Ю. В. Матиясевич, Вычисление обобщенных многочленов Чебышева на компьютере, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, номер 6, 59–61

3. Diaconis P. Group representations in probability and statistics//IMS Lectures Series. Institute of Mathematical Statistics. Hayward, California. 1988. **11.**
4. Малышев В. А., Меньшиков М. В. Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова//Тр. Моск. матем. о-ва. 1979. **39.** 3—48.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 6

УДК 517.58+519.1+519.65

Ю. В. Матиясевич

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА НА КОМПЬЮТЕРЕ

Определение. Многочлен P с комплексными коэффициентами от одной переменной называется *обобщенным многочленом Чебышева*, если существуют комплексные числа A и B (*критические значения* этого многочлена), такие, что

$$P'(z)=0 \Rightarrow P(z)=A \vee P(z)=B.$$

Обобщенные многочлены Чебышева были введены в работе Г. Б. Шабата и И. А. Воеводского [1] и известны в литературе также под названием *полиномов Шабата*. Ознакомиться с основами теории этих полиномов можно, в частности, в обзорной статье [2]; в данной краткой публикации будут упомянуты лишь немногие необходимые факты.

Определение. Многочлены P_1 и P_2 *родственны*, если $P_2(z)=QP_1(qz+r)+R$ для некоторых Q, R, q, r, таких, что $Qq\neq 0$.

Теорема 1. *Если P_1 и P_2 — родственные многочлены и P_1 — обобщенный многочлен Чебышева, то P_2 также является обобщенным многочленом Чебышева.*

Благодаря этому утверждению любой обобщенный многочлен Чебышева можно нормировать, получая многочлен с фиксированными критическими значениями; для определенности в дальнейшем мы положим $A=-1$, $B=1$.

Классические многочлены возникли при решении задачи о функции, наименее уклоняющейся от нуля. Обобщенные многочлены представляют интерес в силу их неожиданной связи с теорией графов и алгеброй.

Теорема 2. *Если P — обобщенный многочлен Чебышева степени n, то прообраз $P^{-1}([-1, 1])$ является на (комплексной) плоскости деревом с $n+1$ вершинами (в точках $P^{-1}(\{-1, 1\})$).*

Любое изображение дерева на плоскости вводит на нем дополнительную структуру — циклический порядок на ребрах, инцидентных одной и той же вершине. Под *плоским деревом* мы будем понимать дерево, оснащенное таким порядком.

Теорема 3. *Каждое плоское дерево изображается некоторым обобщенным многочленом Чебышева.*

Очевидно, что родственные обобщенные многочлены Чебышева изображают одно и то же плоское дерево.

Теорема 4. *Если два обобщенных многочлена Чебышева изображают одно и то же плоское дерево, то они родственны.*

Таким образом, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между плоскими деревьями и классами родственности обобщенных многочленов Чебышева. Поскольку изображения, задаваемые родственными многочленами, отличаются лишь размером и ориентацией, это соответствие определяет для каждого плоского дерева его каноническую геометрическую форму.

Теорема 5. *Каждый обобщенный многочлен Чебышева имеет родственный ему многочлен, все коэффициенты которого являются алгебраическими числами.*

В настоящее время не известны простые способы нахождения по плоскому дереву соответствующего обобщенного многочлена Чебышева и наоборот.

В [3] приведены обобщенные многочлены Чебышева для всех плоских деревьев, имеющих не более 8 ребер. Они найдены с помощью системы Maple. При этом использовались методы ad hoc, требующие творческого участия человека. Поскольку с увеличением количества ребер резко возрастает степень алгебраических чисел — коэффициентов соответствующих обобщенных многочленов Чебышева, такая техника не может быть применена для больших деревьев.

В [4] описан подход, использующий не аналитические, а *приближенные* вычисления с большой точностью, достаточной для последующего *точного* определения целых чисел — коэффициентов многочленов, корни которых являются искомыми коэффициентами обобщенных многочленов Чебышева. При этом поиск приближенных значений осуществлялся под управлением человека.

В разработанной автором программе используется аналогичный принцип приближенных вычислений с последующим получением точных значений, но все вычисления проводятся компьютером без участия человека. Это достигается благодаря введению и использованию следующего более широкого класса многочленов.

Определение. Многочлен P с комплексными коэффициентами от одной переменной называется *квазиобобщенным многочленом Чебышева*, если существуют комплексные числа C (*промежуточное критическое значение*) и w, такие, что $-1<C<1$, $P(w)=C$, $P'(w)=0$, $P''(z)\neq 0$, $P'(z)=0 \Rightarrow P(z)=\pm 1 \vee z=w$.

Работа программы основана на естественном (но пока не доказанном) предположении, что коэффициенты квазиобобщенного многочлена гладким образом зависят от C и стремятся к коэффициентам настоящих обобщенных многочленов Чебышева, когда C стремится к 1 или -1. Программа поэтапно трансформирует (посредством квазиобобщенных многочленов) исходный многочлен $2z^n-1$, соответствующий дереву-звезде, в обобщенный многочлен Чебышева, изображающий заданное плоское дерево.

Пример. Многочлен $q_{11}z^{11}+\sum_{k=3}^{9} q_k z^k+z^2+z$, где

$$q_3=-\frac{133334873}{160133408}+\frac{15180167\sqrt{-11}}{160133408},$$

$$q_4=-\frac{5232924722141}{17910921684800}+\frac{627451817123\sqrt{-11}}{17910921684800},$$

$$q_5=\frac{5686549671 7047631}{240400390853385600}=\frac{29406421083302111\sqrt{-11}}{480800781706771200},$$

$$q_6=\frac{2051789816918793668639}{6722195929237794840000 0}=\frac{644382259460286734267\sqrt{-11}}{67221959292377948400000},$$

$$q_7 = -\frac{88104011256268191451631151}{32080111559903887055104000000} + \frac{44903432982731017638427353\sqrt{-11}}{32080111559903887055104000000},$$

$$q_8 = -\frac{126354552588708781231684854967}{21528962867851498602680294400000} + $$

$$+ \frac{14459655253391192167641093870 1\sqrt{-11}}{21528962867851498602680294400000},$$

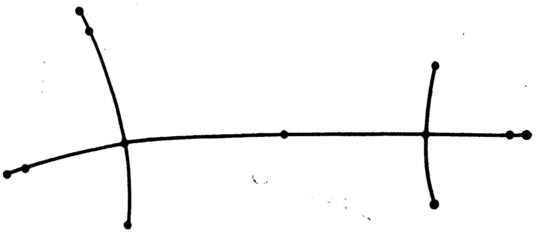
$$q_9 = \frac{73319165764050208397331570837 4249}{7224043490307570356129372785920000000} -$$

$$= \frac{794208128693871012379586618531890 1\sqrt{-11}}{57792347922460562849034982287360000 00},$$

$$q_{11} = \frac{465663733966203040846410366648078889 13213531}{212081962334580471709907861403834402816000000000 0} +$$

$$+ \frac{1020707965053789854093387210896251864017 31007\sqrt{-11}}{212081962334580471709907861403834402816000000000 0},$$

дает представленное на рисунке изображение.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number field//The Grothendieck Festschift. V. 3. Dösseldorf, 1990. 199—227.
2. Shabat G., Zvonkin A. Plane tree and algebraic numbers//Contemporary Math. 1994. **178**. 233—275.
3. Bétréma J., Péré S., Zvonkin A. Plane trees and their Shabat polynomials. Catalog//Raport Interne du LaBRI. N 92—75. Bordeaux, 1992.
4. Couveignes J.-M., Granboulan L. Dessins from a geometrical point of view//London Math. Soc. Lect. Notes. 1993. **200**. 79—114.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 6

УДК 519.248

М. Д. Миссаров

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ И КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ФЕРМИОННОЙ МОДЕЛИ

В [1] показано, что преобразование ренормгруппы (РГ) в иерархической фермионной модели задается бирациональным отображением в плоскости констант связи, и описаны все неподвижные точки этого преобразования. Оказывается, можно получить некоторую информацию также и о глобальном поведении РГ-инвариантных кривых.