А. В. Ягжев, Об одном функциональном уравнении теоретической физики, *Функц. анализ и его прил.*, 1982, том 16, выпуск 1, 49–57

Функциональный анализ и его приложения,
1982, т. 16, вып. 1, 49—57.

УДК 519.48

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. В. Ягжев

Широко известной в аксиоматической теории поля является предложенная Гринбергом [2] модель, согласно которой гайзенберговские операторы взаимодействующего поля образуют алгебру Ли. В связи с определением структурных констант этой алгебры возникает [1] задача нахождения аналитических решений функционального уравнения

$$f(x, y) f(x+y, z)+f(y, z) f(y+z, x)+f(z, x) f(z+x, y)=0 \quad (1)$$

(x, y и z — произвольные элементы n-мерного арифметического пространства $\mathbf{C}^n$, $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел). Ввиду возможности разложения каждой аналитической функции в ряд Тейлора мы будем искать решения уравнения (1) в алгебре $\mathbf{C}[[x, y]]$ степенных рядов с комплексными коэффициентами от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

Соотношение $f * \varphi = f e^{\hat{\varphi}}$, где $\varphi \in \mathbf{C}[[x]]$, $\hat{\varphi}(x, y)=\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)$, задает действие аддитивной группы алгебры $\mathbf{C}[[x]]$ на множестве решений уравнения (1). Описание множества орбит этого действия легко извлекается из следующего описания решений уравнения (1).

Теорема. *Элемент f алгебры $\mathbf{C}[[x, y]]$ тогда и только тогда удовлетворяет соотношению* (1), *когда он имеет один из следующих двух видов*:

$$\Big\{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i(x_i-y_i)+\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{ij}(x_i y_j-x_j y_i)\Big\} e^{\hat{\varphi}(x, y)}, \quad (2)$$

где $\varphi \in \mathbf{C}[[x]]$, элементы $\alpha_i, \alpha_{ij} \in \mathbf{C}$ при $n \leqslant 2$ произвольны, а при $n \geqslant 3$ таковы, что для любой тройки индексов (i, j, k) такой, что $1 \leqslant i<j<k \leqslant n$, имеет место соотношение $\alpha_i \alpha_{jk}+\alpha_k \alpha_{ij}=\alpha_j \alpha_{ik}$;

$$\{e^{Q(x, y)}-e^{-Q(x, y)}\} e^{\hat{\varphi}(x, y)}, \quad (2')$$

где $\varphi \in \mathbf{C}[[x]]$, $Q(x, y)=\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{ij}(x_i y_j-x_j y_i)$, $\alpha_{ij} \in \mathbf{C}$.

Тот факт, что функции указанных в теореме видов действительно удовлетворяют уравнению (1), проверяется непосредственно. Доказательству отсутствия других решений посвящены два параграфа.

Автор глубоко благодарен рецензенту за критические замечания и труд, затраченный на изучение доказательства теоремы.

§ 1. Леммы

Мы начнем со следующего, неоднократно используемого в дальнейшем утверждения.

Лемма 1. *Пусть элемент $f \in \mathbf{C}[[x, y]]$ удовлетворяет соотношению* (1). *Тогда $f(y, x)=-f(x, y)$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{M}=\{\alpha \in \mathbf{Q}^+ \mid f(\alpha x, x)=0\}$, где через $\mathbf{Q}^+$ обозначено множество всех строго положительных рациональных чисел. Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}$. Полагая в соотношении (1) $y = \alpha^2 x$, $z = \alpha x$, получим, что

$$f(x, \alpha^2 x) f(x + \alpha^2 x, \alpha x) = 0,$$

откуда $\alpha^{-2} \in \mathfrak{M}$ или $\alpha + \alpha^{-1} \in \mathfrak{M}$.

Предположим теперь, что $f(x, x) \neq 0$. Полагая в соотношении (1) $x = y = z$, получим тогда, что $f(2x, x) = 0$, т. е. $2 \in \mathfrak{M}$. Предположим, что множество $\mathfrak{M}$ конечно; пусть $\beta = \max\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}} \{\alpha\}$. Так как $2 \in \mathfrak{M}$, то $\beta > 1$. Так как $\beta + \beta^{-1} \notin \mathfrak{M}$, то, согласно доказанному выше, $\beta^{-2} \in \mathfrak{M}$. Поэтому либо число $(\beta^{-2})^{-2} = \beta^4 > \beta$, либо число $\beta^{-2} + \beta^2 > \beta$ является элементом из $\mathfrak{M}$. Полученное противоречие доказывает бесконечность множества $\mathfrak{M}$.

Пусть $f = \sum\limits_{m \geqslant 0} f^{[m]}$, где для каждого m элемент $f^{[m]}$, называемый *однородной m-компонентой ряда f*, либо равен нулю, либо является однородным полиномом степени m. Тогда для каждого числа $m = 0, 1, \ldots$ и для каждого $\alpha \in \mathfrak{M}$ имеет место соотношение $f^{[m]}(\alpha x, x) = 0$. Бесконечность множества $\mathfrak{M}$ дает теперь, что элемент $f^{[m]}(tx, x)$, рассматриваемый как полином от t с коэффициентами из кольца полиномов $\mathbf{C}[x]$, равен нулю; в частности, $f^{[m]}(x, x) = 0$, откуда $f(x, x) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $f(x, x) = 0$. Полагая в соотношении (1) $z = y$, получим благодаря равенству $f(y, y) = 0$, что

$$\{f(x, y) + f(y, x)\} f(x + y, y) = 0,$$

откуда $f(y, x) = -f(x, y)$. Лемма доказана.

Следующее очевидное утверждение будет использовано также неоднократно.

Лемма 2. *Пусть L — линейная замена n переменных, $Lx_i = \sum \lambda_{ij} x_j$, $\lambda_{ij} \in \mathbf{C}$. Тогда, если ряд $f(x, y) \in \mathbf{C}[[x, y]]$ удовлетворяет соотношению* (1), *то элемент $f(Lx, Ly)$ также удовлетворяет этому соотношению (считается, что $Ly_i = \sum \lambda_{ij} y_j$).*

Непосредственным следствием леммы 1 и известного утверждения о каноническом виде кососимметрической билинейной формы на конечномерном линейном пространстве является

Лемма 3. *Предположим, что отличная от нуля квадратичная форма $Q(x, y)$ удовлетворяет соотношению* (1). *Тогда существует линейная невырожденная замена переменных L такая, что $Q(Lx, Ly) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} [x, y]_i$, где $m \leqslant n/2$, и для каждого целого i, $1 \leqslant i \leqslant n/2$, $[x, y]_i = x_{2i-1} y_{2i} - x_{2i} y_{2i-1}$.*

Лемма 4. *Предположим, что для однородного полинома $g \in \mathbf{C}[x, y]$, $\deg g > 1$, имеют место соотношения*

$$g(x, y) + g(x + y, z) = g(x, z) + g(x + z, y), \tag{3}$$

$$g(x, y) + g(x, z) + g(y, z + x) = g(y, x) + g(y, z) + g(x, y + z). \tag{4}$$

Тогда существует полином $\psi \in \mathbf{C}[x]$ такой, что $g = \hat{\psi}$.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $g \neq 0$. Приравнивая коэффициенты при z_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, в левой и правой частях соотношения (3), рассматриваемых как полиномы от z, найдем, что

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y_i}(x + y, 0) - \frac{\partial g}{\partial y_i}(x, 0). \tag{5}$$

Заметим, что если $g(x, y) = g_i(x, y) + G_i(x, y)$, где g_i — однородный степени $s_i > 0$ относительно x_i полином, $\deg_{x_i} G_i < s_i$, то, полагая $g_i^* = \hat{\psi}_i$, где однородный полином $\psi_i \in x_i \mathbf{C}[x]$ таков, что $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_i}(x, 0)$, получим, поскольку полином g_i^* удовлетворяет соотношению (3) (а значит, и (5)), что $\deg_{x_i}(g_i - g_i^*) < s_i$, откуда $\deg_{x_i}(g - g_i^*) < \deg_{x_i} g$. Благодаря линейности соотношения (3) относительно элемента g, с помощью индукции по числу переменных x_j, входящих в полином g, получим, применяя еще сделанное замечание для проведения индукции по числу $\deg_{x_i}$ для соответствующего $i \in \{1, \ldots, n\}$, существование однородных элементов $\psi \in \mathbf{C}[x]$ и $G \in \mathbf{C}[y]$ таких, что

$$g(x, y) = \hat{\psi}(x, y) + G(y). \tag{6}$$

Поскольку элемент $g_* = \hat{\psi}$ удовлетворяет соотношению (4), в силу соотношения (6) имеем

$$G(y) + G(z + x) = G(x) + G(y + z). \tag{7}$$

Полагая в соотношении (7) $x = 2y$, $z = -y$, получим $(2^{\deg g} - 2)\,G(y) = 0$, откуда, поскольку $\deg g > 1$, имеем $G(y) = 0$. Соотношение (6) теперь показывает, что $g = \hat{\psi}$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Предположим, что для элемента $f \in \mathbf{C}[[x, y]]$, удовлетворяющего соотношению* (1), *нижняя степень $l(f) = 1$. Тогда существуют ряд $\varphi \in \mathbf{C}[[x]]$ и полином $f_*(x, y)$, $\deg f_* \leqslant 2$, такие, что $f(x, y) = f_*(x, y)e^{\widehat{\varphi}}$.*

Доказательство. Благодаря леммам 1 и 2 мы без ограничения общности можем и будем считать, что $f(x, y) = (x_1 - y_1) + G(x, y)$, где $l(G) \geqslant 2$. Пусть $f(x, y) = f_*(x, y) + F(x, y)$, где f_* — полином, $\deg f_* \leqslant 2$, а для ряда $F \in \mathbf{C}[[x, y]]$ имеет место соотношение $l(F) \geqslant 3$. Индукцией по числу $m \geqslant 0$ следующим образом определим последовательность $\{\varphi_m\}$ элементов алгебры $\mathbf{C}[x] \subseteq \mathbf{C}[[x]]$. Положим $\varphi_0 = 0$ и предположим, что для некоторого числа $m = k \geqslant 0$ элемент $\varphi_k \in \mathbf{C}[x]$ уже определен, причем

$$f(x, y)\exp\hat{\varphi}_k = f_*(x, y) + F_k(x, y), \tag{8}$$

где $l(F_k) \geqslant 3$. Если $F_k = 0$, то полагаем $\varphi_{k+1} = \varphi_k$. Если же $F_k \neq 0$, то $F_k = h + H$ (индекс k в правой части последнего равенства опущен для упрощения дальнейших формул), где h — отличный от нуля однородный полином, $3 \leqslant \deg h < l(H)$.

Напомним, что для произвольного ряда ψ определена его естественная норма $\|\psi\| = 2^{-l(\psi)}$. Пусть σ — (непрерывный относительно естественной нормы) автоморфизм алгебры $\mathbf{C}[[x, y, z]]$, определенный соотношениями $\sigma x_i = y_i$, $\sigma y_i = z_i$, $\sigma z_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ (для каждого ряда $H \in \mathbf{C}[[x, y, z]]$ через σH обозначается его образ при автоморфизме σ). Определим эндоморфизм $\mathfrak{S}$ линейного $\mathbf{C}$-пространства $\mathbf{C}[[x, y, z]]$ соотношением $\mathfrak{S}H = H + \sigma H + \sigma^2 H$, $H \in \mathbf{C}[[x, y, z]]$.

Поскольку элемент $f(x, y)$ удовлетворяет соотношению (1), левая часть равенства (8) также удовлетворяет этому соотношению, так что

$$\mathfrak{S}g(x, y)g(x + y, z) = 0, \tag{9}$$

где $g = f_* + h + H$. Вычисляя однородную $(1 + \deg h)$-компоненту левой части соотношения (9), получим

$$\mathfrak{S}\{(x_1 - y_1)h(x + y, z) + (x_1 + y_1 - z_1)h(x, y)\} = 0. \tag{10}$$

Поскольку коэффициент при z_1 в левой части соотношения (10), рассматриваемой как полином от z с коэффициентами из кольца $\mathbf{C}[x, y]$, равен нулю, получим с помощью соотношения $h(y, x) = -h(x, y)$, выполненного в силу леммы 1, и легко выводимого из соотношения (9) равенства $h(x, 0) = 0$ (сначала следует убедиться, что $g(x, 0) = 0$), что

$$(x_1 - y_1)\frac{\partial h}{\partial y_1}(x + y, 0) - y_1\frac{\partial h}{\partial y_1}(x, y) + (y_1 - x_1)\frac{\partial h}{\partial y_1}(y, 0) + \\ + h(x, y) - x_1\frac{\partial h}{\partial x_1}(x, y) - (x_1 - y_1)\frac{\partial h}{\partial y_1}(x, 0) = 0. \tag{11}$$

Пусть $h = \sum\limits_{s \geqslant 0} h_*^{[s]}$, где для каждого числа $s \geqslant 0$ через $h_*^{[s]}$ обозначена однородная s-компонента полинома h относительно совокупности переменных $\{x_1, y_1\}$. В силу теоремы Эйлера об однородных функциях

$$x_1\frac{\partial h_*^{[s]}}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial h_*^{[s]}}{\partial y_1} = sh_*^{[s]}. \tag{12}$$

Полагая $\psi^{[s]}(x) = (s-1)^{-1}\frac{\partial h_*^{[s]}}{\partial y_1}(x, 0)$, из соотношений (11), (12) получим, что для всех $s \neq 1$ справедливо соотношение

$$h_*^{[s]}(x, y) = (x_1 - y_1)\hat{\psi}^{[s]}(x, y). \tag{13}$$

Полагая $\psi_*(x) = \sum\limits_{s \neq 1} \psi^{[s]}(x)$, получим в силу (13), что

$$h(x, y) = (x_1 - y_1)\hat{\psi}_*(x, y) + x_1 p + y_1 q, \tag{14}$$

где $p, q \in \mathrm{C}[x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n]$. Из соотношения $h(y, x) = -h(x, y)$ следует, что

$$q(x, y) = -p(y, x). \tag{15}$$

Поскольку первое слагаемое из правой части соотношения (14) удовлетворяет соотношению вида (10), элемент $x_1 p + y_1 q$ также удовлетворяет соотношению вида (10); рассматривая в левой части последнего соотношения коэффициенты при x_1^2 и $x_1 y_1$ (являющиеся элементами кольца $\mathrm{C}[x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n]$), получим из соотношения (15), что элемент p удовлетворяет соотношениям вида (3), (4). Согласно лемме 3 для подходящего полинома $\psi \in \mathrm{C}[x_2, \ldots, x_n]$ имеет место соотношение

$$p = \hat{\psi}. \tag{16}$$

Полагая $\Psi_k(x) = \psi_*(x) + \psi(x)$, получим, благодаря соотношениям (14) — (16), что

$$h(x, y) = (x_1 - y_1)\hat{\Psi}_k(x, y). \tag{17}$$

Положив $\varphi_{k+1} = \varphi_k - \Psi_k$, завершим индуктивное построение последовательности $\{\varphi_m\}$.

Наше построение показывает, что существует предел (относительно естественной нормы) последовательности $\{\varphi_m\}$; обозначим этот предел через $\varphi(x) = \lim\limits_{m \to \infty} \varphi_m$. Определяя для произвольного натурального k элемент $F_k \in \mathrm{C}[[x, y]]$ соотношением (8), получим, согласно соотношению (17), что $\lim\limits_{k \to \infty} F_k = 0$. Переходя теперь в соотношении (8) к пределу при $k \to \infty$, получим утверждение леммы. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть $f(x, y)$ — отличный от нуля однородный полином, удовлетворяющий соотношению* (1). *Тогда* $\deg f \leqslant 2$.

Доказательство. Разберем случай $n = 2$; предположим, что $d = \deg f \geqslant 3$. Полагая $m = \deg_{\{x_1, x_2\}} f$, в силу леммы 1 получим, что $m \geqslant 2$. Пусть

$$f(x, y) = \sum_{p,q} \alpha_{pq} x_1^m y_1^p y_2^q + \sum_{s,t} \beta_{st} x_1^{m-1} y_1^s y_2^t + \sum_{k,l} \gamma_{kl} x_1^{m-1} x_2 y_1^k y_2^l + h(x, y),$$

где α_{pq}, β_{st}, $\gamma_{kl} \in \mathbf{C}$, $\deg_{x_1} h < m - 1$. Лемма 2 позволяет считать, что хотя бы один из коэффициентов α_{pq} отличен от нуля $\Big($если $f(x, y) = \sum x_1^i x_2^j w_{ij}(y_1, y_2)$, $w_{ij} \in \mathbf{C}[y]$, то для каждого элемента $\xi \in \mathbf{C}$ справедливо соотношение

$$f(x_1, x_2 + \xi x_1, y_1, y_2 + \xi y_1) = x_1^m \sum_{i+j=m} \xi^j w_{ij}(y_1, y_2 + \xi y_1) + f_*,$$

где $\deg_{x_1} f_* < m$, и если бы $\sum\limits_{i+j=m} \xi^j w_{ij}(y_1, y_2 + \xi y_1) \equiv 0$, то $\sum\limits_{i+j=m} \xi^j w_{ij}(y_1, y_2) \equiv 0\Big)$. Пусть

$$n_2 = \min\{q \mid \alpha_{d-m-q,\, q} \neq 0\}, \tag{18}$$

$n_1 = d - m - n_2$. Рассматривая левую часть соотношения

$$f(x, y) f(x + y, z) - f(y, z) f(x, y + z) - f(x, z) f(x + z, y) = 0 \tag{1'}$$

как полином от x_1, вычислим сначала коэффициент при мономе x_1^{2m-1}. Используя соотношение (18), затем получим, что коэффициент при мономе $x_1^{2m-1} y_1^{n_1+1} y_2^{n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ в левой части соотношения (1′) равен $m\alpha_{n_1 n_2}^2$. Поскольку этот коэффициент равен нулю, $\alpha_{n_1, n_2} = 0$ вопреки соотношению (18). Полученное противоречие показывает, что $\deg f \leqslant 2$.

Общий случай разбирается совершенно аналогично случаю $n = 2$ (следует рассмотреть коэффициент при мономе $x_1^{2m-1} y_1 w(y) w(z)$, где $m = \deg_x f$, а w — подходящий моном). Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть m — целое число, $1 \leqslant m \leqslant n/2$, и пусть $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} [x, y]_i$, где $[x, y]_i = x_{2i-1} y_{2i} - x_{2i} y_{2i-1}$. Если однородный полином $h \in \mathbf{C}[x, y]$, $\deg h > 2$, удовлетворяет соотношениям $h(y, x) = -h(x, y)$ и*

$$\mathfrak{S}\,\{\langle x, y\rangle h(x + y, z) + \langle x + y, z\rangle h(x, y)\} = 0, \tag{19}$$

то $\langle x, y\rangle \mid h$ (полином $\langle x, y\rangle$ делит h).

Доказательство. Вычисление однородной 1-компоненты относительно z у левой части соотношения (19) приводит к соотношениям

$$h(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial y_i}(x, 0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

а вычисление однородной 2-компоненты (с учетом (20)) — к соотношению

$$\langle x, z\rangle \sum_i z_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + \langle y, z\rangle \sum_i z_i \frac{\partial h}{\partial y_i} = \langle x, y\rangle S, \tag{21}$$

где $S \in \mathbf{C}[x, y, z]$. Используя соотношение $x_1 = y_2^{-1} \langle x, y\rangle + y_2^{-1} \Big\{x_2 y_1 - \sum\limits_{1 < i \leqslant m} [x, y]_i\Big\}$, получим, что в кольце $A = P[x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n]$, где $P = \mathbf{C}(y_2)$, имеет место соотношение

$$h(x, y) = \langle x, y\rangle g(x, y) + R(x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n).$$

Приравнивая коэффициенты при z_1^2 в обеих частях равенства (21), получим, что в кольце A $\langle x, y\rangle \mid x_2 \frac{\partial h}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial h}{\partial y_1}$, откуда $\langle x, y\rangle \mid y_2 \frac{\partial R}{\partial y_1}$, следовательно, $\frac{\partial R}{\partial y_1} = 0$,

$$h(x, y) = \langle x, y\rangle g(x, y) + R(x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n);$$

приравнивая в соотношении (21) коэффициенты при z_2^2, аналогично получаем $\frac{\partial R}{\partial x_2}=\frac{\partial R}{\partial y_2}=0$ $\Big($в особом случае $m=1$ элемент $R=h\Big(\frac{x_2}{y_2}y_1, x_2, x_3,\ldots$ $\ldots, y_1, y_2, y_3,\ldots\Big)$, как доказано выше, не зависит от y_1 и, следовательно, равен $h(0, x_2, x_3,\ldots, 0, y_2, y_3,\ldots)$, т. е. является полиномом; из соотношения $x_2\frac{\partial R}{\partial x_2}+y_2\frac{\partial R}{\partial y_2}=0$ с помощью теоремы Эйлера об однородных функциях, примененной для совокупности $\{x_2, y_2\}$, получаем $\frac{\partial R}{\partial x_2}=\frac{\partial R}{\partial y_2}=0\Big)$,

$$h(x, y)=\langle x, y\rangle g(x, y)+R(x_3,\ldots, x_n, y_3,\ldots, y_n);$$

при этом ясно, что $R\in \mathbf{C}[x, y]$, откуда и $g\in\mathbf{C}[x, y]$. Рассматривая для произвольного i, $1<i\leqslant m$, коэффициенты при z_2z_{2i-1} и z_2z_{2i} в соотношении (21), аналогично предыдущему получим

$$h(x, y)=\langle x, y\rangle g(x, y)+R(x_{2m+1}, y_{2m+1},\ldots).$$

Рассматривая для произвольного $j>2m$ коэффициенты при z_2z_j в соотношении (21), получим $\frac{\partial R}{\partial x_j}=\frac{\partial R}{\partial y_j}=0$. Таким образом, $R=0$, $\langle x, y\rangle \mid h$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Каждый однородный элемент $g\in\mathbf{C}[x, y]$, удовлетворяющий соотношениям $g(y, x)=g(x, y)$ и*

$$\mathfrak{S}\langle x, y\rangle\langle x+y, z\rangle\{g(x, y)+g(x+y, z)\}=0, \qquad (22)$$

имеет вид $c\langle x, y\rangle^2+\hat{\varphi}$, где $\varphi\in\mathbf{C}[x]$, $c\in\mathbf{C}$, причем $c=0$ в случае $\deg g\neq 4$.

Доказательство. Можно считать, что $\deg g>0$. Обозначая через $\langle g\rangle$ левую часть соотношения (22), вычисляя $\langle g\rangle_z^2$ — ее однородную 2-компоненту относительно z и полагая $y=2x$, получим $g(x, 0)=0$, что вместе с равенством $\langle g\rangle_z^2=0$ дает для элемента g соотношение

$$\langle x+y, z\rangle\sum_i z_i\frac{\partial g}{\partial y_i}(x+y, 0)-\langle y, z\rangle\sum_i z_i\left\{\frac{\partial g}{\partial y_i}(y, 0)+\frac{\partial g}{\partial y_i}(x, y)\right\}-$$
$$-\langle x, z\rangle\sum_i z_i\left\{\frac{\partial g}{\partial y_i}(x, 0)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(x, y)\right\}=0. \qquad (23)$$

Вычисляя коэффициент при z_2^2 у левой части соотношения (23), получим

$$x_1\frac{\partial g}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial g}{\partial y_2}=\hat{\psi}, \qquad (24)$$

где $\psi(x)=x_1\frac{\partial g}{\partial y_2}(x, 0)$. Пусть элемент $b\in\mathbf{C}[x]$ таков, что $\frac{\partial b}{\partial x_2}=\frac{\partial g}{\partial y_2}(x, 0)$. Тогда $x_1\frac{\partial\hat{b}}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial\hat{b}}{\partial y_2}=\hat{\psi}$, следовательно, согласно (24), полином $h=g-\hat{b}$ удовлетворяет соотношению $x_1\frac{\partial h}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial h}{\partial y_2}=0$. Рассматривая однородные относительно совокупности $\{x_2, y_2\}$ компоненты полинома h, с использованием соотношения $y_2=\left(y_2-\frac{y_1}{x_1}x_2\right)+\frac{y_1}{x_1}x_2$ и однозначности разложения элементов на простые множители в произвольном кольце полиномов над полем, получаем соотношение

$$h(x, y)=\sum_{q\geqslant 0}c_q[x, y]_1^q, \qquad c_q\in\mathbf{C}[x_1, y_1, x_3, y_3,\ldots].$$

Полагая $c_q = a_q + c_q^*$, где $a_q \in \mathbf{C}[x_3, y_3, \ldots, x_n, y_n]$, $l_{\{x_1, y_1\}}(c_q^*) \geqslant 1$ для всех $q \geqslant 0$, получим

$$h(x, y) = \sum_{q \geqslant 0} a_q [x, y]_1^q + H(x, y), \tag{25}$$

где $H = \sum c_q^* [x, y]_1^q$. Вычисляя коэффициент при $z_1 z_2$ в соотношении (23), получим

$$x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial h}{\partial y_1} - x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial h}{\partial y_2} = \widehat{\Psi}, \tag{26}$$

где $\Psi(x) = x_2 \frac{\partial h}{\partial y_2}(x, 0) - x_1 \frac{\partial h}{\partial y_1}(x, 0)$. Из соотношений (25), (26) следует, что

$$x_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial H}{\partial y_1} - x_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial H}{\partial y_2} = \widehat{\Psi}. \tag{27}$$

Выделяя в однородных относительно совокупности переменных $\{x_2, y_2\}$ компонентах полинома H однородные относительно совокупности $\{x_1, y_1\}$ компоненты, с помощью соотношения (27) и теоремы Эйлера об однородных функциях получим, что $H = \widehat{c}$, где $c \in \mathbf{C}[x]$. Определение элемента h и соотношение (25) показывают, что

$$g(x, y) = \sum_{q \geqslant 0} a_q [x, y]_1^q + \widehat{\Omega}_1, \tag{28}$$

где $\Omega_1 = b + c$. Поскольку элементы вида $\widehat{\omega}$ удовлетворяют условию доказываемой леммы, то же справедливо для элемента

$$g_1 = \sum_{q \geqslant 0} a_q [x, y]_1^q.$$

Обозначим через $(23)_1$ соотношение, получающееся из (23) заменой символа g_2 на g_1. Вычисляя (в случае $m \geqslant 2$) коэффициент при z_4^2 у левой части соотношения $(23)_1$ и повторяя (с очевидными переобозначениями) вычисления предыдущего абзаца, получим, что $g_1 = \sum_{q_1, q_2} a_{q_1 q_2} [x, y]_1^{q_1} [x, y]_2^{q_2} + \widehat{\Omega}_2$, откуда благодаря соотношению (28)

$$g(x, y) = \sum_{q_1, q_2} a_{q_1 q_2} [x, y]_1^{q_1} [x, y]_2^{q_2} + \widehat{\Omega}_1 + \widehat{\Omega}_2,$$

и т. д. Таким образом,

$$g(x, y) = \sum_{\alpha} a_\alpha [x, y]^\alpha + \widehat{\Omega}, \tag{29}$$

где $\Omega = \Omega_1 + \ldots + \Omega_m \in \mathbf{C}[x]$, суммирование ведется по всем целочисленным наборам $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $[x, y]^\alpha = [x, y]_1^{\alpha_1} \ldots [x, y]_m^{\alpha_m}$, $a_\alpha \in \mathbf{C}[x_j, y_j \mid j > 2m]$. Рассмотрение элементов, которые для каждого $i = 1, \ldots, m$ однородны степени α_i по совокупности переменных $\{x_{2i-1}, x_{2i}, y_{2i-1}, y_{2i}, z_{2i-1}, z_{2i}\}$ показывает, что для всех α

$$\langle a_\alpha [x, y]^\alpha \rangle = 0. \tag{30}$$

Для каждого α элемент $g_\alpha = a_\alpha [x, y]^\alpha$ удовлетворяет соотношению вида (23), которое обозначим через $(23)_\alpha$.

Полагая для краткости $\alpha = 0$ в случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$, из соотношения $(23)_0$ получаем, что для всех $i > 2m$ имеют место соотношения

$$\frac{\partial g_0}{\partial y_i}(x + y, 0) = \frac{\partial g_0}{\partial y_i}(y, 0) + \frac{\partial g_0}{\partial y_i}(x, y), \qquad \frac{\partial g_0}{\partial y_i}(x + y, 0) =$$
$$= \frac{\partial g_0}{\partial y_i}(x, 0) + \frac{\partial g_0}{\partial x_i}(x, y),$$

из которых в силу теоремы Эйлера об однородных функциях следует, что $g_0 = (\deg g_0)^{-1}\hat{\omega}$, где $\omega(x) = \sum\limits_{i>2m} x_i \frac{\partial g_0}{\partial y_i}(x, 0)$. Соотношение (29) теперь дает

$$g(x, y) = \sum_{|\alpha|\geqslant 1} a_\alpha [x, y]^\alpha + \hat{\varphi}, \tag{31}$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, $\varphi = \Omega + \omega$. Если элемент α таков, что $a_\alpha \neq 0$, $|\alpha| \geqslant 1$, то рассмотрение однородной относительно совокупности переменных $\{z_i \mid i > 2m\}$ 1-компоненты у левой части соотношения $(23)_\alpha$ дает

$$\langle y, z\rangle \sum_{i>2m} z_i \frac{\partial a_\alpha}{\partial y_i} + \langle x, z\rangle \sum_{i>2m} z_i \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} = 0,$$

откуда $a_\alpha \in C$ и в силу (30) $\langle [x, y]^\alpha\rangle = 0$; полагая теперь $z = x + 2y$, получим

$$\{2 + 3[(-1)^{|\alpha|} + (-3)^{|\alpha|}] - 4[(-2)^{|\alpha|} + 2^{|\alpha|}]\} \langle x, y\rangle^2 [x, y]^\alpha = 0,$$

откуда $|\alpha| = 2$, что благодаря (31) доказывает лемму для случая $\deg g \neq 4$. Если же $\deg g = 4$, то $g = \sum a_{ij} [x, y]_i [x, y]_j + \hat{\varphi}$, $a_{ij} \in C$. Если хоть один из коэффициентов a_{ii} отличен от нуля, скажем $a_{11} \neq 0$, то, выделяя полный квадрат и пользуясь линейностью соотношения (22) относительно g, сводим рассмотрение к случаю $g = \sum\limits_{i\leqslant j} a_{ij} [x, y]_i [x, y]_j$, $a_{11} = 0$; покажем, что в этом случае $g = 0$. Мы можем и будем при этом считать, что $m = 2$; рассмотрение однородной 1-компоненты относительно $\{x_3, y_3, z_3\}$ показывает, что $\langle a_{12} [x, y]_1 [x, y]_2\rangle = 0$, откуда $a_{12} = 0$. Остается заметить, что элемент $[x, y]_2^2$ не удовлетворяет соотношению вида (22), так как в противном случае такому же соотношению удовлетворял бы элемент $2h_1h_2 = (h_1 + h_2)^2 - h_1^2 - h_2^2$, $h_i = [x, y]_i$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Если полином h удовлетворяет условию леммы 7, то* $h = \langle x, y\rangle \{c \langle x, y\rangle^2 + \hat{\varphi}\}$, *причем $c = 0$ в случае* $\deg h \neq 6$.

Доказательство. По лемме 7 имеем $h = \langle x, y\rangle g$, и остается применить к элементу g лемму 8.

§ 2. Завершение доказательства теоремы

Пусть элемент f удовлетворяет соотношению (1). По лемме 6 $l(f) \leqslant 2$. Если $l(f) \leqslant 1$, то достаточно применить леммы 1, 5. Пусть поэтому $l(f) = 2$. Согласно леммам 2, 3 можно считать, что $f = \langle x, y\rangle + F$, где $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m} [x, y]_i$, $l(F) \geqslant 3$. Можно, конечно, считать также, что $F \neq 0$, $F = h + H$, где h — однородный полином, $3 \leqslant \deg h < l(F)$. Рассмотрение однородной $(2 + \deg h)$-компоненты левой части соотношения (1) с учетом леммы 1 показывает, что элемент h удовлетворяет условию леммы 7. В силу леммы 9 для некоторых элементов $c \in C$, $\varphi_* \in C[x]$

$$f(x, y) \exp(-\hat{\varphi}_*) = \langle x, y\rangle + c \langle x, y\rangle^3 + R, \tag{32}$$

где $l(R) > 6$. Взяв в случае $c \neq 0$ элемент $\varepsilon \in C$ со свойством $\varepsilon^2 = 6c$, положим

$$g(x, y) = \begin{cases} \langle x, y\rangle, & \text{если } c = 0, \\ \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\{e^{\varepsilon\langle x, y\rangle} - e^{-\varepsilon\langle x, y\rangle}\}, & \text{если } c \neq 0. \end{cases} \tag{33}$$

Индукцией по числу $s \geqslant 6$ построим последовательность полиномов $\{\psi_s(x)\}$, $l(\psi_s) \geqslant 1$, таких, что

$$l(f_* - g \exp \hat{\psi}_s) > s, \tag{34}$$

где $f_* = f \exp(-\hat{\varphi}_*)$. В силу соотношений (32), (33) можно положить $\psi_6 = 0$. Предположим, что при некотором $s = m \geqslant 6$ элемент ψ_m уже построен. Пусть $f_*^{[m+1]}$ и $G_m^{[m+1]}$ — однородные $(m+1)$-компоненты элементов f_* и $G_m = g \exp \hat{\psi}_m$ соответственно. Поскольку при $s = m$ соотношение (34) выполнено, а элементы f_* и G_m удовлетворяют равенствам вида (1), сравнение однородных $(m+3)$-компонент левых частей этих равенств благодаря аддитивности отображения $h \to \langle h \rangle$ дает $\langle f_*^{[m+1]} - G_m^{[m+1]} \rangle = 0$. По лемме 9 имеем $f_*^{[m+1]} - G_m^{[m+1]} = \langle x, y \rangle \hat{\omega}_m$, где ω_m — однородный полином из $\mathbf{C}[x]$. Положим $\psi_{m+1} = \psi_m + \omega_m$.

Из данного определения следует, что существует предел (относительно естественной нормы) $\psi(x) = \lim\limits_{s\to\infty} \psi_s(x)$. Переходя к пределу при $s \to \infty$ в соотношении (34), получим $f_* = g \exp \hat{\psi}$, откуда $f = g \exp \hat{\varphi}$, где $\varphi = \varphi_* + \psi$. Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Боков О. Г.* Модель полей Ли и многовременные запаздывающие функции Грина электромагнитного поля в диэлектрических средах.— Научн. тр. Новосиб. госуд. пед. ин-та, 1973, вып. 86, с. 3—9.
2. *Greenberg O. W.* Generalized free fields and models of local fields theory.— Ann. Phys., 1961, v. 16, № 2, p. 158—176.

Хабаровский политехнический институт

Поступила в редакцию 2 декабря 1980 г.