А. И. Егоров, Пространства линейных элементов усеченной аффинной связности с группой движений максимального порядка,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 5, 749–768

https://www.mathnet.ru/mzm6405

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ УСЕЧЕННОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ С ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

А. И. Егоров

В настоящей заметке определяются максимальные порядки групп движений G_r в пространствах линейных элементов усеченной аффинной связности, а также устанавливаются определенные структуры тензоров $\Gamma^i_{jk\cdot l}$, $\Lambda^i_{jk\cdot l}$, Ω^i_{jk}, K^i_{jkl} в случае максимально подвижных пространств.

Приведем прежде всего некоторые понятия и определения, необходимые нам в дальнейшем.

Определение. Пространством линейных элементов усеченной аффинной связности называется многообразие $X_{2n-1}(x, \dot{x})$, в котором задано поле фундаментального дифференциально-геометрического объекта с координатами

$$\Lambda^i_{jk}(x, \dot{x}) \quad (i, j, k = 1,2, \ldots, n),$$

преобразующимися при переходе от одной системы координат к другой по закону [1, стр. 5]

$$\Lambda^{i'}_{jk} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\,\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Lambda^i_{jk},$$

где $\dot{x}^i$ псевдовектор, а Λ^i_{jk} — объект нулевой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$. Введенные нами пространства линейных элементов усеченной аффинной связности будем обозначать символом $N_{n,\dot{x}}$. Объект аффинной связности $\Lambda^i_{jk}(x, \dot{x})$ в общем случае не является симметрическим по индексам j, k. Ясно, что аффинная связность в пространствах $N_{n,\dot{x}}$ может быть также задана набором упорядоченных пар объектов

$$\{\Gamma^i_{jk}(x, \dot{x}), \Omega^i_{jk}(x, \dot{x})\}, \tag{1}$$

где $\Gamma^i_{jk} = (^1/_2)\Lambda^i_{(jk)}$, $\Omega^i_{jk} = (^1/_2)\Lambda^i_{[jk]}$.

Задание в многообразии $X_{2n-1}(x, \dot{x})$ поля объекта с координатами Λ^i_{jk} позволяет развить соответствующую геометрию как теорию присоединенных к этому фундаментальному объекту инвариантов относительно преобразований линейного элемента.

Определение. Движениями в пространствах $N_{n,\dot{x}}$ называются такие точечные преобразования, которые сохраняют аффинную связность (1).

Необходимым и достаточным условием того, чтобы компоненты вектора $v^i(x)$ инфинитезимального преобразования $\tilde{x}^i = x^i + v^i(x)\cdot t$ определяли движение в пространствах $N_{n,\dot{x}}$, является [1, стр. 22] условие

$$D\Gamma^i_{jk} = 0, \quad D\Omega^i_{jk} = 0, \tag{2}$$

где D — знак лиева дифференцирования вдоль линий тока векторного поля $v^i(x)$.

Рассмотрим подробнее условия интегрируемости выписанных здесь уравнений. Вводя дополнительно к $v^i(x)$ новые неизвестные функции $u^i_j = v^i_{,j}$, где запятая перед индексом j означает ковариантное дифференцирование в смысле связности Γ^i_{jk}, мы убеждаемся, что условия интегрируемости этих вспомогательных уравнений и уравнений (2) приводятся к виду:

а) уравнение $DK^i_{jkl} = 0$ и все полученные из него путем последовательного ковариантного дифференцирования по x^p до порядка α под знаком D;

б) уравнение $D(\Gamma^i_{jk\cdot \underset{1}{r}\cdot r\ldots \underset{\beta}{r}}) = 0$ и все полученные из него путем последовательного ковариантного дифференцирования по x^p до порядка γ под знаком D;

в) уравнение $D\Omega^i_{jk} = 0$ и все полученные из него путем последовательного ковариантного дифференцирования по x^p до порядка ε под знаком D;

г) уравнение $D(\Omega^i_{jk\cdot \underset{1}{r}\ldots \underset{\nu}{r}}) = 0$ и все полученные из него путем последовательного ковариантного дифференцирования по x^p до порядка τ под знаком D. Здесь и в дальнейшем $\cdot r$ означает частное дифференцирование по координатам $\dot{x}^r$;

$$K^i_{jkl} = \partial_{[l}\Gamma^i_{|j|k]} + \Gamma^i_{p\,[l}\Gamma^p_{|j|k]} + \Gamma^i_{j\,[l\cdot|p}\Gamma^p_{\sigma|k]}\dot{x}^\sigma.$$

Если при увеличении каждого из чисел α, β, γ, ε, ν, τ на единицу число связей ρ не меняется, то пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движения G_r порядка $r = n^2 + n - \rho$.

Пространства $N_{n,\dot{x}}$, у которых объект аффинной связности $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma} = H^\alpha_{\beta\cdot\gamma}$ $(\Lambda^\alpha_{\beta\gamma} = (^1/_2)\,H^\alpha_{\cdot\beta\cdot\gamma})$ будем называть пространствами линейных элементов усеченной аффинной полуинтегрируемой (интегрируемой) связности и обозначать символами $Y_{n,\dot{x}}$ $(X_{n,\dot{x}})$. Составляющие H^α_β, H^α — однородные соответственно первой и второй степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$.

В настоящей работе предполагается, что тензор $\Lambda^i_{jk\cdot l} \neq 0$, в противном случае получим точечные пространства аффинной связности, движения в которых хорошо изучены [2]. Условие, что $\Lambda^i_{jk\cdot l} \neq 0$ означает, что тензор $\Lambda^i_{jk\cdot l}$ существенно зависит от координат $\dot{x}^\alpha$.

Прежде всего установим определенные алгебраические структуры тензоров $\Gamma^i_{jk\cdot l}$, K^i_{jkl}, $\Lambda^i_{jk\cdot l}$ пространства $N_{n,\dot{x}}$, обладающего группой движений G_r достаточно высокого порядка. Для этого подробнее исследуем условия инвариантности тензоров $\Gamma^i_{jk\cdot l}$, $\Gamma^i_{jk\cdot l\cdot\delta}$, K^i_{jkl}, $K^i_{jkl\cdot\delta}$ при движениях.

1. Выясним сначала структуру тензоров $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ $(\Lambda^i_{jk\cdot l})$ в предположении, что пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$. Для произвольной точки $(x, \dot{x})$ пространства $N_{n,\dot{x}}$ выберем систему координат, в которой

$$\dot{x}^i = \delta^i_{\alpha_1}. \tag{3}$$

Дальнейшие исследования будем проводить в этой специальной системе координат (3). Построим теперь матрицу

$$\left\| T^\alpha_\beta\binom{i}{jkl}, \quad T^\alpha_\beta\binom{i}{jkl\delta} \right\|, \tag{A}$$

элементами которой являются коэффициенты при функциях u_α^β в уравнениях $D\Gamma^i_{jk\cdot l}=0$, $D\Gamma^i_{jk\cdot l\cdot\delta}=0$:

$$T^\alpha_\beta\binom{i}{jkl}=\delta^\alpha_j\Gamma^i_{\beta k\cdot l}+\delta^\alpha_k\Gamma^i_{j\beta\cdot l}+\delta^\alpha_l\Gamma^i_{jk\cdot\beta}-\delta^i_\beta\Gamma^\alpha_{jk\cdot l}+\delta^\alpha_{\alpha_1}\Gamma^i_{jk\cdot l\cdot\beta},$$

$$T^\alpha_\beta\binom{i}{jkl\delta}=\delta^\alpha_j\Gamma^i_{\beta k\cdot l\cdot\delta}+\delta^\alpha_k\Gamma^i_{j\beta\cdot l\cdot\delta}+\delta^\alpha_l\Gamma^i_{jk\cdot\beta\cdot\delta}+$$
$$+\delta^\alpha_\delta\Gamma^i_{jk\cdot l\cdot\beta}-\delta^i_\beta\Gamma^\alpha_{jk\cdot l\cdot\delta}+\delta^\alpha_{\alpha_1}\Gamma^i_{jk\cdot l\cdot\delta\cdot\beta}.$$

Предварительно отметим некоторые свойства алгебраического характера, связанные с составляющими тензора $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ $(\Lambda^i_{jk\cdot l})$ в предположении, что верхний индекс i $(i\neq\alpha_1)$ отличен от нижних j, k, l, выделяя при этом случаи наличия и отсутствия совпадающих индексов j, k, l. Заметим, что индекс α_1 занимает особое положение в связи с выбором специальной системы координат (3).

ЛЕММА 1. *Если пространство $N_{nj\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r>n^2-2n+5$ $(r>n^2-2n+6)$, то в рассматриваемой точке справедливы следующие равенства*:

$$\Gamma^a_{bc\cdot d}=0,\quad (a\neq\alpha_1,\quad a\neq b,\ c,\ d)\tag{4}$$
$$(\Lambda^a_{bc\cdot d}=0).\tag{5}$$

Доказательство. Доказательство утверждений леммы проведем для составляющих $\Gamma^a_{bc\cdot d}$, так как для составляющих $\Lambda^a_{bc\cdot d}$ оно аналогично.

При предположении, что $\Gamma^a_{bc\cdot d}\neq 0$ $(a\neq\alpha_1$ $a\neq b,\ c,\ d)$ возможны следующие случаи (в дальнейшем предполагается, что набор $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ составлен из чисел $1, 2, \ldots, n$, причем $\alpha_i\neq\alpha_j$, если $i\neq j$):

1) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_3}\neq 0$;

2) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3}\neq 0$, а все составляющие вида $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_3}=0$;

3) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_4}\neq 0$, а все составляющие вида $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_3}=0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3}=0$;

4) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_3}\neq 0$, а все составляющие вида $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_3}=0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3}=0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_4}=0$;

5) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_4}\neq 0$, а все составляющие вида $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_3}=0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3}=0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_4}=0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_3}=0$.

6) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\cdot\alpha_4} \neq 0$, а все составляющие вида $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_3} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_4} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_3} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_4} = 0$.

7) $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\cdot\alpha_5} \neq 0$, а все составляющие вида $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_3} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_4} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_3} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_4} = 0$, $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\cdot\alpha_4} = 0$.

(Для составляющих $\Lambda^{a}_{bc\cdot d} \neq 0$, как легко видеть, возможны 10 случаев, $a \neq \alpha_1$, $a \neq b$, c, d.)

Рассмотрим каждый из этих перечисленных случаев в отдельности. В случае 1 минор порядка $3n-5$ матрицы (А), построенной из коэффициентов при функциях

$$u^{\alpha_3}_{\alpha_j},\quad u^{\alpha_k}_{\alpha_2},\quad u^{\alpha_1}_{\alpha_l},\quad j,\quad k = 3, 4, \ldots, n,\quad l = 2, 3, \ldots, n,$$

в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_1\alpha_j \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_1\alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_l\alpha_3 \end{pmatrix}$$

с точностью до знака, равен степени составляющей $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_3}$. В случае 2 минор также порядка $3n-5$ матрицы (А), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_3}_{\alpha_j}$, $u^{\alpha_k}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_2}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_1\alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_l\alpha_3\alpha_2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_j\alpha_3 \end{pmatrix}$$

($l = 2, 3, \ldots, n$; $j = 3, 4, \ldots, n$; $k = 4, 5, \ldots, n$) с точностью до постоянного множителя, равен степени составляющей $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3}$. В третьем случае минор порядка $4n-11$ матрицы (А), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_3}_{\alpha_j}$, $u^{\alpha_l}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_4}_{\alpha_\delta}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_j\alpha_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_l \\ \alpha_1\alpha_3\alpha_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_k\alpha_3\alpha_4 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_3\alpha_\delta \end{pmatrix}$$

$$(j,\ l = 3, 5, \ldots, n;\ k = 2, 3, 4, \ldots, n)$$

с точностью до постоянного множителя, равен степени составляющей $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_4}$. В четвертом случае минор порядка $3n-4$ матрицы (А), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_j}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_1}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_3}$ ($l, k = 4, 5, \ldots, n$;

$j = 1,2,\ldots n$) в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_3\alpha_3\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_3\alpha_j\alpha_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_3\alpha_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_3\alpha_3\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_3\alpha_3 \end{pmatrix}$$

с точностью до постоянного множителя, равен произведению составляющей $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_3}$ на множитель

$$(\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_3} - \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3}) \cdot (\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_3} + \Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_3\cdot\alpha_3}).$$

Отсюда следует наличие искомого минора по крайней мере порядка $3n-5$. В случае 5 минор порядка $4n - 14$ матрицы (A), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_j}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_4}_{\alpha_\delta}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_k\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_3\alpha_4\alpha_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_3\alpha_\delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_3\alpha_3\alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$(j,\ l = 4,\ 5, \ldots, n;\ \delta,\ k = 5,\ 6, \ldots, n)$$

с точностью до постоянного множителя, равен степени составляющей $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\cdot\alpha_4}$. В случае 6 минор порядка $4n-15$ матрицы (A), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_i}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_j}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_4}_{\alpha_l}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_j\alpha_4\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_4\alpha_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_l \end{pmatrix}$$

$$(j,\ k,\ l = 5,\ 6, \ldots, n;\ i = 4,\ 5, \ldots, n),$$

с точностью до знака, равен степени составляющей $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\cdot\alpha_4}$. В последнем седьмом случае минор порядка $5n - 25$ матрицы (A), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_j}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_4}_{\alpha_\delta}$, $u^{\alpha_5}_{\alpha_m}$ $(j,\ k,\ l,\ \delta,\ m = 6,\ 7, \ldots, n)$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_\delta\alpha_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_k\alpha_4\alpha_5 \end{pmatrix}$$

с точностью до постоянного множителя, равен степени составляющей $\Gamma^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\cdot\alpha_5}$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Если пространство* $N_{n,\dot{x}}$ *допускает группу движений* G_r *порядка* $r > n^2 - 2n + 5$ $(r > n^2 - 2n + 6)$, *то тензор* $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ $(\Lambda^i_{jk\cdot l})$ *имеет следующее* *строение*:

$$\Gamma^i_{jk\cdot l} = \delta^i_j M_{k\cdot l} + \delta^i_k M_{j\cdot l} + \delta^i_l B_{jk} + \dot{x}^i B_{jk\cdot l}. \qquad (6)$$

$$(\Lambda^i_{jk\cdot l} = \delta^i_j A_{k\cdot l} + \delta^i_k \Pi_{j\cdot l} + \delta^i_l F_{jk} + \dot{x}^i F_{jk\cdot l}),$$

где тензоры $M_{k\cdot l}$, B_{kl}, $A_{k\cdot l}$, $\Pi_{j\cdot l}$, F_{kl} *— минус первой степени однородности относительно координат* $\dot{x}^\alpha$, *причем*

$$B_{jk} = B_{kj}, \quad M_{k\cdot l}\dot{x}^l = A_{k\cdot l}\dot{x}^l = \Pi_{k\cdot l}\dot{x}^l = 0.$$

Доказательство этой теоремы вытекает из полученных нами условий (4) и (5).

Заметим, что обобщением структуры тензора $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ (6) является следующая структура:

$$\Gamma^i_{jk\cdot l} = \delta^i_j M_{k\cdot l} + \delta^i_k M_{j\cdot l} + \delta^i_l B_{jk} + \dot{x}^i B_{jk\cdot l} + A^i D_{jkl}, \quad (7)$$

где A^i, D_{jkl} — тензоры соответственно k и $(-k-1)$ степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$, причем $D_{jkl}\dot{x}^l = 0$. Рассмотрим класс пространств $N_{n,\dot{x}}$ со связностью:

$$\begin{cases} \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j M_k + \delta^i_k M_j + \dot{x}^i B_{jk} + A^i(x) D_{jk} + A^i_{jk}(x), \\ \Omega^i_{jk} = \delta^i_j a_k - \delta^i_k a_j + \dot{x}^i a_{jk} + F^i C_{jk} + B^i_{jk}(x), \end{cases}$$

где тензоры M_k, a_k, D_{jk} — нулевой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$, а тензоры B_{jk}, a_{jk} — минус первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$, F^i, C_{jk} — тензоры k и $(-k)$ степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$, $B^l_{jk}(x)$, $A^i_{jk}(x)$ — соответственно тензор и объект аффинной связности. У этих приведенных пространств $N_{n,\dot{x}}$ тензор $\Gamma^i_{jk\cdot l}$ имеет структуру типа (7).

Для пространств $X_{n,\dot{x}}$ справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2 [3, стр. 32]. *Если пространство* $X_{n,\dot{x}}$ *допускает группу движений* G_r *порядка* $r > n^2 - 2n + 5$, *то тензор* $\Lambda^i_{jk\cdot l} = (1/2) H^i_{\cdot j\cdot k\cdot l}$ *имеет следующее строение*:

$$\Lambda^i_{jk\cdot l} = \delta^i_j B_{\cdot k\cdot l} + \delta^i_k B_{\cdot j\cdot l} + \delta^i_l B_{\cdot j\cdot k} + \dot{x}^i B_{\cdot j\cdot k\cdot l},$$

где

$$B_{\cdot j\cdot k} = \frac{1}{2(n+1)} H^\sigma_{\cdot j\cdot k\cdot \sigma}, \quad B_{\cdot j\cdot k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 B}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}.$$

Пространства $N_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Gamma^{i}_{jk\cdot l} \neq 0$, имеет строение, отличное от (6), будем обозначать символом $R_{n,\dot{x}}$.

ТЕОРЕМА 3. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $R_{n,\dot{x}}$, равен $n^2 - 2n + 5$.*

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что возможный порядок групп движений G_r в пространствах $R_{n,\dot{x}}$ удовлетворяет неравенству $r \leqslant n^2 - 2n + 5$. Точность указанной здесь границы следует из того, что существует пространство $R_{n,\dot{x}}$ со связностью

$$\Lambda^{i}_{jk} = A^{i} D_{jk}, \quad A^2 = 1, \quad D_{11} = \frac{\dot{x}^3}{\dot{x}^1}, \tag{8}$$

остальные $A^i = 0$, $D_{jk} = 0$, допускающее полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - 2n + 5$. Операторы рассматриваемой группы движений G_r —

$$p_i, \quad 2x^1 p_3 - x^{1^2} p_2, \quad x^1 p_2, \quad x^3 p_2, \quad x^1 p_1 + 2x^2 p_2 + x^3 p_3,$$
$$x^2 p_2 + x^3 p_3, \quad x^j p_k, \quad x^j p_2, \quad x^3 p_k, \quad x^1 p_j$$
$$(j,\ k = 4, 5, \ldots, n; \ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Укажем на существование некоторых пространств $R_{n,\dot{x}}$ с группой движений G_r достаточно высокого порядка и представляющих с этой точки зрения интерес.

1. Пространство $R_{n,\dot{x}}$ со связностью $\Lambda^{i}_{jk} = ({}^1/_2) H^{i}_{\cdot j \cdot k}$, где $H^2 = (\dot{x}^1 - \dot{x}^3)^3/\dot{x}^3$, остальные $H^i = 0$, допускает полную группу движений G_r, $r = n^2 - 2n + 5$.

2. Пространство $R_{n,\dot{x}}$ со связностью $\Lambda^{i}_{jk} = ({}^1/_2) H^{i}_{\cdot j \cdot k}$, где $H^2 = \dot{x}^{3^2} (\dot{x}^4 - \dot{x}^1)/\dot{x}^1$, остальные $H^i = 0$, допускает полную группу движений G_r, $r = n^2 - 3n + 8$.

3. Пространство $R_{n,\dot{x}}$ со связностью $\Lambda^{i}_{jk} = ({}^1/_2) H^{i}_{\cdot j \cdot k}$, где $H^2 = \dot{x}^3 \cdot \dot{x}^4 (\dot{x}^5 - \dot{x}^1)/\dot{x}^1$, остальные $H^i = 0$, обладает полной группой движений G_r, $r = n^2 - 4n + 11$ (полная проективная группа движений этого пространства G_r, $r = n^2 - 4n + 12$).

Заметим, что максимальный порядок $r = n^2 - 2n + 5$ групп движений G_r в пространствах $X_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $\Lambda^{i}_{jk\cdot l} \neq 0$ имеет структуру, отличную от (7), установлен нами в работе [3, стр. 32]. Для пространств $Y_{n,\dot{x}}$ имеет место следующий вывод.

ТЕОРЕМА 4. *Если пространство* $Y_{n,\dot{x}}$ *допускает группу движений* G_r *порядка* $r > n^2 - 2n + 5$, *то тензор* $\Lambda^i_{jk\cdot l}$ *необходимо имеет следующее строение*:

$$\Lambda^i_{jk\cdot l} = \delta^i_j D_{k\cdot l} + \delta^i_k K_{j\cdot l} + \delta^i_l K_{j\cdot k} + \dot{x}^i K_{j\cdot k\cdot l}, \quad (\Lambda^i_{jk\cdot l} = H^i_{j\cdot k\cdot l}), \tag{10}$$

где тензоры $D_{k\cdot l}$, $K_{j\cdot l}$ — *минус первой степени однородности относительно координат* $\dot{x}^\alpha$, *причем*

$$D_{k\cdot l}\dot{x}^l = 0, \quad K_{j\cdot l}\dot{x}^l = 0, \quad D_{k\cdot l} = D_{l\cdot k}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. *Максимальный порядок групп движений* G_r *в классе пространств* $Y_{n,\dot{x}}$, *у которых тензор* $\Lambda^i_{jk\cdot l} \neq 0$, *имеет структуру, отличную от* (10), *равен* $n^2 - 2n + 5$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что $r \leqslant n^2 - 2n + 5$. Для того чтобы убедиться, что указанная граница $r = n^2 - 2n + 5$ точная, достаточно указать пространство $Y_{n,\dot{x}}$ со связностью

$$\Lambda^\alpha_{\beta\gamma} = H^\alpha_{\beta\cdot\gamma}, \quad H^\alpha_\beta = A^\alpha M_\beta, \quad H^\alpha_{\beta\cdot\gamma} = A^\alpha M_{\beta\cdot\gamma}, \tag{11}$$

где

$$A^2 = 1, \quad M_1 = \frac{3}{2}\frac{(\dot{x}' - \dot{x}^3)^2}{\dot{x}^3},$$

$$M_3 = -\frac{1}{2}\frac{(\dot{x}^1 - \dot{x}^3)^2(\dot{x}^1 + 2\dot{x}^3)}{\dot{x}^{32}},$$

остальные $A^i = 0$, $M_k = 0$, допускающее полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - 2n + 5$. Операторы группы движений G_r приведенного пространства $Y_{n,\dot{x}}$ (11) есть

$$p_i, \quad x^3p_2, \quad x^1p_2, \; (x^1 - x^3)p_1 + 3x^2p_2, \; x^1p_1 + 2x^2p_2 + x^3p_3,$$
$$2x^3p_1 - 3(x^1 - x^3)^2p_2, \quad x^jp_k, \; x^3p_k, \; x^1p_j, \; x^jp_2$$
$$(j, k = 4, 5, \ldots, n; \; i = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Перейдем теперь к определению структуры тензора аффинной кривизны K^i_{jkl}. Как известно [1], тензор K^i_{jkl}

удовлетворяет следующим условиям: а) $K^i_{jkl} = -K^i_{jlk}$; б) $K^i_{jkl} + K^i_{klj} + K^i_{ljk} = 0$. Построим матрицу

$$\left\| T^\alpha_\beta \begin{pmatrix} i \\ jkl \end{pmatrix}, \; T^\alpha_\beta \begin{pmatrix} i \\ jkl\delta \end{pmatrix} \right\|, \tag{N}$$

где положено

$$T^\alpha_\beta \begin{pmatrix} i \\ jkl \end{pmatrix} = \delta^\alpha_j K^i_{\beta kl} + \delta^\alpha_k K^i_{j\beta l} + \delta^\alpha_l K^i_{jk\beta} - \delta^i_\beta K^\alpha_{jkl} + \delta^\alpha_{\alpha_1} K^i_{jkl\cdot\beta},$$

$$T^\alpha_\beta \begin{pmatrix} i \\ jkl\delta \end{pmatrix} = \delta^\alpha_j K^i_{\beta kl\cdot\delta} + \delta^\alpha_k K^i_{j\beta l\cdot\delta} +$$

$$+ \delta^\alpha_l K^i_{jk\beta\cdot\delta} + \delta^\alpha_\delta K^i_{jkl\cdot\beta} - \delta^i_\beta K^\alpha_{jkl\cdot\delta} + \delta^\alpha_{\alpha_1} K^i_{jkl\cdot\delta\cdot\beta}.$$

Элементами этой матрицы являются коэффициенты при функциях u^α_β в уравнениях $DK^i_{jkl} = 0$, $DK^i_{jkl\cdot\delta} = 0$ в специальной системе координат (3).

ЛЕММА 2. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то в рассматриваемой точке выполняются соотношения*

$$K^i_{jkl} = 0 \qquad (i \neq \alpha_1; \quad i \neq j, \; k, \; l). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Предположим, что $K^i_{jkl} \neq 0$ ($i \neq \alpha_1$; $i \neq j, k, l$). Тогда достаточно рассмотреть следующие пять случаев: 1) $K^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\alpha_3} \neq 0$; 2) $K^{\alpha_3}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_1} \neq 0$; 3) $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_4} \neq 0$; 4) $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4} \neq 0$; 5) $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\alpha_5} \neq 0$.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности. В случае 1) минор порядка $3n - 5$ матрицы (N), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_k}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_j}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_3}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1\alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_1\alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_1\alpha_l \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_3\alpha_j \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$(k = 3, 4, \ldots, n; \; l, j = 4, 5, \ldots, n),$$

с точностью до знака равен степени составляющей $K^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\alpha_3}$. Отсюда следует, что $K^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_1\alpha_3} = 0$.

Случай 2). Предварительно выделим минор порядка $3n-5$ матрицы (N), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_2}_{\alpha_3}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_3}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_3}$, $u^{\alpha_k}_{\alpha_3}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_2}_{\alpha_\delta}$, $u^{\alpha_2}_{\alpha_1}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2\alpha_2\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2\alpha_2\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\alpha_2\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \alpha_2\alpha_2\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2\alpha_2\alpha_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2\alpha_1\alpha_\delta \end{pmatrix}$$

$$(l, \ \delta, \ k = 4,5, \ldots, n),$$

с точностью до знака равный

$$(K^{\alpha_3}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_1})^{3n-6} \cdot (K^{\alpha_3}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_1} + K^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1\cdot\alpha_2}).$$

Отсюда следует, что

$$K^{\alpha_3}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_1} = -K^{\alpha_3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1\cdot\alpha_2}.$$

Учитывая теперь эти соотношения, мы рассмотрим минор порядка $3n-5$, получающийся из предыдущего минора следующей заменой

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2\alpha_2\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}, \qquad u^{\alpha_2}_{\alpha_1} \to u^{\alpha_1}_{\alpha_2}.$$

Этот минор с точностью до знака равен степени составляющей $K^{\alpha_3}_{\alpha_2\alpha_2\alpha_1}$.

Пусть теперь имеет место случай 3), тогда минор порядка $4n-14$ матрицы (N), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_4}_{\alpha_\delta}$, $u^{\alpha_m}_{\alpha_2}$ в уравниях

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_1\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_2\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_k\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_l\alpha_1\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_1\alpha_\delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \alpha_3\alpha_1\alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$(m, \ \delta, \ l, \ k = 5, 6, \ldots, n),$$

с точностью до знака равен степени составляющей $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_4}$. Поэтому случай 3) также невозможен, т. е. $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_4} = 0$. Из тождества

$$K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_4} + K^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_4\alpha_3} + K^{\alpha_2}_{\alpha_4\alpha_3\alpha_1} = 0.$$

находим, что все составляющие K^i_{jkl} вида $K^{\alpha_2}_{\alpha_1\alpha_3\alpha_4} = 0$.

Случай 4). Сначала установим, что выполняются равенства: а) $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_1\cdot\alpha_3}=0$, б) $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_1\cdot\alpha_4}=0$, в) $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_4\cdot\alpha_3}=0$.

Справедливость равенства а) следует из того, что минор порядка $3n-5$ матрицы (N), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_4}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_\delta}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_5}$ $u^{\alpha_1}_{\alpha_6}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_6\alpha_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_2\alpha_3\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_k\alpha_3\alpha_4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_l\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha_\delta\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_4\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_5\alpha_3\end{pmatrix}$$

$$(\delta, k=4, 5, \ldots, n;\quad l=5, 6, \ldots, n),$$

с точностью до знака равен

$$(K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4})^{3n-7}\cdot(K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_1\cdot\alpha_3})^2.$$

Справедливость равенства б) вытекает из того, что минор порядка $3n-5$ матрицы (N), получающийся из минора, рассмотренного в случае а), путем замены уравнений

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_5\alpha_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_5\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_6\alpha_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_6\alpha_4\end{pmatrix},$$

с точностью до знака равен $(K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4})^{3n-7}\cdot(K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_1\cdot\alpha_4})^2$.

Справедливость же последнего равенства в) следует из того, что минор порядка $4n-14$ матрицы (N), построенный из коэффицинтов при функциях $u^{\alpha_3}_{\alpha_j}$, $u^{\alpha_4}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_l}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_\delta}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_j\alpha_3\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_k\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_l\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_\delta\alpha_4\alpha_3\end{pmatrix},$$

с точностью до знака равен $(K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4})^{3n-10}\cdot(K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_1\alpha_4\cdot\alpha_3})^{n-4}$.

Наконец, рассматривая минор порядка $3n-5$ матрицы (N), получающийся из минора, рассмотренного в случае а), путем замены

$$u^{\alpha_1}_{\alpha_5}\to u^{\alpha_3}_{\alpha_1},\quad u^{\alpha_1}_{\alpha_6}\to u^{4}_{1},$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_6\alpha_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_1\alpha_4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_6\alpha_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\alpha_3\alpha_1\end{pmatrix},$$

равный с точностью до знака степени составляющей $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4}$, мы убедимся в невозможности также и случая 4), т. е. $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_3\alpha_4} = 0$.

Последний пятый случай также невозможен, так как минор порядка $4n - 17$ матрицы (N), образованный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_4}_{\alpha_l}$, $u^{\alpha_5}_{\alpha_m}$, $u^{\alpha_\delta}_{\alpha_2}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_\delta \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_k\alpha_4\alpha_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3\alpha_l\alpha_5 \end{pmatrix}$$

$$(m,\ k,\ l = 6,\ 7,\ \ldots,\ n;\ \delta = 4,\ 5,\ \ldots,\ n),$$

с точностью до знака равен степени составляющей $K^{\alpha_2}_{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$.

Итак, лемма доказана полностью.

ТЕОРЕМА 6. *Если пространство* $N_{n,\dot{x}}$ *допускает группу движений* G_r *порядка* $r > n^2 - 2n + 5$, *то*

$$K^i_{jkl} = \delta^i_j (P_{kl} - P_{lk}) + \delta^i_k P_{jl} - \delta^i_l P_{jk} + \dot{x}^i D_{jkl}, \qquad (13)$$

где тензоры P_{kl}, D_{jkl} *соответственно нулевой и минус первой степени однородности относительно координат* $\dot{x}^\alpha$, *причем*

$$D_{jkl} = -D_{jlk}, \quad D_{jkl} + D_{klj} + D_{ljk} = 0.$$

Справедливость этой теоремы очевидна в силу полученных соотношений (12).

ТЕОРЕМА 7. *Если пространство* $X_{n,\dot{x}}$ *допускает группу движений* G_r, $r > n^2 - 2n + 5$, *то тензор* K^i_{jkl} *имеет структуру* (13), *причем*

$$D_{jkl} = P_{jl\cdot k} - P_{jk\cdot l}, \quad P_{jl\cdot l} = P_{kl\cdot j}.$$

Доказательство вытекает сразу, если принять во внимание, что в пространствах $X_{n,\dot{x}}$ имеет место равенство $K^\alpha_{\beta\lambda\mu\cdot\delta} = K^\alpha_{\delta\lambda\mu\cdot\beta}$.

Заметим, что естественным обобщением структуры тензора K^i_{jkl} (13) является следующая структура:

$$K^i_{jkl} = \delta^i_j (P_{kl} - P_{lk}) + \delta^i_k P_{jl} - \delta^i_l P_{jk} + \dot{x}^i D_{jkl} + A^i \Pi_{jkl}, \qquad (14)$$

где A^i, Π_{jkl} — тензоры соответственно k и $(-k)$ степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$.

ТЕОРЕМА 8. *Инвариантный при движениях тензор D_{jkl} равен нулю, если пространство $N_{n.x}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$.*

Доказательство. Предположим, что тензор $D_{jkl} \neq 0$. Тогда в специальной системе координат (3), приходим к следующим возможным случаям:

1) $D_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} \neq 0$;

2) $D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_2} \neq 0$, а все составляющие вида $D_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = 0$;

3) $D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3} \neq 0$, а все составляющие вида $D_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = 0$, $D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_2} = 0$;

4) $D_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3} \neq 0$, а все составляющие вида $D_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = 0$, $D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_2} = 0$, $D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3} = 0$;

5) $D_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \neq 0$, а все составляющие вида $D_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2} = 0$, $D_{\alpha\,\alpha_1\alpha_2} = 0$, $D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3} = 0$, $D_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3} = 0$.

Для исследования построим матрицу

$$\| T^{\alpha}_{\beta}(ijk),\ T^{\alpha}_{\beta}(ijkl) \|, \tag{m}$$

где положено

$$T^{\alpha}_{\beta}(ijk) = \delta^{\alpha}_{i} D_{\beta jk} + \delta^{\alpha}_{j} D_{i\beta k} + \delta^{\alpha}_{k} D_{ij\beta} + \delta^{\alpha}_{\alpha_1} D_{ijk\cdot\beta},$$

$$T^{\alpha}_{\beta}(ijkl) = \delta^{\alpha}_{i} D_{\beta jk\cdot l} + \delta^{\alpha}_{j} D_{i\beta k\cdot l} + \delta^{\alpha}_{k} D_{ij\beta\cdot l} + \delta^{\alpha}_{l} D_{ijk\cdot\beta} + \delta^{\alpha}_{\alpha_1} D_{ijk\cdot l\cdot\beta}.$$

Здесь выписаны коэффициенты при функциях u^{α}_{β} в уравнениях

$$DD_{ijk} = 0, \quad DD_{ijk\cdot l} = 0.$$

В случае 1) минор порядка $2n - 2$ матрицы (m), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_1}_{\alpha_i}$, $u^{\alpha_2}_{\alpha_j}$ в уравнениях

$$(\alpha_i\alpha_1\alpha_2), \quad (\alpha_1\alpha_1\alpha_j) \quad (i,\ j = 2, 3, \ldots, n),$$

с точностью до знака равен степени составляющей $D_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2}$. В случае 2) выделим минор порядка $2n - 1$ матрицы (m), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_2}_{\alpha_i}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_j}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_2}_{\alpha_1}$ в уравнениях

$$(\alpha_2\alpha_1\alpha_i), \quad (\alpha_2\alpha_j\alpha_2), \quad (\alpha_1\alpha_1\alpha_2), \quad (\alpha_2\alpha_1\alpha_2\alpha_2)$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n;\ j = 3, 4, \ldots, n),$$

с точностью до постоянного множителя равный произведению степени данной составляющей $D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_2}$ на множитель

$$(D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_2} - D_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2\cdot\alpha_2}) \cdot (D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_2} + D_{\alpha_1\alpha_1\alpha_2\cdot\alpha_2}).$$

Отсюда следует наличие искомого минора по крайней мере порядка $2n - 2$. В случае 3) минор порядка $3n - 8$ **матрицы (m), составленный из коэффициентов при функциях** $u_{\alpha_i}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_j}^{\alpha_1}$, $u_{\alpha_k}^{\alpha_3}$ **в уравнениях**

$$(\alpha_i\alpha_1\alpha_3), \quad (\alpha_2\alpha_1\alpha_3) \quad (\alpha_2\alpha_j\alpha_3), \quad (\alpha_2\alpha_1\alpha_k)$$
$$(i, \ j, \ k = 4, 5, \ldots, n),$$

с точностью до знака равен степени составляющей $D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3}$. Если воспользоваться тождеством

$$D_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3} + D_{\alpha_1\alpha_3\alpha_2} + D_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = 0,$$

то получим, что в случаях 4, 5) все составляющие вида $D_{\alpha_1\alpha_3\alpha_2}$ равны нулю (т. е. $D_{\alpha_1\alpha_3\alpha_2} = 0$).

В случае 4) минор порядка $3n - 7$ матрицы (m), построенный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_i}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_l}^{\alpha_3}$, $u_{\alpha_k}^{\alpha_1}$ в уравнениях

$$(\alpha_i\alpha_2\alpha_3), \quad (\alpha_2\alpha_2\alpha_l), \quad (\alpha_2\alpha_2\alpha_3\alpha_k)$$
$$(k, \ l = 4, 5, \ldots, n; \ i = 2, 3, \ldots, n),$$

с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $D_{\alpha_2\alpha_2\alpha_3}$. В случае 5) минор порядка $4n - 15$ матрицы (m), составленный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_2}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_k}^{\alpha_l}$, $u_{\alpha_l}^{\alpha_3}$, $u_{\alpha_\delta}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_m}^{\alpha_1}$ в уравнениях

$$(\alpha_2\alpha_3\alpha_4), \quad (\alpha_k\alpha_3\alpha_4), \quad (\alpha_2\alpha_l\alpha_4), \quad (\alpha_2\alpha_3\alpha_\delta), \quad (\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_m)$$
$$(k, \ l, \ \delta, \ m = 5, 6, \ldots, n),$$

с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $D_{\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$. Теорема, таким образом, полностью доказана.

Пространства $N_{n, \dot{x}}$, удовлетворяющие условиям $\Gamma^i_{jk \cdot l} \neq 0$ и $\Gamma^i_{jk \cdot l} \neq -\Omega^i_{jk \cdot l}$, будем обозначать символом $u_{n, \dot{x}}$. В работе [4, стр. 39] установлено, что максимальный порядок групп движений в пространствах $u_{n, \dot{x}}$ равен точно n^2. Там же приводятся конкретные пространства $u_{n, \dot{x}}$, допускающие группу движений G_r, $r = n^2$.

Рассмотрим пространство $u_{n, \dot{x}}$ со связностью

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j + \dot{x}^i B_{jk}, \quad \Omega^i_{jk} = \delta^i_j B_k - \delta^i_k B_j, \quad (15)$$

где $\quad A_k = a \cdot \delta^1_k, \quad B_k = b \cdot \delta^1_k, \quad B_{11} = c/\dot{x}^1, \quad$ остальные

$B_{ij} = 0$, a, b, c — константы, $c \neq 0$. Это пространство $u_{n,\dot{x}}$ допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2$ и, следовательно, является максимально подвижным. Объект связности Λ^i_{jk} пространства $u_{n,\dot{x}}$ (15) имеет следующее строение:

$$\Lambda^i_{jk} = \delta^i_j C_k + \delta^i_k D_j + \dot{x}^i B_{jk},$$

где $C_k = A_k + B_k$, $D_j = A_j - B_j$.

Так как тензор K^i_{jkl} пространства $u_{n,\dot{x}}$ (15) в общем случае отличен от нуля, следовательно, максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $N_{n,\dot{x}}$ с тензорами $\Lambda^i_{jk\cdot l} \neq 0$, $K^i_{jkl} \neq 0$ равен точно n^2.

Пространства $N_{n,\dot{x}}$, у которых $\Omega^i_{jk\cdot l} \neq 0$, а все составляющие $\Gamma^i_{jk\cdot l} = 0$, будем обозначать символом $W_{n,\dot{x}}$. Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $W_{n,\dot{x}}$ равен точно $n^2 - n + 2$. Максимально подвижными пространствами $W_{n,\dot{x}}$ будут, например, следующие пространства:

$$\begin{cases} \Gamma^i_{jk} = \delta_1 (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j) + \delta_2 \dot{x}^i (A_{j\cdot k} + A_{k\cdot j}), \\ \Omega^i_{jk} = \delta_3 (\delta^i_j A_k - \delta^i_k A_j) + \delta_4 \dot{x}^i (A_{j\cdot k} - A_{k\cdot j}), \end{cases} \tag{16}$$

где $A_1 = \dot{x}^2/\dot{x}^1$, $A_2 = -1$, остальные $A_i = 0$, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 — константы, $\delta_3^2 + \delta_4^2 \neq 0$.

Объект связности Λ^i_{jk} пространства (16) принимает следующий вид:

$$\Lambda^i_{jk} = \delta^i_j a_k + \delta^i_k b_j + \dot{x}^i C_{jk}, \tag{17}$$

где

$$a_k = (\delta_1 + \delta_3) A_k, \quad b_k = (\delta_1 - \delta_3) A_k,$$

$$C_{jk} = (\delta_2 + \delta_4) A_{j\cdot k} + (\delta_2 - \delta_4) A_{k\cdot j}.$$

Заметим, что здесь тензор $A_{j\cdot k}$ не является симметрическим (т. е. $A_{j\cdot k} \neq A_{k\cdot j}$). Таким образом, максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $N_{n,\dot{x}}$ равен точно n^2, причем $\Omega^i_{jk\cdot l} = 0$, а $\Gamma^i_{jk\cdot l} \neq 0$.

ТЕОРЕМА 9. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$, то*

$$K^i_{jkl} = \delta^i_j (P_{kl} - P_{lk}) + \delta^i_k P_{jl} - \delta^i_l P_{jk}, \tag{18}$$

причем

$$S_{\alpha\beta\cdot\delta} = P_{\alpha\beta\cdot\delta} - P_{\beta\alpha\cdot\delta} = 0, \quad S_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}.$$

Доказательство. Если предположить, что $S_{\alpha\beta\cdot\delta} \neq 0$, то приходим к шести возможным случаям, из них 1—5 совпадают со случаями, приведенными при доказательстве теоремы 8. Шестой случай состоит в том, что $S_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_2} \neq 0$, а все составляющие вида $S_{\alpha.\alpha_1\cdot\alpha_3} = 0$, $S_{\alpha_2\alpha_1\cdot\alpha_2} = 0$, $S_{\alpha_1\alpha_1\cdot\alpha_2} = 0$.

Рассмотрим этот случай. Выделим минор порядка $3n-9$, составленный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_k}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_l}^{\alpha_3}$, $u_{\alpha_m}^{\alpha_1}$, $(k, l, m = 4, 5, \ldots, n)$ в уравнениях

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_l), \quad (\alpha_1\alpha_3\alpha_k), \quad (\alpha_m\alpha_2\alpha_3).$$

Этот минор с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $S_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_2}$. Следовательно, все составляющие $S_{\alpha_1\alpha_3\cdot\alpha_2} = 0$.

Если теперь в формуле (13) принять во внимание, что тензоры $D_{jkl} = 0$ и $S_{jk\cdot l} = 0$, то получим, что тензор K^i_{jkl} будет иметь структуру (18), что и требовалось доказать.

Класс пространств $N_{n,\dot{x}}$, у которых тензор $K^i_{jkl} \neq 0$ имеет структуру, отличную от (18), будем обозначать символом $V_{n,\dot{x}}$.

ТЕОРЕМА 10. *Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $V_{n,\dot{x}}$ равен $n^2 - n + 2$.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что $r \leqslant n^2 - n + 2$. Указанная в этой теореме граница точная, так как группа G_r порядка $r = n^2 - n + 2$, определенная инфинитезимальными операторами

$$p_i, \ x^i p_j, \ x^1 p_2, \ x^1 p_1 \ (i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 3, 4 \ldots, n)$$

является полной группой движений G_r пространства $V_{n,\dot{x}}$ со связностью

$$\Lambda^i_{jk} = \dot{x}^i (A_{j\cdot k} + A_{k\cdot j}), \tag{19}$$

где $A_1 = \dot{x}^2/\dot{x}^1$, $A_2 = -1$, остальные $A_i = 0$.

Тензор аффинной кривизны K^i_{jkl} пространства (19) имеет следующее строение:

$$K^i_{jkl} = \dot{x}^i P_{jkl}, \quad P_{jkl} = -P_{jlk}, \tag{20}$$

где $P_{112} = -\dot{x}^2/\dot{x}^{12}$, $P_{221} = -1/\dot{x}^1$, остальные P_{jkl} равны нулю.

ТЕОРЕМА 11. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 3$, то тензор аффинной кривизны K^i_{jkl} необходимо имеет следующее строение*:

$$K^i_{jkl} = \delta^i_k P_{jl} - \delta^i_l P_{jk}, \quad (P_{jk} = P_{kj}). \tag{21}$$

Доказательство. Из результатов работы [2, стр. 26, теорема 8] следует, что тензор $S_{\alpha\beta}(x) = P_{\alpha\beta} - P_{\beta\alpha}$ равен нулю, если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 3$.

Обратимся теперь к исследованию инвариантных при движениях тензоров типа R_{jk} при условии, что пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$.

ТЕОРЕМА 12. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$, то любой тензор R_{jk}, удовлетворяющий условиям*: 1) *тензор R_{jk} инвариантный при движениях*, 2) *степень однородности тензора R_{jk} относительно координат $\dot{x}^\alpha$ равна k $(k \neq 0)$, является симметрическим.*

Доказательство. Построим тензор

$$S_{jk} = R_{jk} - R_{kj}.$$

При предположении, что тензор $S_{jk} \neq 0$, мы приходим к следующим возможным случаям в специальной системе координат (3): 1) $S_{\alpha_1\alpha_2} \neq 0$, 2) $S_{\alpha_2\alpha_3} \neq 0$, а все составляющие вида $S_{\alpha_1\alpha_2} = 0$.

Для доказательства мы построим матрицу

$$\| T^\alpha_\beta(ij), \quad T^\alpha_\beta(ijk) \|, \tag{a}$$

где положено

$$T^\alpha_\beta(ij) = \delta^\alpha_i S_{\beta j} + \delta^\alpha_j S_{i\beta} + \delta^\alpha_{\alpha_1} S_{ij\cdot\beta},$$

$$T^\alpha_\beta(ijk) = \delta^\alpha_i S_{\beta j\cdot k} + \delta^\alpha_j S_{i\beta\cdot k} + \delta^\alpha_k S_{ij\cdot\beta} + \delta^\alpha_{\alpha_1} S_{ij\cdot k\cdot\beta}.$$

Элементами этой матрицы являются коэффициенты при функциях u^α_β в уравнениях

$$DS_{ij} = 0, \ DS_{ij\cdot k} = 0.$$

Исследуем каждый из этих случаев в отдельности.

В первом случае минор порядка $2n - 2$ матрицы (a), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_1}_{\alpha_j}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_2}$ в уравнениях

$$(\alpha_1\alpha_j),\ (\alpha_2\alpha_k),\ (\alpha_1\alpha_2\alpha_2)$$
$$(j = 2, 3, \ldots, n;\ k = 3, 4, \ldots, n),$$

с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $S_{\alpha_1\alpha_2}$.

Во втором случае минор порядка $3n - 8$ матрицы (a), составленный из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_2}_{\alpha_j}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_l}$ в уравнениях

$$(\alpha_3\alpha_j),\ (\alpha_2\alpha_3\alpha_k),\ (\alpha_2\alpha_l)$$
$$(k, l = 4, 5, \ldots, n;\ j = 2, 4, \ldots, n),$$

с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $S_{\alpha_2\alpha_3}$.

Теорема доказана.

Если инвариантный при движениях тензор Z_{jk} имеет степень однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$ нуль или вообще неоднородный, то имеет место следующий вывод.

ТЕОРЕМА 13. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 5$, то тензор Z_{jk} симметрический.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы [5].

Из этих теорем вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений Gr порядка $r > n^2 - n + 2$, то любой инвариантный при движениях антисимметрический тензор a_{jk}, степень однородности которого относительно координат $\dot{x}^\alpha$ равна k ($k \neq 0$), равен нулю.*

Следствие 2. *Если пространство $N_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - n + 5$, то любой антисимметрический тензор b_{jk}, инвариантный при движениях, равен нулю.*

Пензенский государственный
педагогический институт

Поступило
22.XI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л а п т е в Б. Л., Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления, Изв. физ.-матем. об-ва, Казань, **10**, № 3 (1938), 3—38.
[2] Е г о р о в И. П., Движения в пространствах аффинной связности, Уч. зап. Пензенского пед. ин-та, 1965, 5—179.
[3] Е г о р о в А. И., О движениях в общих пространствах путей, Уч. зап. Рязанского пед. ин-та, 1974, 32—37.
[4] Е г о р о в А. И., Пространства линейных элементов аффинной связности, допускающие группы движений максимального порядка, Исследования по геометрии и алгебре, Фрунзе, Изд-во Киргизск. ун-та, 1978, 24—42.
[5] Е г о р о в А. И., О движениях в пространствах общей аффинной связности, Докл. АН СССР, **196**, № 6 (1971), 1266—1269.