$$

— каноническая система собственных и присоединённых векторов голоморфной о. ф. $(W(\overline{\lambda}))^*$, отвечающая числу $\overline{\lambda}_0$, которая однозначно определяется, если система (3.2) уже выбрана. В [7, лемма 1.1] показано, что если λ_0— вещественное изолированное, фредгольмовское с. з. самосопряжённой голоморфной о. ф. $W(\lambda)$ (т. е. $W(\lambda)=(W(\overline{\lambda}))^*$), то систему (3.2) в разложении (3.1) можно выбрать таким образом, что векторы (3.3) определяются следующими соотношениями:

$$\psi_i^j=\varepsilon_j\,(W(\lambda), \lambda_0)\,\varphi_i^j, \quad i=0, \ldots, m_j-1; \quad j=1, \ldots, r, \tag{3.4}$$

где $\varepsilon_j(W(\lambda), \lambda_0)=\pm 1$ (приведённый результат сформулирован в [7] для квадратичного пучка, но его доказательство сохраняет силу и в случае голоморфной о. ф.). Числа $\varepsilon_j(W(\lambda), \lambda_0)$ будем называть *знаковыми характеристиками* о. ф. $W(\lambda)$, отвечающими с. з. λ_0. Эти числа определяются с точностью до порядка нумерации тех из них, которым соответствуют одинаковые числа $m_j(W(\lambda), \lambda_0)$.

2. В дальнейшем нам понадобится понятие спектрального узла голоморфной о. ф. Мы будем придерживаться определения из [15] (имеются и другие варианты).

Пусть $\mathfrak{G}$ — гильбертово пространство и $W(\lambda)$ — голоморфная в некоторой области Ω о. ф. со значениями в $L(\mathfrak{G})$. Предположим также, что спектр $W(\lambda)$ в Ω является компактным множеством. Квинтет $\theta=(A, B, C, \mathfrak{S}, \mathfrak{G})$ называется *спектральным узлом* о. ф. $W(\lambda)$ в области Ω, если $\mathfrak{S}$ — гильбертово пространство, а операторы $A\in L(\mathfrak{S})$, $B\in L(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$, $C\in L(\mathfrak{S}, \mathfrak{G})$ удовлетворяют следующим условиям:

1°. $\sigma(A)\subset\Omega$;

2°. о. ф. $W^{-1}(\lambda)-C(\lambda I-A)^{-1}B$ аналитически продолжается на всю область Ω;

3°. о. ф. $W(\lambda)C(\lambda I-A)^{-1}$ аналитически продолжается на всю область Ω;

4°. $\bigcap\limits_{j=0}^{\infty} CA^j=\{0\}$.

Различные свойства спектральных узлов можно найти в работах [15—17] (см. также цитированную там литературу). Здесь мы отметим только некоторые из них. Для любой о. ф. $W(\lambda)$ с компактным в Ω спектром спектральный узел всегда существует и определяется с точностью до подобия, т. е. если $\theta_1=(A_1, B_1, C_1, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{G})$ и $\theta_2=(A_2, B_2, C_2, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{G})$ являются спектральными узлами голоморфной о. ф. $W(\lambda)$ в Ω, то $A_1=S^{-1}A_2S$, $C_1=C_2S$, $B_1=S^{-1}B_2$ для некоторого обратимого самосопряжённого оператора $S\in L(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$, который определяется единственным образом, если узлы θ_1 и θ_2 уже выбраны. Известно, что оператор A (называемый *главным оператором* узла θ) является *спектральным линеаризатором* о. ф. $W(\lambda)$ в области Ω, т. е. наряду с условием 1° он удовлетворяет также для всех $\lambda\in\Omega$ равенству

$$\begin{pmatrix} W(\lambda) & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{S}} \end{pmatrix}=E(\lambda)\begin{pmatrix} I_{\mathfrak{G}} & 0 \\ 0 & \lambda I_{\mathfrak{S}}-A \end{pmatrix}F(\lambda),$$

где $I_{\mathfrak{S}}$ и $I_{\mathfrak{G}}$ — тождественные операторы в пространствах $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{G}$, а $E(\lambda)$ и $F(\lambda)$ — голоморфные и обратимые всюду в Ω о. ф. со значениями в $L(\mathfrak{G}\dotplus\mathfrak{S})$. Очевидно, что спектр и с. з. оператора A совпадают со спектром и с. з. о. ф. $W(\lambda)$ и что кратности с. з. и частичные кратности у них также одинаковы.

3. Используя понятие спектрального узла, можно дать ещё одно описание знаковых характеристик самосопряжённой о. ф., отвечающих её вещественному с. з. Пусть $\theta=(A, B, C, \mathfrak{S}, \mathfrak{G})$ — некоторый спектральный узел голоморфной самосопряжённой о. ф. $W(\lambda)$ в области Ω. Согласно [15, теорема 2.8] квинтет $\theta^*=(A^*, C^*, B^*, \mathfrak{S}, \mathfrak{G})$ также является спектральным узлом $W(\lambda)$ в Ω, причём осуществляющий подобие между θ и θ^* оператор $S\in L(\mathfrak{S})$ оказывается самосопряжённым (см. [15, равенство (1.3а)]). Если область Ω нормальна для самосопряжённой голоморфной о. ф. $W(\lambda)$ (в этом случае пространство $\mathfrak{S}$ с необходимостью оказывается конечномерным), то из сказанного вытекает, что оператор A является S-самосопряжённым, причём знаковые характеристики вещественных с. з. этого оператора не зависят от выбора конкретного узла θ. Покажем, что эти знаковые характеристики совпадают со знаковыми характеристиками тех же с. з. о. ф. $W(\lambda)$. Достаточно рассмотреть случай, когда в области Ω лежит лишь одно с. з. $\lambda_0\in\mathbf{R}$ о. ф. $W(\lambda)$. Пусть $\mathfrak{Z}$ — гильбертово пространство размерности $m(W(\lambda), \lambda_0)$ с ортонормированным базисом e_i^j $(i=0, \ldots, m_j-1;\ j=1, \ldots, r)$, где $r=\dim\operatorname{Ker} W(\lambda_0)$, $m_j=m_j(W(\lambda), \lambda_0)$. Зададим операторы A, $S\in L(\mathfrak{Z})$, $C\in L(\mathfrak{Z}, \mathfrak{G})$, $B\in L(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})$ равенствами $Ae_0^j=0$, $Ae_i^j=e_{i-1}^j$ $(i=1, \ldots, m_j-1)$, $Se_i^j=\varepsilon_j(W(\lambda), \lambda_0)\,e^j_{m_j-i-1}, Ce_i^j=\varphi_i^j$ $(i=0, \ldots, m_j-1;\ j=1, \ldots, r)$, $B=S^{-1}C^*$, где φ_i^j $(i=0, \ldots, m_j-1;\ j=1, \ldots, r)$ — каноническая система собственных и присоединённых векторов голоморфной самосопряжённой о. ф. $W(\lambda)$ такая, что система ψ_i^j из (3.1) удовлетворяет условиям (3.4). Непосредственная проверка показывает, что $\theta=(A, B, C, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G})$ (а значит, и θ^*) является спектральным узлом о. ф. $W(\lambda)$ в области Ω. Легко убедиться также, что подобие между узлами θ и θ^* осуществляет самосопряжённый оператор S и что знаковые характеристики S-самосопряжённого оператора A совпадают со знаковыми характеристиками о. ф. $W(\lambda)$:

$$\varepsilon_i(A, S, \lambda_0)=\varepsilon_i(W(\lambda), \lambda_0), \quad i=1, \ldots, r.$$

4. Обозначим через $\alpha_k(W(\lambda), \lambda_0)$ (соответственно $\beta_k(W(\lambda), \lambda_0)$) сумму чисел $\varepsilon_i(W(\lambda), \lambda_0)$, отвечающих нечётным (соответственно чётным и положительным) числам среди $\{m_i(W(\lambda), \lambda_0)\}_1^k$. Очевидно, что числа $\alpha_k(W(\lambda), \lambda_0)$ и $\beta_k(W(\lambda), \lambda_0)$ определяются неоднозначно и зависят от способа нумерации чисел $\varepsilon_i(W(\lambda), \lambda_0)$, отвечающих одинаковым частичным кратностям $m_i(W(\lambda), \lambda_0)$.

В § 2 (теоремы 2.2—2.4) указаны ограничения на область изменения знаковых характеристик и частичных кратностей операторов, самосопряжённых относительно индефинитной метрики, при малых возмущениях. Следующие теоремы показывают, что аналогичные ограничения справедливы и для малых возмущений голоморфных самосопряжённых о. ф.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — гильбертово пространство и Ω — нормальная область для голоморфной в Ω и непрерывной в $\overline{\Omega}$ самосопряжённой о. ф. $W_0(\lambda)$ со значениями в $L(\mathfrak{G})$. Предположим также, что зафиксирован порядок нумерации знаковых характеристик вещественных с. з. о. ф.*

$W_0(\lambda)$, *лежащих в области* Ω. *Тогда существует число* $\delta>0$ *такое, что* Ω *является нормальной областью для любой самосопряжённой о. ф.* $W(\lambda)$ *со значениями в* $L(\mathfrak{G})$, *голоморфной в* Ω, *непрерывной в* $\overline{\Omega}$ *и удовлетворяющей условию*

$$\|W(\lambda)-W_0(\lambda)\|<\delta, \quad \lambda\in\partial\Omega.$$

При этом нумерация знаковых характеристик вещественных с. з. о. ф. $W(\lambda)$ *из* Ω *может быть осуществлена таким образом, чтобы при* $k=1, 2, \dots$ *выполнялись неравенства*

$$|\alpha_k(W(\lambda), \Omega)-\alpha_k(W_0(\lambda), \Omega)|\leqslant\sum_{j=1}^{k}(m_j(W(\lambda), \Omega)-m_j(W_0(\lambda), \Omega)). \quad (3.5)$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Предположим также, что вещественный спектр о. ф.* $W_0(\lambda)$ *(соответственно* $W(\lambda)$*) в области* Ω *состоит ровно из одной точки* λ_0 *(соответственно* λ_1*). Тогда нумерацию знаковых характеристик для* $W(\lambda)$ *можно осуществить таким образом, чтобы кроме неравенств* (3.5) *выполнялись также неравенства*

$$|\beta_k(W(\lambda), \lambda_1)-\beta_k(W_0(\lambda), \lambda_0)|\leqslant\sum_{j=1}^{k}(m_j(W(\lambda), \Omega)-m_j(W_0(\lambda), \Omega))+C_k$$

$(k=1, 2, \dots)$, *где* $C_k=\max\{0, k-\dim\operatorname{Ker} W(\lambda_1)\}$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.1. *Предположим также, что вещественный спектр о. ф.* $W_0(\lambda)$ *в* Ω *состоит из одной точки* λ_0, *а о. ф.* $W(\lambda)$ *не имеет в* Ω *ни одной точки вещественного спектра. Тогда, наряду с неравенствами* (3.5), *справедливы неравенства*

$$|\beta_k(W_0(\lambda), \lambda_0)|\leqslant\sum_{j=1}^{k}(m_j(W(\lambda), \Omega)-m_j(W_0(\lambda), \Omega))+k, \ k=1, 2, \dots$$

Доказательство теорем 3.1, 3.2 и 3.3. Пусть $\theta_0=(A_0, B_0, C_0, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G})$ — спектральный узел голоморфной самосопряжённой о. ф. $W_0(\lambda)$ в области Ω и $G_0\in L(\mathfrak{Z})$ — самосопряжённый оператор, осуществляющий подобие между θ_0 и θ_0^*. В [16, теорема 4.5] было показано, что при достаточно малом δ у о. ф. $W(\lambda)$ найдётся спектральный узел $\theta=(A, B, C, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G})$ в области Ω такой, что величину $\|A-A_0\|+\|B-B_0\|+\|C-C_0\|$ можно считать сколь угодно малой. В силу [15, равенство (1.3a)] сколь угодно малой будет также величина $\|G-G_0\|$, где G — самосопряжённый оператор из $L(\mathfrak{Z})$, осуществляющий подобие между спектральными узлами θ и θ^* голоморфной самосопряжённой о. ф. $W(\lambda)$ в области Ω. Так как вещественные с. з., лежащие в Ω, а также их частичные кратности и знаковые характеристики у о. ф. $W(\lambda)$ и $W_0(\lambda)$ и соответственно операторов A и A_0 совпадают, то для завершения доказательства достаточно сослаться на теоремы 2.2, 2.3 и 2.4.

§ 4. Обратная задача в случае невещественного спектра

1. Пусть F — множество всех невозрастающих финитных последовательностей целых неотрицательных чисел, кроме нулевой последовательности. Если $u=\{u_i\}_1^\infty$ и $v=\{v_i\}_1^\infty$ — последовательности из F, то будем писать $u \prec v$, если выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} v_i, \quad k=1, 2, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} v_i.$$

В [1—3] был получен следующий результат. Пусть заданы оператор $A_0 \in L(\mathfrak{Z})$ и нормальная для него область $\Omega \subset \mathbf{C}$. Существует число $\delta > 0$ такое, что соотношения

$$\{m_i(A_0, \Omega)\} \prec \{m_i(A, \Omega)\} \tag{4.1}$$

выполняются для любого оператора $A \in L(\mathfrak{Z})$, удовлетворяющего неравенству $\|A - A_0\| < \delta$.

Отметим, что это утверждение можно получить как следствие теоремы 1.2. Для этого надо лишь воспользоваться очевидными равенствами

$$\dim \mathscr{R}^k(A_0, \Omega) = \sum_{i=1}^{k} m_i(A_0, \Omega),$$

$$\dim \mathscr{R}^k(A, \Omega) = \sum_{i=1}^{k} m_i(A, \Omega), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и тем, что неравенство $\theta_0(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) < 1$ (где $\mathfrak{N}, \mathfrak{M} \subset \mathfrak{Z}$ — произвольные подпространства) влечёт за собой неравенство $\dim \mathfrak{N} < \dim \mathfrak{M}$.

В [1—3] была доказана также обратная теорема: если оператор A_0 имеет в нормальной для него области Ω единственное с. з. λ_0 (общий случай легко сводится к этому) и если заданы натуральное число p и последовательности $\{m_{ij}\}_{i=1}^{\infty} \in F$ $(j=1, \ldots, p)$ такие, что

$$\{m_i(A_0, \lambda_0)\} \prec \left\{\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\right\},$$

то в любой окрестности оператора A_0 найдётся оператор A, который имеет в Ω ровно p с. з. $\{\lambda_j\}_1^p$, причём $m_i(A, \lambda_j) = m_{ij}$.

Этот результат означает, что соотношения (4.1) являются единственными ограничениями на возможные изменения частичных кратностей линейных операторов при малых возмущениях. Следующая теорема показывает, что при $\lambda_0 \notin \mathbf{R}$ это утверждение сохраняет силу и для случая, когда как исходный оператор A_0, так и его малое возмущение A являются G-самосопряжёнными.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть Ω — нормальная область для G-самосопряжённого оператора $A_0 \in L(\mathfrak{Z})$, содержащая лишь одно его с. з. λ_0, причём $\lambda_0 \notin \mathbf{R}$. Предположим также, что заданы натуральное число p и последовательности $\{m_{ij}\}_{i=1}^{\infty} \in F$ $(j=1, \ldots, p)$ такие, что*

$$\{m_i(A_0, \lambda_0)\} \prec \left\{\sum_{j=1}^{p} m_{ij}\right\}. \tag{4.2}$$

Тогда в любой окрестности оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор $A \in L(\mathfrak{Z})$, который имеет в Ω ровно p с. з. $\{\lambda_j\}_1^p$, причём $m_i(A, \lambda_j) = m_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots; j=1, \ldots, p)$.

Доказательство. Рассмотрим самосопряжённый операторный пучок $L(\lambda) = GA_0 - \lambda G$. Из [17, теорема 7.1] вытекает, что существует операторный пучок $R(\lambda)$ с коэффициентами из $L(\mathfrak{Z})$, имеющий в Ω лишь одну точку спектра λ_0, и целая (т. е. голоморфная во всей плоскости) о. ф. $Q(\lambda)$ такие, что

$$L(\lambda)=Q(\lambda)R(\lambda)=(R(\bar{\lambda}))^*(Q(\bar{\lambda}))^*,\quad \lambda\in\mathbf{C},$$

причём оператор $Q(\lambda_0)$ обратим. Согласно [16] найдётся целая о. ф. $F(\lambda)$ такая, что оператор $F(\lambda_0)$ обратим и $(Q(\bar{\lambda}))^*=F(\lambda)R(\lambda)$ при любом $\lambda\in\mathbf{C}$. Таким образом, самосопряжённый пучок $L(\lambda)$ допускает следующую факторизацию:

$$L(\lambda)=(R(\bar{\lambda}))^*F(\lambda)R(\lambda),\quad \lambda\in\mathbf{C},\tag{4.3}$$

причём из (4.3) вытекает, что о. ф. $F(\lambda)$ является самосопряжённой, а частичные кратности, отвечающие числу λ_0, у пучков $L(\lambda)$ и $R(\lambda)$ одинаковы.

Обозначим через Ω_1 открытый круг с центром в точке $\lambda=0$ столь большого радиуса, что в него входят как область Ω, так и весь спектр оператора A_0 (или, что то же, спектр пучка $L(\lambda)$). Из результатов [1—3] и теоремы 4.3 из [16] вытекает, что существует голоморфная в Ω_1 и непрерывная в $\bar{\Omega}_1$ о. ф. $P(\lambda)$, имеющая в Ω ровно p с. з. $\{\lambda_j\}_1^p$ с частичными кратностями $m_i(P(\lambda),\lambda_j)=m_{ij}$, причём величину

$$\max_{\lambda\in\partial\Omega_1}\|P(\lambda)-R(\lambda)\|\tag{4.4}$$

можно считать сколь угодно малой. Рассмотрим голоморфную в Ω_1 самосопряжённую о. ф.

$$W(\lambda)=(P(\bar{\lambda}))^*F(\lambda)P(\lambda),\quad \lambda\in\Omega_1.$$

Очевидно, что спектр о. ф. $W(\lambda)$ в Ω состоит из p с. з. $\{\lambda_j\}_1^p$, $m_i(W(\lambda),\lambda_j)=m_{ij}$ $(i=1,2,\ldots;\ j=1,\ldots,p)$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\|W(\lambda)-L(\lambda)\|\leqslant K_1\max_{\lambda\in\partial\Omega_1}\|P(\lambda)-R(\lambda)\|,\tag{4.5}$$

где $K_1>0$ зависит только от исходной факторизации (4.3). Нетрудно проверить, что квинтет $\theta=(A_0, G^{-1}, I, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ является спектральным узлом самосопряжённого пучка $L(\lambda)$ в области Ω_1 и что подобие между спектральными узлами θ и θ^* осуществляет оператор G. В силу [16, теорема 4.5] при достаточно малой величине (4.4) у о. ф. $W(\lambda)$ найдётся спектральный узел $\theta_1=(A_1, B_1, C_1, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$, удовлетворяющий неравенству

$$\|A_1-A_0\|+\|B_1-G^{-1}\|+\|C_1-I\|\leqslant K_2\max_{\lambda\in\partial\Omega_1}\|W(\lambda)-L(\lambda)\|.\tag{4.6}$$

Отсюда согласно формуле (1.3а) из [15] вытекает, что самосопряжённый оператор $G_1\in L(\mathfrak{Z})$, осуществляющий подобие между спектральными узлами θ_1 и θ_1^* о. ф. $W(\lambda)$, удовлетворяет неравенству

$$\|G_1-G\|\leqslant K_3\max_{\lambda\in\partial\Omega_1}\|W(\lambda)-L(\lambda)\|.\tag{4.7}$$

Отметим, что положительные константы K_2 и K_3 зависят только от пучка $L(\lambda)$ и его спектрального узла θ.

Таким образом, нами построен G_1-самосопряжённый оператор $A_1\in\in L(\mathfrak{Z})$, имеющий в Ω ровно p с. з. $\{\lambda_j\}_1^p$ с частичными кратностями $m_i(A_1,\lambda_j)=m_{ij}$, причём из неравенств (4.5), (4.6) и (4.7) в силу произвольной малости величины (4.4) вытекает, что число $\|A_1-A_0\|+\|G_1-G\|$ можно считать сколь угодно малым. Для завершения доказательства надо воспользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 4.2. *Пусть задан G-самосопряжённый оператор $A_0 \in L(\mathfrak{Z})$. Для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если самосопряжённый оператор G_1 $(\in L(\mathfrak{Z}))$ и G_1-самосопряжённый оператор A_1 $(\in L(\mathfrak{Z}))$ удовлетворяют неравенству $\|A_1-A_0\|+\|G_1-G\|<\delta$, то найдётся G-самосопряжённый оператор $A \in L(\mathfrak{Z})$, обладающий свойством $\|A-A_0\|<\delta$, причём с. з. и их частичные кратности, а также знаковые характеристики вещественных с. з. у операторов A и A_1 одинаковы.*

Доказательство. Отметим вначале, что при достаточно малых δ самосопряжённые операторы G_1 и G имеют одинаковое число положительных с. з. (с учётом кратностей). Поэтому операторы G_1 и G конгруэнтны, т. е. $G=T^*G_1T$ для некоторого обратимого оператора $T \in L(\mathfrak{Z})$. В работе [18] было показано, что оператор T может быть выбран так, что

$$\|I-T\| \leqslant K_1\|G_1-G\|, \tag{4.8}$$

где число K_1 зависит только от оператора G. Нетрудно проверить, что оператор $A=T^{-1}A_1T$ является G-самосопряжённым. Кроме того, из неравенства (4.8) вытекает, что

$$\|A-A_0\| \leqslant K_2(\|A_1-A_0\|+\|G_1-G\|),$$

где число K_2 зависит только от исходных операторов A_0 и G. Легко видеть, что с. з., их кратности и частичные кратности у операторов A и A_1 совпадают. В силу [5, теорема 1.3.6] знаковые характеристики вещественных с. з. у них также одинаковы. Лемма доказана.

С помощью результатов этого параграфа легко рассмотреть случай, когда область Ω содержит несколько невещественных точек спектра оператора A_0, никакие две из них не сопряжены друг другу. Если же в Ω имеются сопряжённые точки спектра оператора A_0, то расщепление таких с. з. при возмущении будет происходить совершенно одинаковым образом.

§ 5. Обратная задача для чисел Гохберга — Касхука в случае вещественного спектра

1. Нам понадобится следующее описание знаковых характеристик вещественных собственных значений самосопряжённых матриц-функций (м. ф.) (см., например, [5, теорема 11.3.3]). Пусть задана голоморфная в $\mathbf{C}$ самосопряжённая м. ф. $W(\lambda)$ со значениями в $L(\mathfrak{Z})$. Тогда существует голоморфная м. ф. вещественного аргумента $U(\lambda)$, значения которой являются унитарными матрицами, такая, что при $\lambda \in \mathbf{R}$

$$W(\lambda)=U^*(\lambda)\operatorname{diag}(\mu_1(\lambda), \ldots, \mu_n(\lambda))U(\lambda), \tag{5.1}$$

где $n=\dim \mathfrak{Z}$, а $\mu_1(\lambda), \ldots, \mu_n(\lambda)$ являются голоморфными функциями вещественного аргумента. Через $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ обозначается соответствующая диагональная матрица. Если λ_0 — вещественное с. з. м. ф. $W(\lambda)$, то справедливы равенства $\mu_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^{m_j}\nu_j(\lambda)$, причём $m_j=$ $=m_j(W(\lambda), \lambda_0)$, а при $m_j \neq 0$

$$\operatorname{sgn} \nu_j(\lambda_0)=\varepsilon_j(W(\lambda), \lambda_0).$$

Пользуясь этим описанием знаковых характеристик для м. ф., мы можем доказать теоремы 2.3 и 2.4.

Доказательство теоремы 2.3. Рассмотрим наряду с операторами A_0, G_0, A, G самосопряжённые пучки $W_0(\lambda)=G_0A_0-\lambda G_0$ и $W(\lambda)=GA-\lambda G$. Как уже отмечалось, $\theta_0=(A_0, G_0^{-1}, I, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ и $\theta=(A, G^{-1}, I, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z})$ являются спектральными узлами м. ф. $W_0(\lambda)$ и $W(\lambda)$ в Ω, и поэтому частичные кратности и знаковые характеристики, отвечающие числу λ_0 (соответственно λ_1), у оператора A_0 и м. ф. $W_0(\lambda)$ (соответственно у оператора A и м. ф. $W(\lambda)$) совпадают. Из формулы (5.1) вытекает, что при переходе от м. ф. $W_0(\lambda)$ и $W(\lambda)$ к м. ф. $(\lambda-\lambda_0)W_0(\lambda)$ и $(\lambda-\lambda_1)W(\lambda)$ соответственно первые n $(=\dim \mathfrak{Z})$ частичных кратностей с. з. λ_0 и λ_1 увеличиваются на единицу, а знаковые характеристики не меняются. Из этих соображений и из условия (3.5), записанного для м. ф. $(\lambda-\lambda_1)W(\lambda)$ и $(\lambda-\lambda_0)W_0(\lambda)$, и вытекают неравенства (2.6). Теорема доказана.

Теорема 2.4 доказывается аналогично.

2. Теоремы 2.3 и 2.4 показывают, что в случае $\lambda_0\in\mathbf{R}$ теорема 4.1 перестаёт быть справедливой, т. е. возникают дополнительные ограничения (помимо соотношений (4.2)) на область возможных значений частичных кратностей возмущённого оператора. Тем не менее, для чисел Гохберга — Касхука и в этом случае никаких ограничений, кроме (4.1), не возникает. Это показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть Ω — нормальная область для G-самосопряжённого оператора $A_0\in L(\mathfrak{Z})$, содержащая лишь одно его с. з. λ_0, причём $\lambda_0\in\mathbf{R}$, и задана последовательность $\{m_i'\}_1^\infty$ из F такая, что $\{m_i(A_0,\lambda_0)\}\prec\prec\{m_i'\}$. Тогда в любой окрестности оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор $A\in L(\mathfrak{Z})$ такой, что $\sigma(A)\cap\Omega\subset\mathbf{R}$ и $m_i(A, \Omega)=m_i'$.*

Доказательство. Рассмотрим самосопряжённый матричный пучок

$$W_0(\lambda)=\operatorname{diag}(\varepsilon_i(\lambda-\lambda_0)^{m_i})_{i=1}^r,$$

где $r=\dim \operatorname{Ker}(A_0-\lambda_0 I)$, $\varepsilon_i=\varepsilon_i(A_0, G, \lambda_0)$, $m_i=m_i(A_0, \lambda_0)$, и зафиксируем некоторый открытый круг Ω с центром в точке λ_0. С помощью m_1' шагов построим самосопряжённый матричный пучок $W_{m_1'}(\lambda)$ такой, что $m_i(W_{m_1'}(\lambda), \Omega)=m_i'$, причём коэффициенты $W_{m_1'}(\lambda)$ можно будет считать сколь угодно близкими к соответствующим коэффициентам пучка $W_0(\lambda)$.

Обозначим через s_1 максимальное из чисел i, для которых справедливо неравенство $m_i'\geqslant 1$. Пусть целые числа $k\geqslant 0$ и $l>0$ таковы, что $m_i=m_{s_1}$ тогда и только тогда, когда $k<i\leqslant k+l$. Обозначим через M множество, состоящее из натуральных чисел $1, \ldots, k$ (при условии $k\geqslant 1$) и $(k+l)+(s_1-k)+1, \ldots, k+l$. Рассмотрим матричные пучки

$$V_1(\lambda)=\operatorname{diag}(v_i(\lambda))_1^r,\quad U_1(\lambda)=\operatorname{diag}(u_i(\lambda))_1^r,$$

где $v_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)$, $u_i(\lambda)=\varepsilon_i(\lambda-\lambda_0)^{m_i-1}$ при $i\in M$, и $v_i(\lambda)=1$, $u_i(\lambda)=\varepsilon_i(\lambda-\lambda_0)^{m_i}$ при всех остальных i. Нетрудно убедиться, что коэффициенты самосопряжённого пучка $W_1(\lambda)=V_1(\lambda)U_1(\lambda)$ можно сделать сколь угодно близкими к соответствующим коэффициентам пучка $W_0(\lambda)$, если вещественное число λ_1 выбирается достаточно близким к числу λ_0. Очевидно также, что $m_i(U_1(\lambda), \lambda_0)=m_i(W_0(\lambda), \lambda_0)-1$ при $i\in M$ и

$m_i(U_1(\lambda), \lambda_0) = m_i(W_0(\lambda), \lambda_0)$ при $i \notin M$. Из этих соотношений вытекает, что $\{m_i(U_1(\lambda), \lambda_0)\} \prec \{m_i''\}$, где $m_i'' = m_i' - 1$ при $i = 1, \ldots, s_1$ и $m_i'' = m_i' (=0)$ при всех остальных i.

На втором шаге поступаем с матричным пучком $U_1(\lambda)$ и последовательностью $\{m_i''\}_1^\infty$ точно так же, как с пучком $W_0(\lambda)$ и последовательностью $\{m_i'\}_1^\infty$ на первом шаге. В результате получим число s_2, последовательность $\{m_i'''\}_1^\infty$ и пучки $V_2(\lambda)$ и $U_2(\lambda)$. Продолжая этот процесс, после m_1'-го шага получим пучок $U_{m_1'}(\lambda)$, который уже не зависит от λ: $U_{m_1'}(\lambda) = \operatorname{diag}(\varepsilon_i)_1^r$. Что же касается пучка $V_i(\lambda)$, то он имеет дигональный вид, причём s_i его диагональных элементов равны $(\lambda - \lambda_i)$, а остальные равны единице $(i = 1, \ldots, m_1')$. Выбирая вещественные числа λ_i $(i = 1, \ldots, m_1')$ достаточно близкими к числу λ_0, мы можем считать, что коэффициенты самосопряжённого пучка $W_{m_1'}(\lambda) = V_1(\lambda) \ldots V_{m_1'}(\lambda)$ сколь угодно близки к соответствующим коэффициентам пучка $W_0(\lambda)$. Если все числа λ_i $(i = 1, \ldots, m_1')$ попарно различны, то из соотношений $s_i = \max\{j\colon m_j' \geqslant i\}$ нетрудно получить, что $m_i(W_{m_1'}(\lambda), \Omega) = m_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Для завершения доказательства остаётся воспользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 5.2. *Пусть A_0 $(\in L(\mathfrak{Z}))$ — G-самосопряжённый оператор, область Ω нормальна для него и в Ω лежит единственное с. з. λ_0 оператора A_0, причём $\lambda_0 \in \mathbf{R}$. Положим $W_0(\lambda) = \operatorname{diag}(\varepsilon_i (\lambda - \lambda_0)^{m_i})_{i=1}^r$, где $r = \dim \operatorname{Ker}(A_0 - \lambda_0 I)$, $m_i = m_i(A_0, \lambda_0)$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i(A_0, G, \lambda_0)$. Пусть числа m_i' $(i = 1, 2, \ldots)$, ε_i' $(i = 1, \ldots, r')$ таковы, что для любого $\delta > 0$ можно указать самосопряжённый матричный пучок $W(\lambda)$, обладающий свойствами*

1) $\|W(\lambda) - W_0(\lambda)\| < \delta$ $(\lambda \in \partial\Omega)$;

2) *λ_0 является единственным с. з. пучка $W(\lambda)$ в Ω;*

3) $m_i(W(\lambda), \lambda_0) = m_i'$, $\varepsilon_i(W(\lambda), \lambda_0) = \varepsilon_i'$.

Тогда в любой окрестности оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор $A \in L(\mathfrak{Z})$ такой, что λ_0 является единственным с. з. оператора A в Ω, причём $m_i(A, \lambda_0) = m_i'$, $\varepsilon_i(A, G, \lambda_0) = \varepsilon_i'$.

Доказательство. Положим $\tilde{A}_0 = A_0 | \mathcal{R}(A_0, \lambda_0)$, $\tilde{G}_0 = PG | \mathcal{R}(A_0, \lambda_0)$, где P — ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{R}(A_0, \lambda_0)$. Пусть $\theta = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \mathcal{R}(A_0, \lambda_0), \mathfrak{G})$ — какой-нибудь спектральный узел пучка $W_0(\lambda)$ в Ω и $\tilde{G} \in L(\mathcal{R}(A_0, \lambda_0))$ — самосопряжённый оператор, осуществляющий подобие между θ и θ^*. В силу [5, теорема 1.3.6] из равенств $m_i(\tilde{A}_0, \lambda_0) = m_i(\tilde{A}, \lambda_0)$, $\varepsilon_i(\tilde{A}_0, \tilde{G}_0, \lambda_0) = \varepsilon_i(\tilde{A}, \tilde{G}, \lambda_0)$ вытекает, что найдётся обратимый оператор $T \in L(\mathcal{R}(A_0, \lambda_0))$ такой, что $\tilde{A}_0 = T^{-1} \tilde{A} T$, $\tilde{G}_0 = T^* \tilde{G} T$. Положим $\tilde{B}_0 = T^{-1} \tilde{B}$, $\tilde{C}_0 = \tilde{C} T$. Легко видеть, что квинтет $\theta_0 = (\tilde{A}_0, \tilde{B}_0, \tilde{C}_0, \mathcal{R}(A_0, \lambda_0), \mathfrak{G})$ является спектральным узлом самосопряжённого пучка $W_0(\lambda)$ в области Ω, причём подобие между θ_0 и θ_0^* осуществляет самосопряжённый оператор $\tilde{G}_0$. Дальнейшие рассуждения приводятся вкратце, поскольку они аналогичны изложенным в доказательстве теоремы 4.1. У пучка $W(\lambda)$ найдётся спектральный узел $\theta_1 = (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1, \mathcal{R}(A_0, \lambda_0), \mathfrak{G})$ такой, что выполняются неравенства

$$\|\tilde{A}_1 - \tilde{A}_0\| + \|\tilde{B}_1 - \tilde{B}_0\| + \|\tilde{C}_1 - \tilde{C}_0\| \leqslant K_1 \max_{\lambda \in \partial\Omega} \|W(\lambda) - W_0(\lambda)\|,$$

$$\|\tilde{G}_1 - \tilde{G}_0\| \leqslant K_2 \max_{\lambda \in \partial\Omega} \|W(\lambda) - W_0(\lambda)\|,$$

где $\tilde{G}_1$ — самосопряжённый оператор, осуществляющий подобие между θ_1 и θ_1^*, а положительные константы K_1 и K_2 зависят только от пучка

$W_0(\lambda)$ и узла θ_0 [16, теорема 4.3]. Отсюда и из условия 1) вытекает, что величину $\|\tilde{A}_1-\tilde{A}_0\|+\|\tilde{G}_1-\tilde{G}_0\|$ можно считать сколь угодно малой. Поэтому в силу леммы 4.2 в любой окрестности оператора $\tilde{A}_0$ найдётся $\tilde{G}_0$-самосопряжённый оператор $\tilde{A}_2\in L(\mathcal{R}(A_0, \lambda_0))$ такой, что $m_i(\tilde{A}_2, \lambda_0)=m_i'$, $\varepsilon_i(\tilde{A}_2, \tilde{G}_0, \lambda_0)=\varepsilon_i'$. Легко видеть, что оператор A, действующий в подпространстве $\mathcal{R}(A_0, \lambda_0)$ как оператор $\tilde{A}_2$, а в подпространстве $\mathcal{R}(A_0, \mathbf{C}\setminus\lambda_0)$ как оператор A_0, обладает всеми требуемыми свойствами. Лемма 5.2, а вместе с ней и теорема 5.1 доказаны.

§ 6. Обратная задача в случае единственного вещественного собственного значения

1. В этом параграфе будет рассмотрен случай, когда как исходный G-самосопряжённый оператор $A_0\in L(\mathfrak{Z})$, так и близкий к нему G-самосопряжённый оператор A имеют в области Ω лишь одно с. з., которое является вещественным.

Рассмотрим вначале модельные примеры возмущений для пучка матриц второго порядка

$$W_0(\lambda)=\operatorname{diag}(\varepsilon_i(\lambda-\lambda_0)^{m_i})_1^2,$$

где $\varepsilon_i=\pm 1$, $m_i\in\mathbf{N}$, $m_1\geqslant m_2$, $\lambda_0\in\mathbf{R}$. Очевидно (см. (5.1)), что $\varepsilon_i(W_0(\lambda), \lambda_0)=\varepsilon_i$, $m_i(W_0(\lambda), \lambda_0)=m_i$. Разберём различные ситуации, которые могут возникать при возмущении пучка $W_0(\lambda)$.

Пример 6.1. Если число m_1+m_2 является нечётным, то рассмотрим самосопряжённый матричный пучок

$$W(\lambda)=W_0(\lambda)+\begin{pmatrix}0 & \delta(\lambda-\lambda_0)^s\\ \delta(\lambda-\lambda_0)^s & \delta^2\varepsilon_1(\lambda-\lambda_0)^{m_2-1}\end{pmatrix},$$

где $s=(m_1+m_2-1)/2$ и $\delta\in\mathbf{R}$. Нетрудно убедиться, что спектр пучка $W(\lambda)$ состоит из одной точки λ_0. Найдём частичные кратности и знаковые характеристики, отвечающие с. з. λ_0 пучка $W(\lambda)$. Из канонической формы Смита для м. ф. $W(\lambda)$ (см., например, [10, с. 143—144]) следует, что $m_2(W(\lambda), \lambda_0)$ совпадает с кратностью корня λ_0 наибольшего общего делителя всех элементов матрицы $W(\lambda)$, т. е. $m_2(W(\lambda), \lambda_0)=m_2-1$. Так как кратность с. з. λ_0 равна m_1+m_2, то $m_1(W(\lambda), \lambda_0)=m_1+1$. Если число $\delta>0$ достаточно мало, то по теореме 3.1 $\alpha_2(W(\lambda), \lambda_0)=\alpha_2(W_0(\lambda), \lambda_0)$, и поэтому цепочке нечётной длины пучка $W(\lambda)$ отвечает тот же знак, что и цепочке нечётной длины пучка $W_0(\lambda)$. Из теоремы 3.2 вытекает такое же утверждение для цепочек чётной длины. Следовательно, при достаточно малых $\delta>0$ справедливы равенства $\varepsilon_1(W(\lambda), \lambda_0)=\varepsilon_2$, $\varepsilon_2(W(\lambda), \lambda_0)=\varepsilon_1$ (если $m_2-1\neq 0$).

Пример 6.2. Если число m_1+m_2 чётно, $m_2\geqslant 2$ и $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, то положим

$$W(\lambda)=W_0(\lambda)+\begin{pmatrix}0 & \delta(\lambda-\lambda_0)^s\\ \delta(\lambda-\lambda_0)^s & \delta^2\varepsilon_1(\lambda-\lambda_0)^{m_2-2}\end{pmatrix},$$

где $s=(m_1+m_2-2)/2$, $\delta\in\mathbf{R}$. Аналогично примеру 6.1, можно убедиться в том, что спектр пучка $W(\lambda)$ состоит из одной точки λ_0, причём $m_1(W(\lambda), \lambda_0)=m_1+2$, $m_2(W(\lambda), \lambda_0)=m_2-2$, а при достаточно малых $\delta>0$, кроме того, $\varepsilon_1(W(\lambda), \lambda_0)=\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2(W(\lambda), \lambda_0)=\varepsilon_2$ (если $m_2>2$).

Пример 6.3. Если число m_1+m_2 является чётным, но $\varepsilon_1=-\varepsilon_2$, то положим

$$W(\lambda)=W_0(\lambda)+\delta\begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_0)^{m_1-1} & (\lambda-\lambda_0)^s\\ (\lambda-\lambda_0)^s & (\lambda-\lambda_0)^{m_2-1}\end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

где $s=(m_1+m_2-2)/2$, $\delta\in\mathbf{R}$. Точно так же, как и в предыдущих примерах, проверяется, что число λ_0 является единственным с. з. самосопряжённого пучка $W(\lambda)$ и что $m_1(W(\lambda),\lambda_0)=m_1+1$, $m_2(W(\lambda),\lambda_0)=m_2-1$. Для того чтобы найти знаковые характеристики $W(\lambda)$, вычислим диагональные элементы центрального сомножителя правой части формулы (5.1), если пучок $W(\lambda)$, стоящий в левой части этой формулы, имеет вид (6.1). Легко видеть, что эти голоморфные функции вещественного аргумента $\mu_1(\lambda)$ и $\mu_2(\lambda)$ являются корнями уравнения $\det(\mu(\lambda)I-W(\lambda))=0$. Выписав эти корни в явном виде, нетрудно убедиться в том, что $\nu_2(\lambda)=\mu_2(\lambda)/(\lambda-\lambda_0)^{m_2-1}$ имеет в точке λ_0 тот же знак $\varepsilon_2(W(\lambda),\lambda_0)$, что и число $\delta\in\mathbf{R}$. Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает, что $\varepsilon_1(W(\lambda),\lambda_0)=-\operatorname{sgn}\delta$, $\varepsilon_2(W(\lambda),\lambda_0)=\operatorname{sgn}\delta$ при достаточно малых $|\delta|\neq0$.

2. ЛЕММА 6.4. *Пусть λ_0 ($\in\mathbf{R}$) — единственное с. з. G-самосопряжённого оператора $A_0\in L(\mathfrak{Z})$, лежащее в нормальной для него области Ω, и заданы натуральные числа s и t ($s<t\leqslant\dim\operatorname{Ker}(A_0-\lambda_0I)$). В любой окрестности оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор A, имеющий в Ω лишь одно с. з. λ_0, и такой, что $m_i(A,\lambda_0)=m_i(A_0,\lambda_0)$, $\varepsilon_i(A,G,\lambda_0)=\varepsilon_i(A_0,G,\lambda_0)$ при $i\neq s$, t, а при $i=s$, t эти величины принимают следующие значения:*

а) *если число $m_s(A_0,\lambda_0)+m_t(A_0,\lambda_0)$ является нечётным, то $m_s(A,\lambda_0)=m_s(A_0,\lambda_0)+1$, $m_t(A,\lambda_0)=m_t(A_0,\lambda_0)-1$, $\varepsilon_s(A,G,\lambda_0)=\varepsilon_t(A_0,G,\lambda_0)$, $\varepsilon_t(A,G,\lambda_0)=\varepsilon_s(A_0,G,\lambda_0)$;*

б) *если число $m_s(A_0,\lambda_0)+m_t(A_0,\lambda_0)$ является чётным и $\varepsilon_s(A_0,G,\lambda_0)=\varepsilon_t(A_0,G,\lambda_0)$, то $m_s(A,\lambda_0)=m_s(A_0,\lambda_0)+2$, $m_t(A,\lambda_0)=m_t(A_0,\lambda_0)-2$, $\varepsilon_s(A,G,\lambda_0)=\varepsilon_t(A,G,\lambda_0)=\varepsilon_s(A_0,G,\lambda_0)$;*

в) *если же число $m_s(A_0,G,\lambda_0)+m_t(A_0,G,\lambda_0)$ является чётным, но $\varepsilon_s(A_0,G,\lambda_0)=-\varepsilon_t(A_0,G,\lambda_0)$, то $m_s(A,\lambda_0)=m_s(A_0,\lambda_0)+1$, $m_t(A,\lambda_0)=m_t(A_0,\lambda_0)-1$, $\varepsilon_s(A,G,\lambda_0)=-\varepsilon_t(A,G,\lambda_0)$.*

Доказательство. Достаточно установить лемму для сужения оператора A_0 на линейную оболочку всех векторов s-ой и t-ой цепочек из какого-нибудь G-нормального базиса в $\mathcal{R}(A_0,\lambda_0)$. Для этого надо воспользоваться одним из примеров 6.1—6.3 и сослаться на лемму 5.2.

Покажем, что теоремы 2.2 и 2.3 дают полное описание области изменения частичных кратностей и знаковых характеристик в том частном случае, когда эти величины изменились не более чем для двух цепочек (и не произошло расщепления исходного с. з.).

ТЕОРЕМА 6.5. *Пусть A ($\in L(\mathfrak{Z})$) — G-самосопряжённый оператор, который имеет в нормальной для него области Ω единственное с. з. λ_0 ($\in\mathbf{R}$). Пусть заданы последовательность $\{m_i'\}\in F$ и набор $\{\varepsilon_i'\}_1^{r'}$, где $\varepsilon_i'=\pm1$, $r'=\max\{j:\ m_j'\neq0\}$. Обозначим через α_k' (соответственно β_k') сумму чисел ε_i', которым отвечают нечётные (соответственно чётные) числа среди m_i' ($i=1,\ldots,k$). Предположим, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty}m_i'=\sum_{i=1}^{\infty}m_i(A_0,\lambda_0)$$

и $m_i'=m_i(A_0, \lambda_0)$, $\varepsilon_i'=\varepsilon_i(A_0, G, \lambda_0)$ *для всех номеров* i *за исключением номеров* s *и* t. *Для того чтобы в любой окрестности оператора* A_0 *существовал* G*-самосопряжённый оператор* A *такой, что* $\sigma(A)\cap\Omega=\{\lambda_0\}$ *и* $m_i(A, \lambda_0)=m_i'$, $\varepsilon_i(A, G, \lambda_0)=\varepsilon_i'$, *необходимо и достаточно, чтобы при* $k=s, t$ *выполнялись неравенства*

$$|\alpha_k' - \alpha_k(A_0, G, \lambda_0)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} (m_i' - m_i(A_0, \lambda_0)),$$

$$|\beta_k' - \beta_k(A_0, G, \lambda_0)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} (m_i' - m_i(A_0, \lambda_0)) + C_k,$$

где $C_k=\max\{0, k-r'\}$.

Доказательство. Легко видеть, что с помощью последовательного применения возмущений, указанных в лемме 6.4, можно построить G-самосопряжённый оператор $A\in L(\mathfrak{Z})$ такой, что весь спектр оператора A в Ω состоит из одной точки λ_0 и $m_i(A, \lambda_0)=m_i'$ $(i=1, 2, \ldots)$. Поясним, что в случае, когда $m_s(A_0, \lambda_0)+m_t(A_0, \lambda_0)$ нечётно, надо $m_s'-m_s(A_0, \lambda_0)$ раз применить возмущение типа а); в случае, когда $m_s(A_0, \lambda_0)+m_t(A_0, \lambda_0)$ чётно и $\varepsilon_s(A_0, G, \lambda_0)=\varepsilon_t(A_0, G, \lambda_0)$, надо $(m_s'-m_s(A_0, \lambda_0))/2$ раз воспользоваться возмущением, указанным в п. б); и в случае, когда $m_s(A_0, \lambda_0)+m_t(A_0, \lambda_0)$ чётно, но $\varepsilon_s(A_0, G, \lambda_0)=$ $=-\varepsilon_t(A_0, G, \lambda_0)$, надо $m_s'-m_s(A_0, \lambda_0)$ раз применить возмущение типа в). Величину $\|A-A_0\|$ при этом можно считать сколь угодно малой. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Обозначим через* γ_k *(соответственно* γ_k'*) количество нечётных чисел среди* $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_1^k$ *(соответственно* $\{m'_i\}_1^k$*). Если*

$$|\gamma_k' - \gamma_k| \leqslant \sum_{i=1}^{k} (m_i' - m_i(A_0, \lambda_0)), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.2}$$

то в любой окрестности оператора A_0 *найдётся* G*-самосопряжённый оператор* A*, имеющий в* Ω *единственное с. з.* λ_0*, причём* $m_i(A, \lambda_0)=m_i'$ $(i=1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Так как количество последовательностей $\{m_i''\}$ из F, для которых $\{m_i''\}\prec\{m_i'\}$, конечно, то достаточно доказать, что в любой окрестности оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор $A_1\in L(\mathfrak{Z})$, имеющий в Ω лишь одно с. з. λ_0, причём последовательность $\{m_i(A_1, \lambda_0)\}_1^\infty$ не совпадает с последовательностью $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_1^\infty$ и выполнены условия

$$\{m_i(A_0, \lambda_0)\} \prec \{m_i(A_1, \lambda_0)\} \prec \{m_i'\}, \tag{6.3}$$

$$|\gamma_k' - \gamma_k''| \leqslant \sum_{i=1}^{k} (m_i' - m_i(A_1, \lambda_0)), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{6.4}$$

где γ_k'' — количество нечётных чисел среди $\{m_i(A_1, \lambda_0)\}_1^k$.

Соотношения (6.3) и (6.4) позволяют сделать следующий шаг в процессе, который должен оборваться через конечное число шагов.

Перейдём к доказательству сформулированного утверждения. Пусть s — наименьший из индексов j, для которых $m_j(A_0, \lambda_0)<m_j'$, t — наименьший из последующих индексов j, для которых

$$\sum_{i=1}^{j} m_i(A_0, \lambda_0) = \sum_{i=1}^{j} m_i'.$$

Доказательство существования оператора A_1 проведём отдельно для каждого из следующих четырёх вариантов возможных значений чисел $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_{i=s}^{t}$.

1°. Пусть среди чисел $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_{i=s}^{t}$ нет ни одного чётного. Из неравенства (6.2) при $k=t$ вытекает, что $\gamma_t'=\gamma_t$ и, следовательно, все числа $\{m_i'\}_s^t$ являются нечётными. Отсюда следует, что при $k=s, \ldots, t$ левые части неравенств (6.2) равны нулю, а правые не меньше двух. Согласно лемме 6.4 в любой окрестности оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор A_1, имеющий в Ω лишь одно с. з. λ_0 и такой, что у операторов A_1 и A_0 отличаются только частичные кратности с номерами s и t, причём

$$m_s(A_1, \lambda_0)=m_s(A_0, \lambda_0)+2, \quad m_t(A_1, \lambda_0)=m_t(A_0, \lambda_0)-2. \tag{6.5}$$

Для того чтобы показать это, необходимо воспользоваться преобразованием типа б) из леммы 6.4, если $\varepsilon_s(A_0, G, \lambda_0)=\varepsilon_t(A_0, G, \lambda_0)$, либо два раза применить преобразование типа в), если $\varepsilon_s(A_0, G, \lambda_0)=$ $=-\varepsilon_t(A_0, G, \lambda_0)$. Из соотношений (6.5) и из неравенств (6.2) и вытекают неравенства (6.4). Соотношения (6.3) очевидны.

2°. В случае, когда все числа $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_{i=s}^{t}$ являются чётными, построение оператора A_1 и доказательство соотношений (6.3) и (6.4) проводится аналогично.

3°. Предположим теперь, что число $m_s(A_0, \lambda_0)$ является нечётным, но среди чисел $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_{i=s}^{t}$ есть и чётные. Обозначим через q наибольший из номеров j, для которых все числа $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_{i=1}^{j}$ являются нечётными. Положим $p=\min\{j: m_j(A_0, \lambda_0)=m_q(A_0, \lambda_0)\}$, $r=\max\{j: m_j(A_0, \lambda_0)=$ $=m_{q+1}(A_0, \lambda_0)\}$. Отметим, что $r\leqslant t$, так как $m_t'<m_t(A_0, \lambda_0)$ и $m_{t+1}'\geqslant$ $\geqslant m_{t+1}(A_0, \lambda_0)$. В соответствии с п. а) леммы 6.4 в любой окрестности оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор A_1 такой, что $m_p(A_1, \lambda_0)=m_p(A_0, \lambda_0)+1$, $m_r(A_1, \lambda_0)=m_r(A_0, \lambda_0)-1$ и $m_i(A_1, \lambda_0)=$ $=m_i(A_0, \lambda_0)$ при всех i, отличных от p и r. Соотношения (6.3) очевидны, а неравенства (6.4) достаточно доказать только при $k=p, \ldots, r-1$, так как для остальных номеров k они просто совпадают с соответствующими неравенствами (6.2). Пусть $k\in[p, q]$. Легко видеть, что при переходе от k-го неравенства (6.2) к k-му неравенству (6.4) выражение, стоящее в правой части, уменьшилось на единицу, а выражение, стоящее в левой части, либо также уменьшилось на единицу (и тогда неравенство (6.4) очевидно), либо увеличилось на единицу. В последнем случае, как легко видеть, $\gamma_k'=\gamma_k$, и поэтому в k-ом из неравенств (6.2) правая часть не меньше двух, а левая равна нулю. Отсюда также вытекает неравенство (6.4) с номером k. Таким образом, осталось установить (6.4) при $k\in[q+1, r-1]$ (если $q+1\leqslant r-1$). Рассмотрим для таких k следующие варианты возможных значений чисел $m_k(A_0, \lambda_0)$ и m_k'.

а) Если $m_k(A_0, \lambda_0)=m_k'$, то k-е неравенство (6.4) просто совпадает с предыдущим.

б) Если $m_k(A_0, \lambda_0)<m_k'$, то нетрудно проверить, что при переходе в (6.4) от $(k-1)$-го неравенства к k-му неравенству, правая часть увеличивается на единицу, а левая изменяется не более чем на единицу. Таким образом, вопрос о справедливости k-го неравенства (6.4) сводится в этом случае к вопросу о справедливости предыдущего неравенства. Так как неравенство (6.4) с номером q уже доказано, то отсюда выте-

кает, что выполняются все неравенства (6.4) с номерами $k \in [q+1, r-1]$, при которых $m_k(A_0, \lambda_0) < m_k'$.

в) Если $m_k(A_0, \lambda_0) > m_k'$, то с помощью рассуждений, аналогичных проведённым в предыдущем пункте, сводим вопрос о справедливости неравенства (6.4) с номером k к вопросу о справедливости этого же неравенства с номером $k+1$. Так как неравенство (6.4) с номером r имеет место (оно просто совпадает с r-ым неравенством (6.2)), то выполняются неравенства (6.4) для всех номеров $k \in [q+1, r-1]$ таких, что $m_k(A_0, \lambda_0) > m_k'$.

4°. Наконец, если $m_s(A_0, \lambda_0)$ чётно и среди чисел $\{m_i(A_0, \lambda_0)\}_{i=s}^t$ имеются числа различных чётностей, то доказательство совершенно аналогично проведённому в п. 3°. Теорема доказана.

4. В некоторых случаях теоремы 2.2, 2.3 и 6.6 позволяют получить полное описание возможной области изменения частичных кратностей возмущённого G-самосопряжённого оператора.

ТЕОРЕМА 6.7. *Пусть Ω — нормальная область для G-самосопряжённого оператора $A_0 \in L(\mathfrak{Z})$, содержащая лишь одно его с. з. λ_0, и $\lambda_0 \in \mathbf{R}$. Предположим также, что оператор A_0 удовлетворяет знаковому условию в точке λ_0. Для последовательности $\{m_i'\} \in F$ следующие условия эквивалентны:*

1°. *В любой окрестности оператора A_0 найдётся G-самосопряжённый оператор A, который имеет в Ω лишь одно с. з. λ_0, причём $m_i(A, \lambda_0) = m_i'$ $(i=1, 2, \ldots)$.*

2°. *Справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_i(A_0, \lambda_0) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i' \tag{6.6}$$

и неравенства (6.2).

Доказательство. Если выполнено условие 2°, то справедливость утверждения 1° вытекает из теоремы 6.6 и соотношения $\{m_i(A_0, \lambda_0)\} \prec \{m_i'\}$, которое следует из 2°.

Пусть выполнено условие 1°. В силу теоремы 2.5 неравенства (6.2) совпадают с неравенствами (2.2), которые при этом условии установлены в теореме 2.2. Необходимость (6.6) хорошо известна (устойчивость кратности). Теорема доказана.

5. Все результаты § 4—6 переносятся на малые на $\partial\Omega$ голоморфные самосопряжённые возмущения голоморфных самосопряжённых о. ф. Поясним это вкратце. Пусть Ω — нормальная область для голоморфной самосопряжённой о. ф. $W_0(\lambda)$ со значениями в $L(\mathfrak{G})$ и $\theta_0 = (A_0, B_0, C_0, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G})$ — спектральный узел о. ф. $W_0(\lambda)$ в Ω. Пусть G — самосопряжённый оператор, осуществляющий подобие между спектральными узлами θ_0 и θ_0^* о. ф. $W_0(\lambda)$ в Ω. Как уже отмечалось, из нормальности Ω вытекает, что пространство $\mathfrak{Z}$ является конечномерным, а оператор A_0 — G-самосопряжённым. Из [16, теорема 4.3] следует, что существуют положительные числа δ и K, обладающие следующим свойством: если оператор $A \in L(\mathfrak{Z})$ удовлетворяет условию $\|A - A_0\| < \delta$, то квинтет $\theta = (A, B_0, C_0, \mathfrak{Z}, \mathfrak{G})$ является спектральным узлом в Ω для некоторой голоморфной о. ф. $W(\lambda)$ и справедливо неравенство

$$\|W(\lambda) - W_0(\lambda)\| \leqslant K\|A - A_0\|, \quad \lambda \in \partial\Omega.$$

Из доказательства теоремы 4.3 работы [16] видно, что о. ф. $W(\lambda)$ можно считать самосопряжённой, если оператор A также является G-самосопряжённым.

Список литературы

1. *Gohberg I., Kaashoek M. A.* Unsolved problems in matrix and operator theory. 1. Partial multiplicities and additive perturbations//Integr. Equat. and Oper Theory. 1978. V. 1. P. 278—283.
2. *Маркус А. С., Парилис Е. Э.* Об изменении жордановой структуры матрицы при малых возмущениях//Линейные операторы. Кишинёв, 1980. С. 98—109.
3. *den Boer H., Thijsse G. Ph. A.* Semi-stability of sums of partial multiplicities under additve perturbation//Integr. Equat. and Oper. Theory. 1980. V. 3. P. 23—42.
4. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.
5. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrices and indefinite scalar products. Basel etc.: Birkhäuser Verlag, 1983.
6. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов//УМН. 1971. Т. 26, вып. 4. С. 15—41.
7. *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи//Функцион. анализ и его прилож. 1983. Т. 17, вып. 2. С. 38—61.
8. *Ran A. C. M., Rodman L.* Stability of invariant maximal semidefinite subspaces. I// Linear Algebra Appl. 1984. V. 62. P. 51—86.
9. *Ольшевский В. Р.* Об изменении жордановой структуры G-самосопряженных операторов и самосопряженных оператор-функций при малых возмущениях//Функцион. анализ и его прилож. 1988. Т. 22, вып. 3.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
11. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
12. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969.
13. *Ran A. C. M., Rodman L.* Stability of invariant maximal semidefinite subspaces. II. Applications: selfadjoint rational matrix functions, algebraic Riccatti equations//Linear Algebra Appl. 1984. V. 63. P. 51—86.
14. *Маркус А. С.* О голоморфных оператор-функциях//ДАН СССР. 1958. Т. 119, вып. 6. С. 1099—1102.
15. *Kaashoek M. A., van der Mee C. V. M., Rodman L.* Analytic operator functions with compact spectrum. I. Spectral nodes, linearization and equivalence//Integr. Equat. and Oper. Theory. 1981. V. 4. P. 504—547.
16. *Kaashoek M. A., van der Mee C. V. M., Rodman L.* Analytic operator functions with compact spectrum. II. Spectral pairs and factorization//Integr. Equat. and Oper. Theory. 1982. V. 5. P. 791—829.
17. *Kaashoek M. A., van der Mee C. V. M., Rodman L.* Analytic operator functions with compact spectrum. III. Hilbert space case: Inverse problem and applications//J. of Oper. Theory. 1983. V. 10. P. 219—250.
18. *Pierce S., Rodman L.* Congruences and norms of hermitian matrices//Canadian J. of Math. 1987. V. XXXIX, № 6. P. 1446—1458.

Поступила в редакцию
13.X.1988