Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначёв, О неравенстве Харнака для $p(x)$-лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, 2019, выпуск 32, 8–56

Ю. А. Алхутов, М. Д. Сурначёв*

О НЕРАВЕНСТВЕ ХАРНАКА ДЛЯ $p(x)$-ЛАПЛАСИАНА С ДВУХФАЗНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ $p(x)$**

Посвящается светлой памяти
Василия Васильевича Жикова

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Настоящая работа посвящена исследованию локальной регулярности решений уравнения

$$Lu = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\right) = 0 \tag{1.1}$$

с измеримым показателем p, таким, что

$$1 < p_1 \leqslant p(x) \leqslant p_2 \quad \text{для почти всех} \quad x \in D. \tag{1.2}$$

В. В. Жиков [1, 2] был основоположником систематического изучения уравнений такого вида, связанных с ними функциональных пространств, краевых задач и интегральных функционалов. Исследования Жикова в этом направлении были мотивированы задачами усреднения интегральных функционалов с интегрантами вида $|\nabla u|^{p(x)}$ с переменным показателем $p(x)$. Аналогичные уравнения также нашли широкое применение в задачах моделирования электрореологических и термореологических жидкостей, меняющих свои свойства под действием электромагнитного поля или температуры [3—5]. За последние годы вышел ряд монографий, посвященных математической теории уравнений и пространств с переменным показателем нелинейности [6—8].

**Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (задание № 1.3270.2017/4.6).

Отметим прекрасную обзорную статью В. В. Жикова [9], а также его последнюю книгу [10].

Для определения понятия решения уравнения (1.1) введем класс функций
$$W(D) = \Big\{ u \in W^{1,1}(D) \colon |\nabla u|^{p(x)} \in L^1(D) \Big\},$$
где $W^{1,1}(D)$ — соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка. Будем говорить, что последовательность $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \to u$ в $L^1(D)$ и выполняется
$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_D |\nabla u - \nabla u_j|^{p(x)}\, dx = 0. \tag{1.3}$$
По теореме Шеффе или Рисса последняя сходимость эквивалентна сходимости ∇u_j к ∇u почти всюду в D вместе со сходимостью энергий
$$\int\limits_D |\nabla u_j|^{p(x)}\, dx \to \int\limits_D |\nabla u|^{p(x)}\, dx.$$

Скажем, что $u \in W(D)$ принадлежит классу $W_0(D)$, если существует последовательность функций $u_j \in W(D)$ с компактным носителем в D, такая, что выполнено (1.3). Будем говорить, что последовательность $u_j \in W_0(D)$ сходится в $W_0(D)$ к функции $u \in W_0(D)$, если выполнено (1.3).

Определим также классы функций $H(D)$ и $H_0(D)$, являющиеся пополнениями в $W(D)$ и $W_0(D)$ гладких в D функций относительно введенных сходимостей:
$$H(D) = \big\{ u \in W(D) \colon \exists\, u_j \in C^\infty(D) \cap W(D),\ u_j \to u \text{ в } W(D) \big\},$$
$$H_0(D) = \big\{ u \in W(D) \colon \exists\, u_j \in C_0^\infty(D),\ u_j \to u \text{ в } W_0(D) \big\}.$$

Из результатов работы В. В. Жикова [2] следует, что одного только предположения (1.2) недостаточно для плотности гладких функций в классах $W(D)$ и $W_0(D)$. Плотность гладких функций в данных классах обеспечивается выполнением известного логарифмического условия
$$|p(x) - p(y)| \leqslant L \left(\ln \frac{1}{|x-y|} \right)^{-1} \quad \text{при} \quad x, y \in D,\ |x-y| < \frac{1}{2}, \tag{1.4}$$
найденного В. В. Жиковым [11].

В случае отсутствия плотности гладких функций решение уравнения (1.1) и связанных с ним краевых задач может определяться в различных смыслах [2, 12].

Наиболее важными типами решений являются так называемые H-решения и W-решения. Скажем, что функция $u \in H(D)$ ($u \in W(D)$) называется H-решением (соответственно W-решением) уравнения (1.1), если интегральное тождество

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p(x)-2}\, \nabla u \cdot \nabla\psi\, dx = 0 \tag{1.5}$$

выполнено на пробных функциях $\psi \in H_0(D)$ (соответственно $\psi \in W_0(D)$). Функция $u \in H(D)$ ($u \in W(D)$) называется H-суперрешением (W-суперрешением) уравнения (1.1), если для всех неотрицательных пробных функций $\psi \in H_0(D)$ ($\psi \in W_0(D)$) выполняется

$$\int\limits_D |\nabla u|^{p(x)-2}\ \nabla u \cdot \nabla\psi\, dx \geqslant 0.$$

При выполнении логарифмического условия В. В. Жикова (1.4) решения уравнения (1.1) достаточно хорошо исследованы. В частности, для них известна гельдеровская непрерывность, неравенство Харнака [13], повышенная суммируемость градиента [4], установлен критерий регулярности граничной точки винеровского типа [14].

Если условие (1.4) глобально не выполнено, то известно меньше. Из [15] следует, что при выполнении в точке $x_0 \in D$ условия

$$|p(x) - p(x_0)| \leqslant L \left(\ln \frac{1}{|x - x_0|}\right)^{-1} \quad \text{при} \quad x \in D,\ |x - x_0| < \frac{1}{2}, \tag{1.6}$$

решение будет непрерывным по Гельдеру в этой точке. В [16] получена непрерывность решений (1.1) в точке $x_0 \in D$ при выполнении условия на показатель в точке, более слабого, чем логарифмическое:

$$|p(x) - p(x_0)| \leqslant L \frac{\ln\ln\ln \frac{1}{|x-x_0|}}{\ln \frac{1}{|x-x_0|}} \quad \text{при} \quad x \in D,\ |x - x_0| < \frac{1}{10},$$

где L достаточно мало: $L \leqslant L_0(p_1, n)$.

В. В. Жиков [17] получил обобщение логарифмического условия (1.4), которое гарантирует плотность гладких функций в соболевском пространстве. Пусть показатель p обладает модулем непрерывности ω, то есть

$$|p(x)-p(y)| \leqslant \omega(|x-y|), \quad x, y \in D, \quad |x-y|<\frac{1}{2},$$

где ω — непрерывная неубывающая функция на $[0,1/2]$, $\omega(0)=0$. Если

$$\int\limits_0^{1/2} t^{-1+n\omega(t)/\alpha}\,dt=\infty,$$

то $H=W$. Например, последнему условию удовлетворяет модуль непрерывности

$$\omega(t)=L\frac{\ln\ln(1/t)}{\ln(1/t)}, \quad 0<L<\frac{n}{p_1}.$$

В последнем случае В. В. Жиков и С. Е. Пастухова [18] установили свойство повышенной суммируемости градиента решения в классах Орлича.

Отдельный и важный для приложений пласт исследований относится к случаю, когда показатель $p(\cdot)$ наделен геометрической структурой. С анализа таких случаев и начались исследования В. В. Жикова, связанные с задачами механики композитных материалов. В известном примере В. В. Жикова [2, 11] на плоскости рассматривается кусочно-постоянный показатель, заданный как $p(x_1,x_2)=p_1\in(1,2)$ для $x_1x_2>0$, $p(x_1,x_2)=p_2>2$ для $x_1x_2<0$. В этом случае, оказывается, что $H\neq W$, то есть гладкие функции не плотны в соболевском пространстве с переменным показателем.

В [19] E. Acerbi и N. Fusco рассмотрели случай двухфазного показателя, когда две зоны разных значений показателя разделяются гиперплоскостью

$$\Sigma=\{x_n=0\}.$$

Пусть $1<p_1<p_2<\infty$ — постоянные и

$$p(x',x_n)=p_1, \quad x_n>0, \quad p(x',x_n)=p_2, \quad x_n<0, \quad x'=(x_1,\dots,x_{n-1}). \tag{1.7}$$

Тогда $H=W$, решения непрерывны по Гельдеру, выполняется свойство повышенной суммируемости градиента.

Эти результаты были обобщены в [20], где был доказан следующий результат. Будем обозначать далее

$$D^{(1)}=D\cap\{x_n>0\}, \quad D^{(2)}=D\cap\{x_n<0\}.$$

Для $x_0 \in \Sigma$ обозначим

$$p^{(i)} = \operatorname*{ess\,lim}_{D^{(i)} \ni x \to x_0} p(x), \quad i = 1, 2. \tag{1.8}$$

Пусть пересечение D и Σ не пусто и показатель $p(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$\left|p(x) - p^{(i)}\right| \leqslant L \left(\ln \frac{1}{|x - x_0|}\right)^{-1} \quad \text{при} \quad x \in D^{(i)}, \ |x - x_0| < \frac{1}{2} \tag{1.9}$$

для $i = 1, 2$. Тогда решение непрерывно по Гельдеру в точке x_0. Под решением здесь может пониматься как H-решение, так и W-решение. При этом отсутствуют какие-либо ограничения на величину скачка $p^{(2)} - p^{(1)}$.

Далее через $B_R^{x_0}$ будем обозначать шар с центром в точке x_0 радиуса R,

$$Q_R^{x_0} = B_R^{x_0} \cap \left\{x_n < -\frac{R}{2}\right\}. \tag{1.10}$$

Для точки $x \in D$ будем обозначать через $\tilde{x}$ отражение x относительно Σ: для $x = (x', x_n)$ имеем $\tilde{x} = (x', -x_n)$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Для функции u через $\tilde{u}$ будем обозначать четное продолжение u из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$, то есть $\tilde{u}(x) = u(x)$ для $x \in D^{(2)}$, $\tilde{u}(x) = u(\tilde{x})$ для $x \in D^{(1)}$.

Напомним, что для p-лапласиана с постоянным показателем $p > 1$ хорошо известно классическое неравенство Харнака [21,22]. Пусть u — неотрицательное решение (1.1) в $B_{4R}^{x_0}$. Тогда

$$\sup_{B_R^{x_0}} u \leqslant C(n, p) \inf_{B_R^{x_0}} u. \tag{1.11}$$

Если показатель удовлетворяет логарифмическому условию Жикова (1.4), то неравенство Харнака выполнено в следующей форме [13]:

$$\sup_{B_R^{x_0}} u \leqslant C\Big(\inf_{B_R^{x_0}} u + R\Big), \quad C = C\Big(n, p_1, p_2, L, \sup_{B_R^{x_0}} u\Big). \tag{1.12}$$

В ситуации [19] (показатель задан (1.7)) неравенство Харнака в классической форме (1.11) или в форме (1.12) на Σ невозможно [23]. В последней работе было доказано неравенство Харнака в следующей форме. Пусть показатель p определяется как (1.7), где $p_1 < p_2$, $x_0 \in \Sigma$, u — неотрицательное решение (1.1) в $B_{8R}^{x_0}$. Тогда (определение $Q_R^{x_0}$ см. (1.10))

$$\sup_{Q_R^{x_0}} u \leqslant C(n, p_1, p_2)\Big(\inf_{B_R^{x_0}} u + R\Big). \tag{1.13}$$

В [24] неравенство Харнака в форме (1.13) было доказано для достаточно малых R при условии

$$p(x) \geqslant p(\tilde{x}) \quad \text{для} \quad x \in D^{(2)} \tag{1.14}$$

и выполнении условия (1.4) в каждой из областей $D^{(i)}$, то есть

$$|p(x) - p(y)| \leqslant L\left(\ln \frac{1}{|x-y|}\right)^{-1} \quad x, y \in D^{(i)}, \quad |x-y| < \frac{1}{2}. \tag{1.15}$$

Целью настоящей работы является обобщение результатов [24]. Далее под решением (суперрешением) уравнения (1.1) мы понимаем либо H-решения (H-суперрешения), либо W-решения (W-суперрешения). Так как рассматриваемые функции лишь измеримы, при работе с ними надо вместо точных верхней и нижней грани, осцилляции, предела рассматривать существенные точные верхние и нижнюю грани, существенную осцилляцию, существенный предел. Для краткости вместо $\operatorname{ess\,sup}$, $\operatorname{ess\,inf}$ и $\operatorname{ess\,osc}$ будем писать $\sup$, $\inf$ и osc. Далее полагаем $x_0 \in \Sigma$, $0 < R \leqslant 1/32$.

Теорема 1.1. *Пусть u — неотрицательное ограниченное решение уравнения* (1.1) *в шаре $B_{8R}^{x_0}$, выполнены условия* (1.2) *и*

$$\operatorname*{osc}_{B_{8R}^{x_0}} p \leqslant \frac{L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)}. \tag{1.16}$$

Тогда

$$\sup_{B_R^{x_0}} u \leqslant C(n, p_1, p_2, L, M)\Bigl(\inf_{B_R^{x_0}} u + R\Bigr), \quad M = \sup_{B_{8R}^{x_0}} u. \tag{1.17}$$

Теорема 1.2. *Пусть u — неотрицательное ограниченное решение уравнения* (1.1) *в шаре $B_{8R}^{x_0}$, выполнены условия* (1.2) *и*

$$p^{(2)} \geqslant p^{(1)}, \ |p(x) - p^{(i)}| \leqslant \frac{L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)} \ \text{для п. в. } x \in B_{8R}^{x_0} \cap D^{(i)}, \ i = 1, 2. \tag{1.18}$$

Тогда

$$\sup_{Q_R^{x_0}} u \leqslant C(n, p_1, p_2, L, M)\Bigl(\inf_{B_R^{x_0}} u + R\Bigr), \quad M = \sup_{B_{8R}^{x_0}} u. \tag{1.19}$$

Обратим внимание на то, в теоремах 1.1 и 1.2 не требуется выполнения логарифмического условия глобально или хотя бы в окрестности рассматриваемой точки (условия типа (1.4) и (1.15)). При этом оказывается, что классический способ доказательства неравенства Харнака, основанный на принадлежности логарифма решения классу BMO (см. [21, 22, 25]) неприменим. Мы используем модификацию метода N. S. Trudinger [26], который был развит для анализа локального поведения решений неравномерно эллиптических уравнений.

Вначале мы проводим доказательство теоремы 1.1. Доказательство разбивается на два этапа. Вначале устанавливается достаточно стандартная мозеровская оценка супремума решения сверху. Эта оценка большой сложности не представляет. Дальше следуют две леммы, в которых содержится доказательство неравенства Харнака слабого типа, основанное на развитии техники [26]. Затем приводится доказательство теоремы 1.2, которое следует той же схеме. При этом, используется метод отражения, а неравенство Харнака слабого типа устанавливается для функции $\min(u, \tilde{u})$, где $\tilde{u}$ — четное продолжение u из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$.

Приведем формулировки оценок мозеровского типа. Для измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначаем лебегову меру E через $|E|$, и

$$\fint_E f\,dx = \frac{1}{|E|}\int_E f\,dx.$$

Лемма 1.3. *Пусть показатель p удовлетворяет условиями теоремы 1.1 или теоремы 1.2. Пусть u — неотрицательное ограниченное решение уравнения (1.1) в шаре $B_{8R}^{x_0}$, $q > 0$. Тогда для $0 < t \leqslant 4$ выполнено*

$$\sup_{B_{tR}^{x_0}} u \leqslant C(n, p_1, p_2, M, L, q)\biggl(\fint_{B_{2tR}^{x_0}} (u + R)^q\,dx\biggr)^{1/q}. \tag{1.20}$$

Для случая теоремы 1.2 понадобится аналогичная оценка в $B_{tR}^{x_0} \cap D^{(2)}$.

Лемма 1.4. *Пусть показатель p удовлетворяет (1.2) и условию (1.18). Пусть u — неотрицательное ограниченное решение уравнения (1.1) в шаре $B_{8R}^{x_0}$, $q > 0$. Тогда для $0 < t \leqslant 4$ выполнено*

$$\sup_{Q_{tR}^{x_0}} u \leqslant C(n, p_1, p_2, M, L, q)\biggl(\fint_{B_{2tR}^{x_0}\cap D^{(2)}} (u + R)^q\,dx\biggr)^{1/q}. \tag{1.21}$$

Отметим, что ограниченность решений (1.1) имеет место не всегда. Например, для этого достаточно, чтобы в рассматриваемом шаре отношение наибольшего значения показателя p к наименьшему не превосходило $n/(n-1)$, см. [16].

Сформулируем полученное неравенство Харнака слабого типа, которое представляет самостоятельный интерес для приложений. Пусть $s = \inf\limits_{B_{8R}^{x_0}} p$.

Теорема 1.5. *Пусть показатель* p *удовлетворяет* (1.2), u — *неотрицательное ограниченное суперрешение* (1.1) *в* $B_{8R}^{x_0}$. *Если выполнено условие* (1.16), *тогда для всех* $0 < q < n(s-1)/(n-1)$ *выполняется*

$$\left(\fint_{B_{2R}^{x_0}} (u+R)^q \, dx \right)^{1/q} \leqslant C(n, p_1, p_2, L, M, q) \inf_{B_R^{x_0}} (u+R). \tag{1.22}$$

Отметим, что это утверждение фактически было доказано в немного другом виде в [27]. Здесь мы воспроизводим это доказательство в более простом виде. Для случая показателя p, удовлетворяющего логарифмическому условию (1.4), этот результат был получен в [13]. Для случая постоянного показателя p это неравенство было установлено Трудингером [22] (в этом случае, естественно, добавлять R нет необходимости, а константа C зависит только от n, p).

В ситуации теоремы 1.2 неравенство (1.22), вообще говоря, может и не иметь места. Однако удалось доказать его аналог для функции $\min(u, \tilde{u})$.

Теорема 1.6. *Пусть показатель* p *удовлетворяет* (1.2), u — *неотрицательное ограниченное суперрешение* (1.1) *в* $B_{8R}^{x_0}$. *Если выполнено условие* (1.18), *то для* $v = \min(u, \tilde{u}) + R$ *и всех* $0 < q < n(s-1)/\bigl(2(n-1)\bigr)$ *справедлива оценка*

$$\left(\fint_{B_{2R}^{x_0}} v^q \, dx \right)^{1/q} \leqslant C(n, p_1, p_2, L, M, q) \inf_{B_R^{x_0}} v. \tag{1.23}$$

Последняя теорема обобщает аналогичное неравенство, полученное авторами в [24] при условии (1.14) и (1.15).

Доказательство теоремы 1.1 состоит в комбинации оценки теоремы 1.5 и применения леммы 1.3. Выбирая подходящее q, имеем

$$\sup_{B_R^{x_0}} u \leqslant C \left(\fint_{B_{2R}^{x_0}} (u+R)^q \, dx \right)^{1/q} \leqslant C \Bigl(\inf_{B_R^{x_0}} u + R \Bigr)$$

с константой $C = C(n, p_1, p_2, L, M)$. Аналогично, для доказательства теоремы 1.2 применим оценку теоремы 1.6 и леммы 1.4. Для подходящего $q > 0$ будем иметь

$$\sup_{Q_R^{x_0}} u \leqslant C\biggl(\ \fint\limits_{B_{2R}^{x_0}\cap D^{(2)}} (u+R)^q\,dx\biggr)^{1/q} \leqslant C\biggl(\ \fint\limits_{B_{2R}^{x_0}} (\min(u,\tilde u)+R)^q\,dx\biggr)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant C\inf_{B_R^{x_0}}(\min(u,\tilde u)+R) = C\Bigl(\inf_{B_R^{x_0}} u + R\Bigr)$$

с константой $C = C(n, p_1, p_2, L, M)$.

При доказательстве промежуточных утверждений мы выделяем три случая. Первый случай, самый простой — когда выполнено условие (1.16). Второй случай — когда выполнено условие (1.18) и при этом разность $p^{(2)} - p^{(1)}$ достаточно мала. При этом мы попадаем в ситуацию первого случая. В третьем случае выполнено условие (1.18) и при этом разность $p^{(2)} - p^{(1)}$ велика. Последний случай самый сложный.

Будем использовать C для обозначения различных неотрицательных констант, встречающихся по ходу доказательства. Зависимость $C(p)$ обозначает зависимость от p_1, p_2, L. Далее, обозначаем

$$B = B_{8R}^{x_0}, \quad s = \inf_B p, \quad B^{(i)} = B\cap D^{(i)}, \quad s_i = \inf_{B^{(i)}} p, \quad M = \sup_B u. \tag{1.24}$$

Пусть также $\eta \in C_0^\infty(B)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и функция η четная относительно Σ.

§ 2. ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ТИПА МОЗЕРА

В этом разделе приводится доказательство лемм 1.3, 1.4. Доказательство этих лемм сводится к получению энергетических оценок и применению итерационной техники Мозера.

Лемма 2.1. *Пусть выполнено условие* (1.16) *и* $\gamma \geqslant 1$. *Тогда*

$$R^s \int\limits_B |\nabla u|^s u^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(n,p)(M+1)^{p_2}\int\limits_B u^{\gamma+s-1}\bigl(\eta^{p_2} + \bigl(R|\nabla\eta|\bigr)^{p_2}\bigr)\,dx. \tag{2.1}$$

Доказательство. Условие (1.16) дает

$$R^{s-p(x)} \leqslant \exp\left(L\frac{\ln(1/R)}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)}\right) \leqslant e^{5L} \tag{2.2}$$

для $x \in B$, $R \leqslant 1/32$. Возьмем в интегральном тождестве (1.5) пробную функцию
$$\psi = (u+R)^{\gamma}\eta^{p_2}, \quad \gamma \geqslant 1.$$

Получим
$$\gamma \int\limits_B |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx = -p_2 \int\limits_B (u+R)^{\gamma}\eta^{p_2-1}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \eta\,dx.$$

Разделив это равенство на γ, и используя неравенство Юнга для оценки правой части, приходим к оценке
$$\int\limits_B |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_B (u+R)^{\gamma-1+p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx. \tag{2.3}$$

Используя простые оценки $|\nabla u|^s \leqslant |\nabla u|^{p(x)}+1$, $(u+R)^{p(x)-s} \leqslant (M+1)^{p_2}$ и $(u+R)^{-s} \leqslant R^{-s}$, из неравенства (2.3) получаем
$$\int\limits_B |\nabla u|^s(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant R^{-s}\int\limits_B (u+R)^{\gamma-1+s}\eta^{p_2}\,dx +$$
$$+ C(p_1,p_2)(M+1)^{p_2}\int\limits_B (u+R)^{\gamma-1+s}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx. \tag{2.4}$$

Умножая (2.4) на R^s и используя (2.2), имеем
$$R^s\int\limits_B |\nabla u|^s(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \int\limits_B (u+R)^{\gamma-1+s}\eta^{p_2}\,dx +$$
$$+ C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_B (u+R)^{\gamma-1+s}\big(R|\nabla\eta|\big)^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx.$$

Оценивая по неравенству Юнга
$$\big(R|\nabla\eta|\big)^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)} \leqslant \eta^{p_2} + \big(R|\nabla\eta|\big)^{p_2}, \tag{2.5}$$

получаем искомое неравенство (2.1). Лемма 2.1 доказана. $\square$

Будем обозначать

$$f_+ = \max\{f, 0\}.$$

Напомним (см. (1.8)), что через $p^{(i)}$ мы обозначаем предельное значение показателя p в точке $x_0 \in \Sigma$, взятое со стороны $D^{(i)}$.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.18) *и* $\gamma \geqslant (s_2 - s_1)_+ + 1$. *Тогда функция* $v = \max(u, \tilde{u}) + R$ *удовлетворяет неравенству*

$$R^s \int\limits_B |\nabla v|^s v^{\gamma-1} \eta^{p_2}\, dx \leqslant C(n,p)(M+1)^{p_2} \int\limits_B v^{\gamma+s-1}\Big(\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2}\Big)\, dx. \tag{2.6}$$

Доказательство. Для $R \leqslant 1/32$ выполняется

$$R^{-L/\ln(1/(16R))} = \exp\left(L\frac{\ln 1/R}{\ln 1/R - \ln 16}\right) \leqslant e^{5L}.$$

Следовательно, условие (1.18) влечет

$$\begin{gathered} R^{s_i - p(x)} \leqslant C(L) \quad \text{для} \quad x \in B^{(i)}, \\ R^{s_2 - s_1} \leqslant R^{s_2 - P^{(2)}} \leqslant C(L). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Ниже мы будем использовать простые следствия (2.7) и (2.5): для $x \in B^{(i)}$ выполняется

$$\begin{gathered} R^{s_i}|\nabla u|^{p(x)} \leqslant C(L)(R|\nabla u|)^{p(x)}, \\ R^{s_i}|\nabla \eta|^{p(x)}\eta^{p_2 - p(x)} \leqslant C(L)(\eta^{p_2} + \big(R|\nabla\eta|)^{p_2}\big), \\ (u+R)^{p(x)-s_i} R^{s_i}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)} \leqslant C(L)(M+1)^{p_2}(\eta^{p_2} + \big(R|\nabla\eta|)^{p_2}\big). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Кроме того, для $x \in B^{(i)}$, $i = 1, 2$, в силу (2.5), (2.7) и очевидного неравенства $\big(R/(u+R)\big)^{s_2 - s_1} \leqslant 1$ для $s_1 \leqslant s_2$

$$\begin{aligned} &R^{s_2}(u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)} = \\ &= R^{s_i - p(x)}(u+R)^{p(x)-s_i} R^{s_2-s_i}(u+R)^{s_i - s_2}(R|\nabla\eta|)^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)} \leqslant \\ &\leqslant C(L)(M+1)^{p_2}(\eta^{p_2} + \big(R|\nabla\eta|\big)^{p_2}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Доказательство будет различным для двух случаев, рассматриваемых раздельно:

$$p^{(2)} - p^{(1)} > 4L/\ln(16R)^{-1} \tag{2.10}$$

и

$$p^{(2)} - p^{(1)} \leqslant 4L/\ln(16R)^{-1}. \tag{2.11}$$

Вначале предположим, что выполнено условие (2.11). Тогда

$$\operatorname*{osc}_B p \leqslant \frac{6L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)}.$$

Таким образом, выполнено условие (1.16), только с константой $6L$ вместо L. Следовательно, имеет место оценка (2.1), из которой оценка (2.6) легко следует по определению v.

Пусть теперь имеет место (2.10). В этом случае из (1.18) следует

$$\begin{gathered}\sup_{x\in B^{(1)}} p(x) \leqslant p^{(1)} + \frac{L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)} \leqslant \\ \leqslant p^{(2)} - \frac{4L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)} + \frac{L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)} \leqslant \\ \leqslant \inf_{x\in B^{(2)}} p(x) + \frac{2L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)} - \frac{4L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)} \leqslant s_2 - \frac{2L}{\ln\bigl(1/(16R)\bigr)}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Используя в интегральном тождестве (1.5) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^\beta \eta^{p_2},$$

где

$$\beta = \gamma + s_1 - s_2 \geqslant 1,$$

получаем

$$\beta \int\limits_B |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{\beta-1} \eta^{p_2}\, dx = -p_2 \int\limits_B (u+R)^\beta \eta^{p_2-1} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \eta\, dx.$$

Разделив это равенство на β и используя неравенство Юнга для оценки правой части, приходим к

$$\begin{gathered}\int\limits_B |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{\beta-1} \eta^{p_2}\, dx \leqslant \\ \leqslant C(p_1,p_2) \int\limits_B (u+R)^{\beta-1+p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{p_2-p(x)}\, dx.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Мы будем использовать только ту часть этой оценки, которая относится к $B^{(2)}$. Применяя неравенства

$$|\nabla u|^{s_2} \leqslant |\nabla u|^{p(x)} + 1 \quad \text{и} \quad (u+R)^{-s_2} \leqslant R^{-s_2},$$

имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_2}(u+R)^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_{B}(u+R)^{\beta-1+p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx + \\ + R^{-s_2}\int\limits_{B^{(2)}}(u+R)^{\beta-1+s_2}\eta^{p_2}\,dx. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Применим еще раз неравенство Юнга:

$$\begin{aligned}|\nabla u|^{s_1}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2} \leqslant \\ \leqslant R^{s_2-s_1}|\nabla u|^{s_2}(u+R)^{\beta-1}\eta^{p_2} + R^{-s_1}(u+R)^{\gamma-1+s_1}\eta^{p_2}.\end{aligned}$$

Из (2.14), последней оценки и равенства $\gamma+s_1=\beta+s_2$ будем иметь

$$\begin{aligned}\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p_1,p_2)R^{s_2-s_1}\int\limits_{B}(u+R)^{\beta-1+p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx + \\ + R^{-s_1}\int\limits_{B^{(2)}}(u+R)^{\beta-1+s_2}\eta^{p_2}\,dx. \qquad (2.15)\end{aligned}$$

В силу (2.9)

$$\begin{aligned}R^{s_2}(u+R)^{\beta-1+p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)} \leqslant \\ \leqslant C(L)(M+1)^{p_2}(u+R)^{\beta-1+s_2}(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2}).\end{aligned}$$

Из (2.14), (2.15) и последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned}R^{s_2}\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_2}(u+R)^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx + R^{s_1}\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_{B}(u+R)^{\beta-1+s_2}\big(\eta^{p_2}+\big(R|\nabla\eta|\big)^{p_2}\big)\,dx. \qquad (2.16)\end{aligned}$$

Вспоминая определение v и связь β, γ, будем иметь

$$R^{s_2}\int\limits_{B^{(2)}}|\nabla u|^{s_2}(u+R)^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx+R^{s_1}\int\limits_{B^{(2)}}|\nabla u|^{s_1}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_{B}v^{\gamma+s_1-1}(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx. \tag{2.17}$$

Для получения аналогичной оценки в $B^{(1)}$ используем пробную функцию
$$\psi=\big((u+R)^{\gamma}-(\tilde u+R)^{\gamma}\big)_+\eta^{p_2}.$$
Функция ψ обращается в ноль вне множества
$$G=\big\{x\in B^{(1)}\colon u(x)>\tilde u(x)\big\}.$$
Подставляя ψ в интегральное тождество (1.5), получаем

$$\gamma\int\limits_{G}|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\gamma\int\limits_{G}|\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\tilde u|(\tilde u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx+$$
$$+p_2\int\limits_{G}|\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{\gamma}\eta^{p_2-1}|\nabla\eta|\,dx. \tag{2.18}$$

Применяя неравенство Юнга для оценки слагаемых в правой части неравенства, приходим к оценке

$$\int\limits_{G}|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx\leqslant$$
$$\leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_{G}|\nabla\tilde u|^{p(x)}(\tilde u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx+$$
$$+C(p_1,p_2)\int\limits_{G}(u+R)^{\gamma+p(x)-1}\eta^{p_2-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

В силу (2.12) $p(x)\leqslant s_2$ для $x\in B^{(1)}$. По неравенству Юнга

$$|\nabla\tilde u|^{p(x)}(\tilde u+R)^{\gamma-1}\leqslant$$
$$\leqslant R^{s_2-p(x)}|\nabla\tilde u|^{s_2}(\tilde u+R)^{\beta-1}+R^{-p(x)}(\tilde u+R)^{\beta-1+s_2+r(x)},$$

где в силу (2.12) выполняется

$$
\begin{gathered}
r(x) = s_2 \frac{s_2 - s_1}{s_2 - p(x)} - s_2 = s_2 \frac{p(x) - s_1}{s_2 - p(x)} \geqslant 0, \\
\sup_{B^{(1)}} r \leqslant s_2 \frac{L \ln\bigl(1/(16R)\bigr)}{2L \ln\bigl(1/(16R)\bigr)} \leqslant p_2.
\end{gathered} \tag{2.19}
$$

Из этих оценок и (2.7) получаем

$$
\begin{gathered}
\int_G |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{\gamma-1} \eta^{p_2}\, dx \leqslant \\
\leqslant C(p) \int_G (u+R)^{\gamma+p(x)-1} \eta^{p_2 - p(x)} |\nabla \eta|^{p(x)}\, dx + \\
+ C(p) R^{s_2 - s_1} \int_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_2} (u+R)^{\beta-1} \eta^{p_2}\, dx + \\
+ C(p) R^{-s_1} (M+1)^{p_2} \int_{B^{(2)}} (u+R)^{\beta-1+s_2} \eta^{p_2}\, dx.
\end{gathered}
$$

Домножая это неравенство на R^{s_1}, используя (2.8) для оценки первого члена в правой части и (2.17) для оценки второго члена в правой части, имеем

$$
\begin{gathered}
R^{s_1} \int_G |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{\gamma-1} \eta^{p_2}\, dx \leqslant \\
\leqslant C(p) (M+1)^{p_2} \int_B v^{\gamma+s_1-1} (\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\, dx.
\end{gathered}
$$

Отсюда, так как

$$
|\nabla u|^{s_1} \leqslant |\nabla u|^{p(x)} + 1 \quad \text{в} \quad G,
$$

и

$$
R^{s_1} (u+R)^{\gamma-1} \leqslant (u+R)^{\gamma+s_1-1} \leqslant v^{\gamma+s_1-1},
$$

получим

$$
\begin{gathered}
R^{s_1} \int_G |\nabla u|^{s_1} (u+R)^{\gamma-1} \eta^{p_2}\, dx \leqslant \\
\leqslant C(p) (M+1)^{p_2} \int_B v^{\gamma+s_1-1} (\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\, dx.
\end{gathered}
$$

Совмещая это неравенство с (2.17), по определению v имеем

$$R^{s_1}\int\limits_B |\nabla v|^{s_1} v^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx = R^{s_1}\int\limits_{G\cup B^{(2)}} |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx + \\ + R^{s_1}\int\limits_{B^{(1)}\setminus G} |\nabla \tilde u|^{s_1}(\tilde u+R)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_B v^{\gamma+s_1-1}(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx.$$

Так как $s_1 = s$ (см. (2.12)), это и есть искомая оценка (2.6). Лемма 2.2 доказана. □

Доказательство леммы 1.3. Пусть $v = u + R$ и $\gamma \geqslant 1$, если выполнено условие (1.16), и $v = \max(u,\tilde u) + R$ и $\gamma \geqslant (s_2 - s_1)_+ + 1$, если выполнено условие (1.18). Из лемм 2.1 и 2.2 имеем оценку (2.6). Как следствие, для любых $1/8 < \tau < t < 8$ и $\eta \in C_0^\infty(B_{tR}^{x_0})$, четной по отношению к Σ и удовлетворяющей $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ on $B_{\tau R}^{x_0}$, $|\nabla\eta| \leqslant C(t-\tau)^{-1}R^{-1}$, и $\gamma \geqslant p_2 - s + 1$, имеем

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla v|^s v^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p)(M+1)^{p_2}(t-\tau)^{-p_2}\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} v^{\gamma+s-1}\,dx.$$

С помощью стандартной схемы итерации Мозера, для $1/8 < \sigma < t$ получим отсюда

$$\sup_{B_{\sigma R}^{x_0}} u = \sup_{B_{\sigma R}^{x_0}} v \leqslant C(n,p,M)(t-\sigma)^{-\alpha}\biggl(\ \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} v^{p_2}\,dx\biggr)^{1/p_2} \leqslant \\ \leqslant C(n,p,M)(t-\sigma)^{-\alpha}\biggl(\ \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{p_2}\,dx\biggr)^{1/p_2}, \qquad (2.20)$$

где $\alpha = \alpha(n,p) > 0$. Чтобы получить оценку леммы 1.3 для $q < p_2$, применим стандартную интерполяционную технику. Пусть

$$t_k = 2 - 2^{-k}, \quad M_k = \sup_{B_{t_k R}^{x_0}} u + R, \quad k = 0,1,2,\dots .$$

Из оценки (2.20), пользуясь неравенством Юнга, имеем

$$M_k \leqslant C2^{\alpha k}\Bigg(\,\fint\limits_{B^{x_0}_{t_kR}} (u+R)^{p_2}\,dx\Bigg)^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant C2^{\alpha k}M_{k+1}^{(p_2-q)/p_2}\Bigg(\,\fint\limits_{B^{x_0}_{t_{k+1}R}} (u+R)^{q}\,dx\Bigg)^{1/p_2} \leqslant \varepsilon M_{k+1} + C(\varepsilon)b^kI,$$

$$I=\Bigg(\,\fint\limits_{B^{x_0}_{2R}} (u+R)^{q}\,dx\Bigg)^{1/q}.$$

где $b=b(n,p)>1$. Итерируя это неравенство, получаем

$$M_0 \leqslant \varepsilon^k M_k + C\sum_{j=0}^{k-1}(\varepsilon b)^j I.$$

Выбирая $\varepsilon = 1/(2b)$ и устремляя $k\to\infty$, приходим к оценке (1.20). Лемма 1.3 доказана. □

Доказательство леммы 1.4. Совершенно аналогично оценке леммы 2.1 устанавливается следующая оценка. Для $\gamma \geqslant 1$ и функции $\eta \in C_0^\infty(B^{(2)})$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$, выполняется

$$R^s\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^s u^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_{B^{(2)}} u^{\gamma+s-1}\big(\eta^{p_2}+\big(R|\nabla\eta|\big)^{p_2}\big)\,dx.$$

Пользуясь теми же рассуждениями, что и при доказательстве предыдущей леммы, получаем для всех $q>0$ оценку

$$\sup_{Q^{x_0}_R} u \leqslant C(n,p,M,q)\Bigg(\,\fint\limits_{B^{x_0}_{2R}\cap D^{(2)}} (u+R)^q\Bigg)^{1/q}.$$

Лемма 1.4 доказана. □

§ 3. НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА СЛАБОГО ТИПА

В этом разделе мы доказываем теоремы 1.5 и 1.6. Далее обозначаем

$$v = \min(u, \tilde{u}) + R.$$

Как и выше, $\tilde{u}$ — четное продолжение u из $B^{(2)}$ в $B^{(1)}$.

Доказательство теорем 1.5 и 1.6 состоит из двух частей. Будем пользоваться обозначениями (1.24).

Лемма 3.1. *Пусть u — неотрицательное ограниченное суперрешение* (1.1) *в B, $1/4 < \sigma < t < 4$. Если выполнено* (1.16), *то*

$$\inf_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R) \geqslant \exp\biggl(-C + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln(u+R)\,dx\biggr), \tag{3.1}$$

где $C = C(n, p, M, \sigma, t)$. Если выполнено (1.18), *то*

$$\inf_{B^{x_0}_{\sigma R}} v \geqslant \exp\biggl(-C + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln v\,dx\biggr), \tag{3.2}$$

где $C = C(n, p, M, \sigma, t)$.

Доказательство. Предположим вначале, что выполнено условие (1.16). Это более простой случай. Положим

$$\ln k = \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln(u+R)\,dx. \tag{3.3}$$

В силу неравенства Йенсена

$$k = \exp \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln(u+R)\,dx \leqslant \fint_{B^{x_0}_{tR}} (u+R)\,dx \leqslant M + R.$$

Пусть

$$w = \biggl(\ln\frac{k}{u+R}\biggr)_+.$$

Выберем в интегральном тождестве (1.5) пробную функцию

$$\psi = w^\gamma (u+R)^{1-s}\eta^{p_2},$$

где $\gamma \geqslant 1$, $\eta \in C_0^\infty(B_{tR}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Имеем

$$\gamma \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s} w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx + \\ + (s-1)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s} w^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant p_2 \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s} w^{\gamma}\eta^{p_2-1}|\nabla\eta|\,dx.$$

Применяя к подынтегральному выражению в правой части этой оценки неравенство Юнга, будем иметь

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s} w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s} w^{\gamma+p(x)-1}\eta^{p_2-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla w|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s} w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s} w^{\gamma+p(x)-1}\eta^{p_2-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx. \tag{3.4}$$

По неравенству Юнга

$$|\nabla w|^s \leqslant |\nabla w|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s} + (u+R)^{-s}.$$

Далее,

$$(u+R)w = (u+R)\left(\ln\frac{k}{u+R}\right)_+ \leqslant \begin{cases} k/e, & \text{если } k/e > R,\\ R\ln(k/R) & \text{если } k/e \leqslant R.\end{cases}$$

В силу $k \leqslant M+R$

$$(u+R)w \leqslant \max\left(\frac{k}{e}, R\right) \leqslant M+1. \tag{3.5}$$

Пользуясь этими оценками, из (3.4) получаем

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla w|^s w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p_1,p_2)(M+1)^{p_2}\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \big(w^{\gamma+s-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)} + w^{\gamma-1}R^{-s}\eta^{p_2}\big)\,dx.$$

В итоге согласно (2.2) и (2.5) имеем

$$R^s \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla \max(w,1)|^s \max(w,1)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \max(w,1)^{\gamma+s-1}(\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx.$$

С помощью итерационной техники Мозера придем к соотношению

$$\sup_{B_{\sigma R}^{x_0}} w \leqslant C(n,p,M)\,(t-\sigma)^{-\alpha}\left(1 + \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} w^s\,dx\right)^{1/s}, \tag{3.6}$$

где $\alpha = \alpha(n,p) > 0$.

Для оценки интеграла

$$\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} w^s \leqslant \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\ln\frac{k}{u+R}\right|^s\,dx$$

выберем в интегральном тождестве (1.5) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^{1-s}\eta^{p_2},$$

где $\eta \in C_0^\infty(B_{2tR}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в $B_{tR}^{x_0}$ и $|\nabla\eta| \leqslant 4(tR)^{-1}$. Получим

$$\int\limits_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\eta^{p_2}\,dx \leqslant p_2\int\limits_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s}\eta^{p_2-1}|\nabla\eta|\,dx.$$

Отсюда по неравенству Юнга будем иметь

$$\int\limits_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_{B_{2tR}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s}\eta^{p_2-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

Так как $|\nabla u|^s \leqslant |\nabla u|^{p(x)}+1$, $(u+R)^{-s} \leqslant R^{-s}$ и $(u+R)^{p(x)-s} \leqslant (M+1)^{p_2}$, то

$$\int\limits_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^s (u+R)^{-s} \eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B_{2tR}^{x_0}} \big(R^{-s}\eta^{p_2} + \eta^{p_2-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\big).$$

Домножая это неравенство на R^{s-n}, пользуясь неравенствами (2.2) и (2.5), находим

$$R^s \fint\limits_{B_{2tR}^{x_0}} |\nabla u|^s (u+R)^{-s}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \fint\limits_{B_{2tR}^{x_0}} \big(\eta^{p_2} + \big(R|\nabla\eta|\big)^{p_2}\big)\,dx.$$

В силу выбора η

$$R^s \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\nabla \ln\frac{k}{u+R}\right|^s dx \leqslant C(n,p,M),$$

а из выбора постоянной k из (3.3) имеем

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \ln\frac{k}{u+R}\,dx = 0.$$

Поэтому по неравенству Пуанкаре заключаем, что

$$\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\ln\frac{k}{u+R}\right|^s dx \leqslant C(n,s)R^s \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\nabla\ln\frac{k}{u+R}\right|^s dx \leqslant C(n,p,M). \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) вытекает

$$\sup_{B_{\sigma R}^{x_0}} w \leqslant C(n,p,M)\,(t-\sigma)^{-\alpha}, \quad \alpha = \alpha(n,p) > 0.$$

Вспоминая определение w, приходим к искомому утверждению.

Перейдем теперь к случаю, когда выполняется условие (1.18). Если при этом имеет место (2.11), то справедливо неравенство (1.16) с константой $6L$ вместо L. Пользуясь неравенством (3.1) и определением v,

будем иметь

$$\inf_{B^{x_0}_{\sigma R}} v = \inf_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\biggl(-C + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln(u+R)\,dx\biggr) \geqslant \exp\biggl(-C + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln v\,dx\biggr).$$

Это и есть требуемое неравенство (3.2).

Пусть теперь выполнены условия (1.18) и (2.10). Положим

$$\ln k = \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln v\,dx. \tag{3.8}$$

Начнем с получения энергетической оценки в области $B^{x_0}_{tR} \cap D^{(2)}$. Выберем в интегральном тождестве (1.5) пробную функцию

$$\psi = w^\beta (u+R)^{1-s_2}\eta^{p_2},\ w = \left(\ln \frac{k}{u+R}\right)_+, \quad \text{где} \quad \beta = \gamma + s_1 - s_2 \geqslant 1.$$

Здесь η — четная относительно Σ функция, удовлетворяющая тем же условиям, что и в первой части доказательства. Имеем

$$\beta \int_B |\nabla u|^{p(x)} w^{\beta-1}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx +$$
$$+ (s_2 - 1)\int_B |\nabla u|^{p(x)} w^{\beta}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant p_2 \int_B \eta^{p_2-1} w^\beta (u+R)^{1-s_2} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\eta\,dx.$$

Отбрасывая второй член в левой части неравенства и применяя неравенство Юнга для оценки интеграла в правой части, будем иметь

$$\int_B |\nabla u|^{p(x)} w^{\beta-1}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p_1,p_2)\int_B w^{\beta+p(x)-1}|\nabla\eta|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s_2}\eta^{p_2-p(x)}\,dx.$$

Из последнего неравенства найдем

$$\int\limits_B |\nabla w|^{p(x)} w^{\beta-1}(u+R)^{p(x)-s_2}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_B w^{\beta+p(x)-1}(u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx.$$

Используем здесь часть оценки, которая относится к полушару $B^{(2)}$. По неравенству Юнга

$$|\nabla w|^{s_2} \leqslant |\nabla w|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s_2} + (u+R)^{-s_2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla w|^{s_2} w^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_B w^{\beta+p(x)-1}(u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx +$$
$$+\int\limits_{B^{(2)}} w^{\beta-1}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx.$$

Далее,

$$|\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1} \leqslant R^{s_2-s_1}|\nabla w|^{s_2} w^{\beta-1} + R^{-s_1} w^{\beta-1+s_2}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant R^{s_2-s_1}C(p_1,p_2)\int\limits_B w^{\beta+p(x)-1}(u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx +$$
$$+ R^{s_2-s_1}\int\limits_{B^{(2)}} w^{\beta-1}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx + R^{-s_1}\int\limits_{B^{(2)}} w^{\beta-1+s_2}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant R^{s_2-s_1}C(p_1,p_2)\int\limits_B w^{\beta+p(x)-1}(u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx +$$
$$+ R^{-s_1}\int\limits_{B^{(2)}} (w^{\beta-1}+w^{\beta-1+s_2})\eta^{p_2}\,dx.$$

В полушаре $B^{(2)}$ имеем (см. (3.5))

$$w^{\beta+p(x)-1}(u+R)^{p(x)-s_2} = \\ = w^{\beta+s_2-1}\big(w(u+R)\big)^{p(x)-s_2} \leqslant (M+1)^{p_2} w^{\beta+s_2-1},$$

а в $B^{(1)}$ справедливо соотношение

$$w^{\beta+p(x)-1}(u+R)^{p(x)-s_2} = \\ = w^{\beta+s_1-1}(u+R)^{s_1-s_2}\big(w(u+R)\big)^{p(x)-s_1} \leqslant (M+1)^{p_2} R^{s_1-s_2} w^{\beta+s_1-1}.$$

Теперь, пользуясь (2.7), получаем для $x \in B^{(i)}$ оценку

$$R^{s_2} w^{\beta+p(x)-1}(u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)} \leqslant C(L)(M+1)^{p_2}(R|\nabla\eta|)^{p(x)} w^{\beta+s_i-1}.$$

Таким образом, приходим к следующему неравенству:

$$R^{s_2} \int\limits_{B^{(2)}} |\nabla w|^{s_2} w^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx + R^{s_1} \int\limits_{B^{(2)}} |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B} (w^{\beta+s_1-1} + w^{\beta+s_2-1} + w^{\beta-1}) \times \\ \times \big((R|\nabla\eta|)^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)} + \eta^{p_2}\big)\,dx.$$

Пользуясь соотношением $\beta+s_2 = \gamma+s_1$ и неравенством (2.5), запишем эту оценку в виде

$$R^{s_2} \int\limits_{B^{(2)}} |\nabla w|^{s_2} w^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx + R^{s_1} \int\limits_{B^{(2)}} |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p,M) \int\limits_{B} \big(\max(w,1)\big)^{\gamma+s_1-1}\big(\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2}\big)\,dx. \tag{3.9}$$

Чтобы получить аналогичную оценку в $B^{(1)}$, выберем в (1.5) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^{1-s_1}(w^\gamma - \tilde{w}^\gamma)_+\eta^{p_2}.$$

Напомним, что $\gamma = \beta + s_2 - s_1 \geqslant 1 + s_2 - s_1 > 1$. Функция ψ равна нулю вне множества

$$G = \{u < \tilde{u}\} \cap B^{(1)}.$$

В итоге получаем

$$\gamma \int\limits_G |\nabla u|^{p(x)} w^{\gamma-1}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx +$$
$$+ (s_1-1)\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)}(w^\gamma - \tilde{w}^\gamma)(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant p_2 \int\limits_G (u+R)^{1-s_1}|\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\eta|\eta^{p_2-1}(w^\gamma - \tilde{w}^\gamma)_+\,dx +$$
$$+ \gamma \int\limits_G |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\tilde{u}|\tilde{w}^{\gamma-1}(u+R)^{1-s_1}(\tilde{u}+R)^{-1}\eta^{p_2}\,dx.$$

Поскольку $\tilde{w} < w$ на G, в силу неравенства Юнга будем иметь

$$\int\limits_G |\nabla w|^{p(x)} w^{\gamma-1}(u+R)^{p(x)-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_G (u+R)^{p(x)-s_1} w^{\gamma+p(x)-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx +$$
$$+ C(p_1,p_2)\int\limits_G |\nabla\tilde{w}|^{p(x)}\tilde{w}^{\gamma-1}(u+R)^{p(x)-s_1}\eta^{p_2}\,dx.$$

Кроме того (напомним, что $u < \tilde{u}$ на G),

$$|\nabla\tilde{w}|^{p(x)}\tilde{w}^{\gamma-1}(u+R)^{p(x)-s_1} \leqslant$$
$$\leqslant R^{s_2-p(x)}|\nabla\tilde{w}|^{s_2}\tilde{w}^{\beta-1} + R^{-p(x)}\tilde{w}^{\beta-1+s_2+r(x)}(\tilde{u}+R)^{r(x)},$$

где $r(x)$ дан в (2.19), $r \leqslant p_2$. В силу (2.7) и (3.5)

$$\int\limits_G |\nabla w|^{p(x)} w^{\gamma-1}(u+R)^{p(x)-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_G w^{\gamma+s_1-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx +$$
$$+ C(p)(M+1)^{p_2}R^{s_2-s_1}\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla w|^{s_2} w^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx +$$
$$+ C(p)(M+1)^{p_2}R^{-s_1}\int\limits_{B^{(2)}} w^{\beta-1+s_2}\eta^{p_2}\,dx.$$

По неравенству Юнга

$$|\nabla w|^{s_1} \leqslant |\nabla w|^{p(x)}(u+R)^{p(x)-s_1} + (u+R)^{-s_1},$$

откуда находим

$$\int\limits_G |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_G w^{\gamma+s_1-1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx +$$
$$+ R^{-s_1}\int\limits_G w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx + C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_{B^{(2)}} R^{s_2-s_1}|\nabla w|^{s_2}w^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx+$$
$$+ C(p)(M+1)^{p_2}R^{-s_1}\int\limits_{B^{(2)}} w^{\beta-1+s_2}\eta^{p_2}\,dx.$$

Домножая это неравенство на R^{s_1} и пользуясь (2.8) для оценки первого интеграла в правой части, будем иметь

$$R^{s_1}\int\limits_G |\nabla w|^{s_1}w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_B (w^{\gamma+s_1-1}+w^{\gamma-1})(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx +$$
$$+ C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_{B^{(2)}} R^{s_2}|\nabla w|^{s_2}w^{\beta-1}\eta^{p_2}\,dx.$$

В силу полученной выше оценки (3.9) отсюда имеем

$$R^{s_1}\int\limits_G |\nabla w|^{s_1}w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p,M)\int\limits_B \big(\max(w,1)\big)^{\gamma+s_1-1}(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx. \tag{3.10}$$

Пусть теперь

$$W = \max(w,\tilde{w},1).$$

Совмещая полученные оценки (3.9) и (3.10), приходим к

$$R^{s_1}\int\limits_B |\nabla W|^{s_1} W^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant R^{s_1}\int\limits_{B^{(2)}\cup G} |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx + R^{s_1}\int\limits_{B^{(1)}\setminus G} |\nabla \tilde{w}|^{s_1} \tilde{w}^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p,M)\int\limits_B W^{\gamma-1+s_1}(\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx.$$

Отсюда с помощью мозеровской итерации получим оценку

$$\sup_{B^{x_0}_{\sigma R}} W \leqslant C(n,p,M)(t-\sigma)^{-\alpha}\bigg(\;\fint\limits_{B^{x_0}_{tR}} W^{s_2}\,dx\bigg)^{1/s_2}, \quad \alpha = \alpha(n,p) > 0. \tag{3.11}$$

Степень s_2 в правой части обусловлена тем, что, в силу выбора γ и β имеем $\gamma + s_1 - 1 \geqslant s_2$. Из оценки (3.11), с помощью рассуждения, использованного при доказательстве леммы 1.3, получим

$$\sup_{B^{x_0}_{\sigma R}} W \leqslant C(n,p,M)(t-\sigma)^{-\alpha}\bigg(\;\fint\limits_{B^{x_0}_{tR}} W^{s_1}\,dx\bigg)^{1/s_1}, \quad \alpha = \alpha(n,p) > 0. \tag{3.12}$$

По определению $W = \max\big(1, \ln(k/v)\big)$, поэтому

$$\sup_{B^{x_0}_{\sigma R}} \ln\frac{k}{v} \leqslant C(n,p,M)(t-\sigma)^{-\alpha}\bigg(1 + \fint\limits_{B^{x_0}_{tR}}\Big(\ln\frac{k}{v}\Big)_+^{s_1}\,dx\bigg)^{1/s_1}, \tag{3.13}$$

$$\alpha = \alpha(n,p) > 0.$$

Перейдем к оценке интеграла в правой части (3.13). Выберем

$$\psi = (u+R)^{1-s_2}\eta^{p_2},$$

где $\eta \in C_0^\infty(B)$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, η четная относительно Σ, в качестве пробной функции в (1.5). Получаем

$$(s_2 - 1)\int\limits_B |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant p_2\int\limits_B |\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s_2}|\nabla\eta|\eta^{p_2-1}\,dx.$$

Отсюда по неравенству Юнга

$$\int\limits_B |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p)\int\limits_B (u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx.$$

Таким образом сужая в левой части область интегрирования до полушара $B^{(2)}$, в силу $|\nabla u|^{s_2} \leqslant |\nabla u|^{p(x)}+1$ придем к оценке

$$\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_2}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p)\int\limits_B (u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx + \int\limits_{B^{(2)}} (u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx. \tag{3.14}$$

Ясно, что (неравенство Юнга)

$$|\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1} \leqslant R^{s_2-s_1}|\nabla u|^{s_2}(u+R)^{-s_2}+R^{-s_1}.$$

Отсюда в силу очевидного неравенства $(u+R)^{-s_2} \leqslant R^{-s_2}$ имеем

$$\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p)R^{s_2-s_1}\int\limits_B (u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx + R^{-s_1}\int\limits_{B^{(2)}} \eta^{p_2}\,dx. \tag{3.15}$$

Домножая (3.14) на R^{s_2}, (3.15) на R^{s_1}, в силу (2.9) получим

$$R^{s_2}\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_2}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}\,dx + R^{s_1}\int\limits_{B^{(2)}} |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_B (\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx. \tag{3.16}$$

Выбирая в (1.5) пробную функцию

$$\psi = \big((u+R)^{1-s_1}-(\tilde{u}+R)^{1-s_1}\big)_+\eta^{p_2},$$

будем иметь

$$
\begin{gathered}
(s_1-1)\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\
\leqslant (s_1-1)\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\tilde u|(\tilde u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx + \\
+ p_2\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\eta|\eta^{p_2-1}(u+R)^{1-s_1}\,dx.
\end{gathered}
$$

Отсюда по неравенству Юнга придем к оценке

$$
\begin{gathered}
\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\
\leqslant C(p)\int\limits_G |\nabla\tilde u|^{p(x)}(\tilde u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx + \\
+ C(p)\int\limits_G (u+R)^{p(x)-s_1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx.
\end{gathered}
$$

Так как $|\nabla u|^{s_1}\leqslant|\nabla u|^{p(x)}+1$, то

$$
\begin{gathered}
\int\limits_G |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p)\int\limits_G |\nabla\tilde u|^{p(x)}(\tilde u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx + \\
+ C(p)\int\limits_G (u+R)^{p(x)-s_1}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx + \int\limits_G (u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx.
\end{gathered}
$$

Домножая последнее неравенство на R^{s_1}, пользуясь (2.7) и (2.5), будем иметь

$$
\begin{gathered}
R^{s_1}\int\limits_G |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p)\int\limits_G (R|\nabla\tilde u|)^{p(x)}(\tilde u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx + \\
+ C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_G (\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx. \qquad (3.17)
\end{gathered}
$$

Для $x\in G$ применим неравенство

$$
(R|\nabla\tilde u|)^{p(x)}(\tilde u+R)^{-s_1}\leqslant (R|\nabla\tilde u|)^{s_2}(\tilde u+R)^{-s_2}+(\tilde u+R)^{r(x)},
$$

где показатель r определен (2.19), $r \leqslant p_2$. В силу (3.16)

$$\int\limits_G \big(R|\nabla\tilde{u}|\big)^{p(x)}(\tilde{u}+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \int\limits_{B^{(2)}} \big(R|\nabla u|\big)^{s_2}(u+R)^{-s_2}\,dx + \\ + \int\limits_{B^{(2)}} (u+R)^{r(x)}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_B \big(\eta^{p_2}+\big(R|\nabla\eta|\big)^{p_2}\big)\,dx.$$

Из последней оценки и (3.17) получаем

$$R^{s_1}\int\limits_G |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_B \big(\eta^{p_2}+\big(R|\nabla\eta|\big)^{p_2}\big)\,dx. \tag{3.18}$$

Выберем срезающую функцию $\eta \in C_0^\infty(B_{2tR}^{x_0})$, равную 1 на $B_{tR}^{x_0}$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ и такую, что $|\nabla\eta| \leqslant 4(tR)^{-1}$. Из (3.16) и (3.18) получаем

$$R^{s_1}\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\nabla \ln\frac{k}{v}\right|^{s_1}\,dx \leqslant R^{s_1}\fint\limits_{B^{(2)}\cup G} |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx + \\ + R^{s_1}\fint\limits_{B^{(1)}\setminus G} |\nabla\tilde{u}|^{s_1}(\tilde{u}+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant 2^{s_1}\fint\limits_{B^{(2)}\cup G} |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p)(M+1)^{p_2}.$$

В силу определения k выполнено равенство

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \ln\frac{k}{v}\,dx = 0.$$

По неравенству Пуанкаре

$$\fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\ln\frac{k}{v}\right|^{s_1}\,dx \leqslant C(n,p,M). \tag{3.19}$$

Подставляя последнюю оценку в (3.13), имеем

$$\sup_{B_{\sigma R}^{x_0}} \ln\frac{k}{v} \leqslant C(n,p,M)(t-\sigma)^{-\alpha}, \quad \alpha = \alpha(n,p) > 0.$$

Таким образом, вспоминая определение k, приходим к оценке

$$\inf_{B^{x_0}_{\sigma R}} v \geqslant \exp\Big(-C + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln v\, dx\Big).$$

Лемма 3.1 доказана. □

Перейдем ко второму утверждению. Будем пользоваться обозначениями (1.24).

Лемма 3.2. *Пусть u — неотрицательное ограниченное суперрешение (1.1) в B. Если выполнено (1.16), то для любых $1/4 < \tau < t < 4$ и всех $0 < q < n(s-1)/(n-1)$ выполняется*

$$\Big(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^q\, dx\Big)^{1/q} \leqslant \exp\Big(C + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln(u+R)\, dx\Big) \tag{3.20}$$

с постоянной $C = C(n, p, M, q, \tau, t)$. Если же выполнены условия (1.18) и (2.10), то для функции $v = \min(u, \tilde{u}) + R$ и всех $0 < q < n(s-1)/(2(n-1))$ справедливо неравенство

$$\Big(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} v^q\, dx\Big)^{1/q} \leqslant \exp\Big(C + \fint_{B^{x_0}_{tR}} \ln v\, dx\Big). \tag{3.21}$$

Доказательство. Предположим вначале, что выполнено условие (1.16). Положим

$$w = \Big(\ln \frac{u+R}{k}\Big)_+, \tag{3.22}$$

где величина k определена формулой (3.3). Очевидно, $k \geqslant R$. В силу неравенства Йенсена, $k \leqslant M + R$. Выберем в интегральном тождестве (1.5) пробную функцию

$$\psi = \max\big(w, c_0(\gamma+s)\big)^\gamma (u+R)^{1-s} \eta^{p_2},$$

где $\gamma \geqslant 0$, $\eta \in C_0^\infty(B^{x_0}_{tR})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, и $c_0 = 2/(s-1)$. Имеем

$$(s-1) \int_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{-s} \max\big(w, c_0(\gamma+s)\big)^\gamma \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla(u+R)|^{p(x)}(u+R)^{-s}\chi_{\{w>c_0(\gamma+s)\}} \times$$
$$\times \max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx +$$
$$+ p_2 \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2}(u+R)^{1-s}\max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2-1}\nabla u\nabla\eta\,dx.$$

Так как
$$\frac{\gamma}{\max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)} \leqslant \frac{1}{c_0} = \frac{s-1}{2},$$
получаем
$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2p_2}{s-1}\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2}(u+R)^{1-s}\max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2-1}\nabla u\nabla\eta\,dx.$$

По неравенству Юнга
$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s}\max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p_1,p_2)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s}\max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx.$$

Далее, поскольку $|\nabla u|^s \leqslant |\nabla u|^{p(x)} + 1$ и $(u+R)^{p(x)-s} \leqslant (M+1)^{p_2}$, придем к неравенству
$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{s}(u+R)^{-s}\max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p_1,p_2)(M+1)^{p_2}\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma} \times$$
$$\times \bigl((u+R)^{-s}\eta^{p_2} + |\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\bigr)\,dx.$$

Домножая это неравенство на R^s, используя (2.2), (2.5) и оценку
$$\bigl(R|\nabla\eta|\bigr)^{s}\eta^{p_2-s} \leqslant \eta^{p_2} + \bigl(R|\nabla\eta|\bigr)^{p_2},$$

будем иметь

$$R^s \fint_{B_{tR}^{x_0}} \left|\nabla\bigl(\max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{1+\gamma/s}\eta^{p_2/s}\bigr)\right|^s dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \fint_{B_{tR}^{x_0}} \max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma+s}(\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx. \quad (3.23)$$

Положим $\varkappa = n/(n-1)$. По неравенству Соболева

$$\fint_{B_{tR}^{x_0}} \max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{(\gamma+s)\varkappa}\eta^{p_2\varkappa}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p,M)\Bigl(\fint_{B_{tR}^{x_0}} \max\bigl(w, c_0(\gamma+s)\bigr)^{\gamma+s}(\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx\Bigr)^{\varkappa}. \quad (3.24)$$

Определим срезающие функции $\eta = \eta_j$ следующим образом. Пусть $\tau < \sigma < t$, $r_j = \sigma + (t-\sigma)2^{-j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $\eta_j \in C_0^\infty(B_{r_j}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta_j \leqslant 1$, $\eta_j = 1$ в $B_{r_{j+1}}^{x_0}$ и $|\nabla\eta_j| \leqslant 2^{j+3}(t-\sigma)^{-1}$. Зададим последовательность γ_j соотношением $\gamma_{j+1} + s = (\gamma_j + s)\varkappa$, $\gamma_0 = 0$. Тогда из (3.24), в котором $\gamma = \gamma_j$, $\eta = \eta_j$, получим

$$\fint_{B_{r_{j+1}}^{x_0}} \max\bigl(w, c_0(\gamma_{j+1}+s)\bigr)^{\gamma_{j+1}+s}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa^{\gamma_{j+1}+s} \fint_{B_{r_{j+1}}^{x_0}} \max\bigl(w, c_0(\gamma_j+s)\bigr)^{\gamma_{j+1}+s}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p,M)\varkappa^{\gamma_{j+1}+s}(t-\sigma)^{-p_2\varkappa}2^{jp_2\varkappa}\Bigl(\fint_{B_{r_j}^{x_0}} \max\bigl(w, c_0(\gamma_j+s)\bigr)^{\gamma_j+s}\,dx\Bigr)^{\varkappa}. \quad (3.25)$$

Из (3.7) имеем

$$\fint_{B_{tR}^{x_0}} w^{\gamma_0+s}\,dx \leqslant C(n,p,M).$$

Следовательно,

$$\fint_{B_{tR}^{x_0}} \max\bigl(w, c_0(\gamma_0+s)\bigr)^{\gamma_0+s}\,dx \leqslant C(n,p,M). \quad (3.26)$$

Полагая
$$Y_j = \fint\limits_{B^{x_0}_{r_j}} \max\bigl(w, c_0(\gamma_j+s)\bigr)^{\gamma_j+s}\,dx,$$
перепишем (3.25) в виде
$$Y_j \leqslant K_j Y_{j-1}^{\varkappa}, \quad K_j = C^{p_2\varkappa}\varkappa^{\gamma_j+s}(t-\sigma)^{-p_2\varkappa}2^{p_2 j\varkappa}.$$
Итерируя это неравенство, найдем
$$Y_j \leqslant \prod_{m=0}^{j-1}\left(K_{j-m}\right)^{\varkappa^m}\left(Y_0\right)^{\varkappa^j}.$$
Поскольку $\gamma_j + s = \varkappa^j s$, запишем
$$\prod_{m=0}^{j-1}\left(K_{j-m}\right)^{\varkappa^m} = \bigl(C(t-\sigma)^{-1}\bigr)^{p_2\varkappa(1+\varkappa+\ldots+\varkappa^{j-1})}\varkappa^{sj\varkappa^j}2^{p_2\varkappa\sum\limits_{m=0}^{j-1}(j-m)\varkappa^m}.$$
Полагая
$$S_m = 1+\varkappa+\ldots+\varkappa^{m-1} = \frac{\varkappa^m-1}{\varkappa-1},$$
получим
$$\sum_{m=0}^{j-1}(j-m)\varkappa^m = jS_j - \sum_{m=0}^{j-1} m\left(S_{m+1}-S_m\right) =$$
$$= jS_j - \sum_{m=1}^{j}(m-1)S_m + \sum_{m=0}^{j-1} mS_m = S_j + \sum_{m=1}^{j-1} S_m =$$
$$= \frac{\varkappa}{\varkappa-1}S_j - \frac{j}{\varkappa-1} \leqslant \varkappa^{j+1}(\varkappa-1)^{-2}.$$
Так как $S_j \leqslant \varkappa^j/(\varkappa-1)$ и в силу (3.26) $Y_0 \leqslant C(n,p,M)$, приходим к оценке
$$Y_j \leqslant \bigl(C(t-\sigma)^{-l}\bigr)^{s\varkappa^j}\varkappa^{sj\varkappa^j} = (C(t-\sigma)^{-l})^{\gamma_j+s}\varkappa^{j(\gamma_j+s)},$$
где $l = l(p_2,\varkappa) > 0$. Таким образом,
$$\Biggl(\fint\limits_{B^{x_0}_{r_j}} \max\bigl(w, c_0(\gamma_j+s)\bigr)^{\gamma_j+s}\,dx\Biggr)^{1/(\gamma_j+s)} \leqslant C(t-\sigma)^{-l}\varkappa^j.$$

Пусть r — целое число из отрезка $[\gamma_{k-1}+s, \gamma_k+s]$. Ясно, что $\varkappa^k \leqslant \varkappa r/s$. Пользуясь неравенством Гельдера и оценкой Стирлинга, найдем

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{w^r}{r!}\,dx \leqslant \frac{1}{r!}\biggl(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} w^{\gamma_k+s}\,dx\biggr)^{r/(\gamma_k+s)} \leqslant$$
$$\leqslant C^r(t-\sigma)^{-lr}\varkappa^{jr}/r! \leqslant C^r(t-\sigma)^{-lr}r^r(r/e)^{-r} \leqslant C^r(t-\sigma)^{-lr}. \quad (3.27)$$

Следовательно, выбрав $\delta_0=(t-\sigma)^l C$, где $C=C(n,p,M)$ достаточно мало, будем иметь

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(w\delta_0)^r}{r!}\,dx \leqslant 2^{-r}.$$

Для $1\leqslant r\leqslant s$ по неравенству Гельдера

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(w\delta_0)^r}{r!}\,dx \leqslant \frac{\delta_0^r}{r!}\biggl(\fint_{B^{x_0}_{tR}} w^s\,dx\biggr)^{r/s} \leqslant \frac{(C\delta_0)^r}{r!}.$$

В итоге за счет малости $\delta_0=\delta_0(n,p,M,t,\sigma)$ получаем

$$\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} e^{\delta_0 w}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} \frac{(\delta_0 w)^r}{r!}\,dx \leqslant e+1.$$

Отсюда по определению w приходим к оценке

$$\biggl(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_0}\,dx\biggr)^{1/\delta_0} \leqslant C(n,p,M,t,\sigma)k. \quad (3.28)$$

Покажем теперь, что для любого $0<q<n(s-1)/(n-1)$ выполняется оценка

$$\biggl(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^{q}\,dx\biggr)^{1/q} \leqslant C(n,p,M,\tau,\sigma,q)\biggl(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_0}\,dx\biggr)^{1/\delta_0}. \quad (3.29)$$

Для этого, выбирая в интегральном тождестве (1.5) пробную функцию

$$\psi=(u+R)^{1-s+\gamma}\eta^{p_2},$$

где $0 < \gamma < s-1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta \in C_0^\infty(B_{\sigma R}^{x_0})$, придем к соотношению

$$(s-1-\gamma) \int\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{\gamma-s} \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant p_2 \int\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-2} (u+R)^{1-s+\gamma} \eta^{p_2-1} \nabla u \nabla \eta\, dx \leqslant$$

$$\leqslant p_2 \int\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)-1} (u+R)^{1-s+\gamma} \eta^{p_2-1} |\nabla \eta|\, dx.$$

По неравенству Юнга

$$\int\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{\gamma-s} \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p,\gamma) \int\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R)^{p(x)-s+\gamma} |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{p_2-p(x)}\, dx, \tag{3.30}$$

откуда находим

$$R^s \int\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} \bigl|\nabla\bigl((u+R)^{\gamma/s} \eta^{p_2/s}\bigr)\bigr|^s\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p,\gamma)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R)^\gamma (\eta^{p_2} + \bigl(R|\nabla\eta|\bigr)^{p_2})\, dx. \tag{3.31}$$

Применяя неравенство Соболева, из (3.31) получаем

$$\fint\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} \bigl((u+R)^\gamma \eta^{p_2}\bigr)^{\varkappa}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(n,p,M,\gamma) \biggl(\fint\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} (u+R)^\gamma \bigl(\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2}\bigr)\, dx \biggr)^{\varkappa}, \tag{3.32}$$

где $\varkappa = n/(n-1)$.

Пусть j_0 — минимальное натуральное число, такое, что $q \leqslant \delta_0 \varkappa^{j_0}$. Положим $\delta_1 = q\varkappa^{-j_0}$ и $r_j = \sigma - j(\sigma-\tau)/j_0$. Пусть еще $\eta_j \in C_0^\infty(B_{r_j}^{x_0})$, $\eta_j = 1$ на $B_{r_{j+1}}^{x_0}$, $0 \leqslant \eta_j \leqslant 1$, $|\nabla\eta_j| \leqslant 2j_0/(\sigma-\tau)$. Последовательно записывая неравенство (3.32) для η_j, $\gamma = \gamma_j = \delta_1 \varkappa^j$, $j = 0, 1, \ldots, j_0$, будем иметь

$$\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^q\,dx = \fint_{B^{x_0}_{r_{j_0}}} (u+R)^{\gamma_{j_0}}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(n,p,M,\tau,\sigma,q)\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_1}\,dx\Bigg)^{\gamma_{j_0}/\delta_1} \leqslant$$
$$\leqslant C(n,p,M,\tau,\sigma,q)\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{\sigma R}} (u+R)^{\delta_0}\,dx\Bigg)^{q/\delta_0},$$

где на последнем шаге мы применили неравенство Гельдера. Совмещая последнее неравенство с (3.28), где $\sigma = (t+\tau)/2$, придем к оценке

$$\Bigg(\fint_{B^{x_0}_{\tau R}} (u+R)^q\,dx\Bigg)^{1/q} \leqslant C(M,p,n,t,\tau,q)k, \tag{3.33}$$

что и составляет утверждение леммы в случае $q < n(s-1)/(n-1)$. Нетрудно видеть, что степень q можно взять любую, меньшую, чем $n(s-1)/(n-s)$, если $s < n$, и любую положительную, если $s \geqslant n$.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено (1.18) и (2.10). Пусть k и w определены формулами (3.8) и (3.22) соответственно. Обозначим

$$W = \min(w, \tilde{w}), \quad U = \min(u, \tilde{u}),$$
$$G = \{u < \tilde{u}\} \cap B^{x_0}_{tR} = \{w < \tilde{w}\} \cap B^{x_0}_{tR},$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{w}$ — четные продолжения u и w из $B^{(2)}$ в $B^{(1)}$ относительно Σ.

Выбирая в (1.5) пробную функцию

$$\psi = \max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}(u+R)^{1-s_2}\eta^{p_2},$$

где $\gamma \geqslant 0$, $c_0 = 9/(s_1-1)$, $\eta \in C_0^\infty(B^{x_0}_{tR})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, будем иметь

$$(s_2-1)\int_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \gamma\int_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla u|^{p(x)-2}(\nabla u\cdot\nabla U)(u+R)^{1-s_2}(U+R)^{-1}\chi_{\{W>c_0(\gamma+s_1)\}}\times$$
$$\times\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma-1}\eta^{p_2}\,dx +$$

$$+\,p_2\int\limits_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)-2}(u+R)^{1-s_2}\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2-1}\nabla u\nabla\eta\,dx.$$

Так как

$$\frac{\gamma}{\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)}\leqslant\frac{1}{c_0}\leqslant\frac{s_1-1}{9}\leqslant\frac{s_2-1}{9}$$

и $U=u$ в $(B_{tR}^{x_0}\cap D^{(2)})\cup G$, получаем

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{8}\int\limits_{(B_{tR}^{x_0}\cap D^{(1)})\setminus G}|\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\tilde u|(\tilde u+R)^{-1}(u+R)^{1-s_2}\chi_{\{W>c_0(\gamma+s_1)\}}\times$$

$$\times\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx+$$

$$+\,\frac{2p_2}{s_2-1}\int\limits_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s_2}\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2-1}|\nabla\eta|\,dx.$$

По неравенству Юнга

$$|\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla\tilde u|(\tilde u+R)^{-1}(u+R)^{1-s_2}\leqslant$$

$$\leqslant|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}+|\nabla\tilde u|^{s_2}(\tilde u+R)^{-s_2}(u+R)^{-s_2},$$

и

$$|\nabla u|^{p(x)-1}(u+R)^{1-s_2}\eta^{p_2-1}|\nabla\eta|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{s_2-1}{4p_2}|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}\eta^{p_2}+C(p)(u+R)^{p(x)-s_2}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{B_{tR}^{x_0}}|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{6}\int\limits_{(B_{tR}^{x_0}\cap D^{(1)})\setminus G}|\nabla\tilde u|^{s_2}(\tilde u+R)^{-s_2}\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx+$$

$$+\,C(p)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}}(u+R)^{p(x)-s_2}\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx+$$

$$+\int\limits_{(B_{tR}^{x_0}\cap D^{(1)})\setminus G}(u+R)^{-s_2}\max\bigl(W,c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx.$$

Так как $|\nabla u|^{s_2} \leqslant |\nabla u|^{p(x)}+1$ для $x \in B^{(2)}$, сужая в левой части область интегрирования до $B^{(2)}$, получаем

$$\int\limits_{B^{x_0}_{tR}\cap D^{(2)}} |\nabla u|^{s_2}(u+R)^{-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{6}\int\limits_{(B^{x_0}_{tR}\cap D^{(1)})\setminus G} |\nabla \tilde u|^{s_2}(\tilde u+R)^{-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx +$$
$$+ C(p)\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} (u+R)^{p(x)-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2-p(x)}|\nabla\eta|^{p(x)}\,dx +$$
$$+ \int\limits_{B^{x_0}_{tR}} (u+R)^{-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx.$$

Так как $W = \tilde w$ в $(B^{x_0}_{tR}\cap D^{(1)})\setminus G$, легко получаем

$$\int\limits_{B^{x_0}_{tR}\cap D^{(2)}} |\nabla u|^{s_2}(u+R)^{-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p)\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} (u+R)^{p(x)-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx +$$
$$+ C(p)\int\limits_{B^{x_0}_{tR}\cap D^{(2)}} (u+R)^{-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx.$$

Домножая это соотношение на R^{s_2}, в силу (2.9) будем иметь

$$R^{s_2}\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla u|^{s_2}(u+R)^{-s_2}\max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2(M+1)^{p_2}\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} \max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\bigl(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2}\bigr)\,dx.$$

По неравенству Юнга

$$R^{s_1}|\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1} \leqslant R^{s_2}|\nabla u|^{s_2}(u+R)^{-s_2}+1,$$

откуда находим

$$R^{s_1} \int\limits_{B^{x_0}_{tR}\cap D^{(2)}} |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1} \max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B^{x_0}_{tR}} \max\bigl(W, c_0(\gamma+s_1)\bigr)^{\gamma}\bigl(\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2}\bigr)\,dx. \quad (3.34)$$

Для нахождения аналогичной оценки в G выберем в (1.5) пробную функцию

$$\psi = \left(f(u) - f(\tilde u)\right)_+ \eta^{p_2},$$

где

$$f(u) = (u+R)^{1-s_1}\left(\max\left(\ln\frac{u+R}{k}, c_0(\gamma+s_1)\right)\right)^{\gamma}.$$

Напомним, что $c_0 = 2/(s_1-1)$, $\gamma \geqslant 0$. Согласно выбору c_0

$$-f'(u) \geqslant \frac{s_1-1}{2}(u+R)^{-s_1}\left(\max\left(\ln\frac{u+R}{k}, c_0(\gamma+s_1)\right)\right)^{\gamma},$$

следовательно, функция f является монотонно убывающей. Поэтому $\psi = 0$ вне множества G. Кроме того,

$$-f'(u) \leqslant (s_1-1)(u+R)^{-s_1}\left(\max\left(\ln\frac{u+R}{k}, c_0(\gamma+s_1)\right)\right)^{\gamma} := g(u).$$

Функция $g(u)$ монотонно убывает, следовательно,

$$-f'(\tilde u) \leqslant -2f'(u), \quad f(\tilde u) \leqslant f(u) \quad \text{на} \quad G.$$

Далее,

$$f(u) \leqslant -c_0^{-1}(u+R)f'(u).$$

Из (1.5) имеем

$$-\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)} f'(u)\eta^{p_2}\,dx \leqslant -\int\limits_G \eta^{p_2} f'(\tilde u)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\tilde u\,dx +$$

$$+ p_2\int\limits_G \bigl(f(u) - f(\tilde u)\bigr)\eta^{p_2-1}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\eta\,dx.$$

Используя неравенства Юнга и оценки дляf, f', получим

$$\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)} \big|f'(u)\big|\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p)\int\limits_G |\nabla \tilde u|^{p(x)}\big|f'(\tilde u)\big|\eta^{p_2}\,dx + \\ + C(p)\int\limits_G (u+R)^{p(x)}|f'(u)|\cdot|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx.$$

Подставляя сюда оценку $f'(u)$, имеем

$$\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)}\big(u+R\big)^{-s_1}\Big(\max\big(w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p)\int\limits_G |\nabla\tilde u|^{p(x)}(\tilde u+R)^{-s_1}\Big(\max\big(\tilde w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx + \\ + C(p)\int\limits_G \big(u+R\big)^{p(x)-s_1}\Big(\max\big(w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma}|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}\,dx.$$

Применяя неравенство $|\nabla u|^{s_1} \leqslant |\nabla u|^{p(x)}+1$, умножая обе части последнего соотношения на R^{s_1}, пользуясь (2.8) и очевидным неравенством $R^{s_1} \leqslant (u+R)^{s_1}$, приходим к оценке

$$R^{s_1}\int\limits_G |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{-s_1}\Big(\max\big(w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p)(M+1)^{p_2}\int\limits_G \Big(\max\big(w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma}(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx + \\ + C(p)\int\limits_G (R|\nabla\tilde u|)^{p(x)}(\tilde u+R)^{-s_1}\Big(\max\big(\tilde w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx. \quad (3.35)$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся неравенством Юнга:

$$\big(R|\nabla\tilde u|\big)^{p(x)}(\tilde u+R)^{-s_1} \leqslant \big(R|\nabla\tilde u|\big)^{s_2}(\tilde u+R)^{-s_2} + (\tilde u+R)^{r(x)},$$

где показатель $r(x)$ определен (2.19), $r \leqslant p_2$. Из последней оценки и (3.34)

$$\int\limits_G (R|\nabla\tilde u|)^{p(x)}(\tilde u+R)^{-s_1}\Big(\max\big(\tilde w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{B_{tR}^{x_0}\cap D^{(2)}} (R|\nabla u|)^{s_2}(u+R)^{-s_2}\Big(\max\big(w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx +$$

$$+ C(p)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B_{tR}^{x_0}\cap D^{(2)}} \Big(\max\big(w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma} \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \max\big(W, c_0(\gamma+s_1)\big)^{\gamma} (\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\, dx.$$

Подставляя последнюю оценку в (3.35), получаем

$$R^{s_1} \int\limits_{G} |\nabla u|^{s_1} (u+R)^{-s_1} \Big(\max\big(w, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma} \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} \max\big(W, c_0(\gamma+s_1)\big)^{\gamma} (\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\, dx. \quad (3.36)$$

Совмещая (3.34) и (3.36), приходим к неравенству

$$R^{s_1} \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla W|^{s_1} \Big(\max\big(W, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma} \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \Big(\max\big(W, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma} (\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\, dx.$$

Следовательно,

$$R^{s_1} \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \left|\nabla \Big(\max\big(W, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{(\gamma+s_1)/s_1} \eta^{p_2/s_1}\right|^{s_1} dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p)(M+1)^{p_2} \fint\limits_{B_{tR}^{x_0}} \Big(\max\big(W, c_0(\gamma+s_1)\big)\Big)^{\gamma+s_1} (\eta^{p_2} + (R|\nabla\eta|)^{p_2})\, dx. \quad (3.37)$$

Далее воспользуемся теми же рассуждениями, что и при выводе оценки (3.28) из (3.7) и (3.23). Из (3.19) и (3.37) для $\sigma \in (\tau, t)$ и достаточно малого $\delta_0 = \delta_0(n, p, M, \sigma, t)$ найдем

$$\fint\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} (v/k)^{\delta_0}\, dx \leqslant 1 + \fint\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} e^{\delta_0 W}\, dx \leqslant e + 2.$$

Таким образом,

$$\Bigg(\fint\limits_{B_{\sigma R}^{x_0}} v^{\delta_0}\, dx\Bigg)^{1/\delta_0} \leqslant C(n, p, M, \sigma, t) k.$$

Получим теперь оценку, аналогичную (3.29).

Возьмем в (1.5) пробную функцию

$$\psi = (u+R)^{1-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}, \quad 0<\gamma<s_1-\frac{1}{2},$$

где $\eta \in C_0^\infty(B_{tR}^{x_0})$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. Имеем

$$(s_2-1)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \gamma \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{1-s_2} v^{\gamma-1}\eta^{p_2}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\,dx +$$
$$+ p_2 \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{1-s_2} v^{\gamma}\eta^{p_2-1}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \eta\,dx.$$

Так как $v=u+R$ на $B^{(2)}\cup G$,

$$(s_2-1-\gamma)\int\limits_{B_{tR}^{x_0}} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\,dx +$$
$$+\gamma \int\limits_{(B_{tR}^{x_0}\cap D^{(1)})\setminus G} |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \gamma \int\limits_{(B_{tR}^{x_0}\cap D^{(1)})\setminus G} (u+R)^{1-s_2} v^{\gamma-1}\eta^{p_2}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \tilde{u}\,dx +$$
$$+ p_2 \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} (u+R)^{1-s_2} v^{\gamma}\eta^{p_2-1}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla \eta\,dx.$$

Применим для оценки последнего члена неравенство Юнга в виде

$$p_2(u+R)^{1-s_2}v^\gamma\eta^{p_2-1}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\eta \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon|\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}v^\gamma\eta^{p_2} + C(\varepsilon)(u+R)^{p(x)-s_2}v^\gamma|\nabla\eta|^{p(x)}\eta^{p_2-p(x)}.$$

Также по неравенству Юнга для $x\in (B_{tR}^{x_0}\cap D^{(1)})\setminus G$ имеем

$$(u+R)^{1-s_2}v^{\gamma-1}|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\tilde{u} \leqslant$$
$$\leqslant |\nabla u|^{p(x)}(u+R)^{-s_2}v^\gamma + |\nabla \tilde{u}|^{s_2}(\tilde{u}+R)^{-s_2}v^\gamma + (u+R)^{-s_2}v^\gamma.$$

Таким образом,

$$(s_2 - 1 - \gamma - \varepsilon) \int\limits_{B^{x_0}_{tR}} |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \gamma \int\limits_{(B^{x_0}_{tR} \cap D^{(1)}) \setminus G} |\nabla \tilde{u}|^{s_2} (\tilde{u}+R)^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\, dx +$$
$$+ \gamma \int\limits_{(B^{x_0}_{tR} \cap D^{(1)}) \setminus G} (u+R)^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\, dx +$$
$$+ C(\varepsilon) \int\limits_{B^{x_0}_{tR}} (u+R)^{p(x)-s_2} v^\gamma |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{p_2 - p(x)}\, dx.$$

Сужая в левой части область интегрирования на $B^{x_0}_{tR} \cap D^{(2)}$, используя $|\nabla u|^{s_2} \leqslant |\nabla u|^{p(x)} + 1$, очевидное соотношение $(u+R)^{-s_2} \leqslant R^{-s_2}$ и определение $\tilde{u}$, v, приходим к оценке

$$(s_2 - 1 - 2\gamma - \varepsilon) \int\limits_{B^{x_0}_{tR} \cap D^{(2)}} |\nabla u|^{s_2} (u+R)^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant p_2 \int\limits_{B^{x_0}_{tR}} R^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\, dx + C(\varepsilon) \int\limits_{B^{x_0}_{tR}} (u+R)^{p(x)-s_2} v^\gamma |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{p_2 - p(x)}\, dx. \tag{3.38}$$

Домножая это неравенство на R^{s_2}, используя (2.9) и условие

$$\gamma < \frac{s_1 - 1}{2} < \frac{s_2 - 1}{2},$$

будем иметь

$$R^{s_2} \int\limits_{B^{x_0}_{tR} \cap D^{(2)}} |\nabla u|^{s_2} (u+R)^{-s_2} v^\gamma \eta^{p_2}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C(p, \gamma)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B^{x_0}_{tR}} v^\gamma (\eta^{p_2} + (R|\nabla \eta|)^{p_2})\, dx.$$

Отсюда

$$R^{s_1} \int\limits_{B_{tR}^{x_0} \cap D^{(2)}} |\nabla u|^{s_1} (u+R)^{\gamma - s_1} \eta^{p_2} \, dx +$$

$$+ R^{s_2} \int\limits_{B_{tR}^{x_0} \cap D^{(2)}} |\nabla u|^{s_2} (u+R)^{\gamma - s_2} \eta^{p_2} \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(p,\gamma)(M+1)^{p_2} \int\limits_{B_{tR}^{x_0}} v^{\gamma} (\eta^{p_2} + (R|\nabla \eta|)^{p_2}) \, dx. \tag{3.39}$$

Для получения аналогичной оценки в G возьмем в (1.5) пробную функцию

$$\psi = \big((u+R)^{1-s_1+\gamma} - (\tilde{u}+R)^{1-s_1+\gamma}\big)_+ \eta^{p_2}.$$

Легко видеть, что ψ обращается в ноль вне G. Имеем

$$(s_1 - 1 - \gamma) \int\limits_G |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{\gamma - s_1} \eta^{p_2} \, dx \leqslant$$

$$\leqslant (s_1 - 1 - \gamma) \int\limits_G \eta^{p_2} (\tilde{u}+R)^{\gamma - s_1} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \tilde{u} \, dx +$$

$$+ p_2 \int\limits_G \eta^{p_2 - 1} \big((u+R)^{1-s_1+\gamma} - (\tilde{u}+R)^{1-s_1+\gamma}\big)_+ |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \eta \, dx.$$

Отсюда применением неравенства Юнга легко получить оценку

$$\int\limits_G |\nabla u|^{p(x)} (u+R)^{\gamma - s_1} \eta^{p_2} \, dx \leqslant C(p,\gamma) \int\limits_G |\nabla \tilde{u}|^{p(x)} (\tilde{u}+R)^{\gamma - s_1} \eta^{p_2} \, dx +$$

$$+ C(p,\gamma) \int\limits_G (u+R)^{p(x) - s_1 + \gamma} |\nabla \eta|^{p(x)} \eta^{p_2 - p(x)} \, dx.$$

Используя соотношение $|\nabla u|^{s_1} \leqslant |\nabla u|^{p(x)} + 1$, домножая неравенство на R^{s_1} и пользуясь (2.7), (2.8), будем иметь

$$R^{s_1} \int\limits_G |\nabla u|^{s_1} (u+R)^{\gamma - s_1} \eta^{p_2} \, dx \leqslant C(p,\gamma) \int\limits_G (u+R)^{\gamma} (\eta^{p_2} + (R|\nabla \eta|)^{p_2}) \, dx +$$

$$+ C(p,\gamma) \int\limits_G (R|\nabla \tilde{u}|)^{p(x)} (\tilde{u}+R)^{\gamma - s_1} \eta^{p_2} \, dx.$$

Оценим подынтегральное выражение в последнем члене как

$$(R|\nabla\tilde{u}|)^{p(x)}(u+R)^{\gamma-s_1} \leqslant (R|\nabla\tilde{u}|)^{s_2}(\tilde{u}+R)^{\gamma-s_2} + (\tilde{u}+R)^{\gamma+r(x)},$$

где показатель r дан в (2.19), $r \leqslant p_2$. Отсюда, используя (3.39), получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_G (R|\nabla\tilde{u}|)^{p(x)}(\tilde{u}+R)^{\gamma-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{B^{x_0}_{tR}\cap D^{(2)}} (R|\nabla u|)^{s_2}(u+R)^{\gamma-s_2}\eta^{p_2}\,dx + \\ + (M+1)^{p_2}\int\limits_{B^{x_0}_{tR}\cap D^{(2)}} (u+R)^{\gamma}\eta^{p_2}\,dx \leqslant \\ \leqslant C(p,\gamma)(M+1)^{p_2}\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} v^{\gamma}(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$R^{s_1}\int\limits_G |\nabla u|^{s_1}(u+R)^{\gamma-s_1}\eta^{p_2}\,dx \leqslant C(p,\gamma)\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} v^{\gamma}(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx. \tag{3.40}$$

Из (3.39) и (3.40) по определению v легко получаем

$$R^{s_1}\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} \big|\nabla\big(v^{\gamma/s_1}\eta^{p_2/s_1}\big)\big|^{s_1}\,dx \leqslant C(p,\gamma)\int\limits_{B^{x_0}_{tR}} v^{\gamma}(\eta^{p_2}+(R|\nabla\eta|)^{p_2})\,dx.$$

Отсюда следует аналог оценки (3.29) для v:

$$\bigg(\fint\limits_{B^{x_0}_{\tau R}} v^q\,dx\bigg)^{1/q} \leqslant C(n,p,M,q,\tau,\sigma)\bigg(\fint\limits_{B^{x_0}_{\sigma R}} v^{\delta_0}\,dx\bigg)^{1/\delta_0}.$$

Выбирая, как и выше, $\sigma = (t+\tau)/2$, будем иметь

$$\bigg(\fint\limits_{B^{x_0}_{\tau R}} v^q\,dx\bigg)^{1/q} \leqslant C(n,p,M,q,\tau,t)k.$$

Лемма 3.2 доказана. □

Доказательство теоремы 1.5. Совмещая оценки лемм 3.1 и 3.2, в которых $t = 3$, $\sigma = 1$ и $\tau = 2$, получаем

$$\left(\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} (u+R)^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \exp\left(C + \fint\limits_{B_{3R}^{x_0}} \ln(u+R)\,dx\right) \leqslant C \inf_{B_R^{x_0}} (u+R).$$

Теорема 1.5 доказана. □

Доказательство теоремы 1.6. Если выполнено (2.11), то выполняется (1.16) с константой $6L$ вместо L. Применяя теорему 1.5 и определение v, имеем

$$\left(\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} v^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} (u+R)^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant C \inf_{B_R^{x_0}} (u+R) = C \inf_{B_R^{x_0}} v.$$

Если выполняется (2.10), то в силу оценок лемм 3.1 и 3.2 с параметрами $t = 3$, $\sigma = 1$ и $\tau = 2$, выполняется

$$\left(\int\limits_{B_{2R}^{x_0}} v^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant \exp\left(C + \fint\limits_{B_{3R}^{x_0}} \ln v\,dx\right) \leqslant C \inf_{B_R^{x_0}} v.$$

Теорема 1.6 доказана. □

Замечание 3.1. Нетрудно видеть, что в конце доказательства леммы 3.2 в случае выполнения условий (1.18) и (1.10) можно брать любое $\gamma < s_1 - 1$, если $p^{(2)} - p^{(1)} \geqslant h > 0$. Соответственно, в этом случае в неравенстве (3.21) допустимы $0 < q < n(s_1 - 1)/(n-1)$, а константа C зависит также от h. Таким образом, в теореме 1.6 при выполнении условия $p^{(2)} - p^{(1)} > h > 0$ также допустимо $0 < q < n(s_1 - 1)/(n-1)$, а константа C в неравенстве (1.23) будет зависеть еще и от h. Если же указанное дополнительное тельное условие на величину скачка показателя отсутствует, то, действуя предложенным способом не составит большого труда получить искомые неравенства для функции $v = \min(u, \tilde{u}) + R^{\nu}$, где ν — произвольное число из интервала $(0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47, № 5. С. 961—995.

2. *Жиков В. В.* Усреднение нелинейных функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, № 4. С. 675—711.
3. *Růžička M.* Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Berlin: Springer, 2000.
4. *Жиков В. В.* Оценки типа Мейерса для решения нелинейной системы Стокса // Дифференц. уравн. 1997. Т. 33, № 1. С. 107—114.
5. *Жиков В. В.* Разрешимость трехмерной задачи о термисторе // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 101—114.
6. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin: Springer, 2011. (Lect. Notes Math.; Vol. 2017).
7. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Basel: Birkhäuser; Springer, 2013.
8. *Kokilashvili V., Meshkii A., Rafeiro H., Samko S.* Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Vol. 1: Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces. Vol. 2: Variable Exponent Hölder, Morrey—Campanato and Grand Spaces. Basel: Birkhäuser; Springer, 2016. (Operator Theory: Adv. Appl.; Vols. 248, 249).
9. *Zhikov V.* On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions // J. Math. Sci. 2011. V. 173, N 5. P. 463—570.
10. *Жиков В. В.* О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2017.
11. *Zhikov V. V.* On Lavrentiev's phenomenon // Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3, N 2. P. 249—269.
12. *Жиков В. В.* О постановке краевых задач для интегрантов вида $|\xi|^{\alpha(x)}$ // УМН. 1986. Т. 41, № 4. С. 187—188.
13. *Алхутов Ю. А.* Неравенство Харнака и гельдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Дифференц. уравн. 1997. Т. 33, № 12. С. 1651—1660.
14. *Алхутов Ю. А., Крашенинникова О. А.* Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 6. С. 3—60.
15. *Крашенинникова О. А.* О непрерывности в точке решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 204—211.
16. *Алхутов Ю. А., Крашенинникова О. А.* О непрерывности решений эллиптических уравнений с переменным порядком нелинейности // Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 7—15.
17. *Жиков В. В.* О плотности гладких функций в пространстве Соболева—Орлича // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 310. С. 67—81.

18. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 2. С. 19—52.
19. *Acerbi E., Fusco N.* A transmission problem in the calculus of variations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 1994. V. 2, N 1. P. 1—16.
20. *Алхутов Ю. А.* О гельдеровой непрерывности $p(x)$-гармонических функций // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 2. С. 3—28.
21. *Serrin J.* Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations // Acta Math. 1964. V. 111. P. 247—302.
22. *Trudinger N. S.* On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 721—747.
23. *Алхутов Ю. А., Сурначёв М. Д.* О неравенстве Харнака для эллиптического (p,q)-лапласиана // Докл. РАН. 2016. Т. 470, № 6. С. 623—627.
24. *Alkhutov Yu. A., Surnachev M. D.* A Harnack inequality for a transmission problem with $p(x)$-Laplacian // Appl. Anal. 2018. DOI: 10.1080/00036811.2017.1423473.
25. *Moser J.* On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 577—591.
26. *Trudinger N. S.* On the regularity of generalized solutions of linear, non-unformly elliptic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1971. V. 42. P. 50—62.
27. *Alkhutov Yu. A., Surnachev M. D.* Regularity of a boundary point for the $p(x)$-Laplacian // J. Math. Sci. 2018. V. 232, No. 3. P. 206—231.