L. A. Sakhnovich, Dissipative operators with an absolutely continuous spectrum,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1966, Volume 167, Number 4, 760–763

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 517.432 МАТЕМАТИКА

Л. А. САХНОВИЧ

О ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРАХ С АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 30 VI 1965)

п. 1. В настоящей работе рассматривается несамосопряженный оператор A класса $i\Omega$ ([1]) с непрерывным спектром. Кроме того, будем предполагать, что оператор A диссипативен, т. е. $(A - A^*) / i \geqslant 0$. Как показал М. С. Лившиц ([1]), характеристическая матрица-функция такого оператора представляется в виде

$$w(\lambda) = \overset{l}{\underset{0}{\overset{\curvearrowright}{\int}}} \exp\left[-\frac{i\beta^2(t)}{\alpha(t)-\lambda}dt\right],$$

где функция $\alpha(t)$ монотонно возрастает и ограничена, а матрица $\beta(x)$ неотрицательна и $\operatorname{sp} \beta^2(x) \equiv 1$.

Предположим дополнительно, что оператор A имеет абсолютно непрерывный спектр, т. е. функция $t = \alpha(x)$ имеет абсолютно непрерывную обратную функцию $x = \sigma(t)$. В этом случае

$$w(\lambda) = \overset{b}{\underset{0}{\overset{\curvearrowright}{\int}}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)}{t-\lambda}dt\right],$$

где $\beta_1(t) = p(t)\beta(\sigma(t)),\ p(t) = \sqrt{\sigma'(t)},\ a = \alpha(0),\ b = \alpha(l)$.

Треугольная модель оператора A, как это следует из работы ([1]), может быть записана в виде

$$\vec{A}f = xf(x) + i\int_a^x f(t)\beta_1(t)\,dt\beta_1(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{1}$$

Теорема 1. *Дополнительная компонента оператора $\vec{A}$ состоит из тех и только тех вектор-функций $f(x) \in L_r^2[a, b]$, для которых почти всюду справедливо равенство*

$$f(x)\beta_1(x) \equiv 0, \quad \text{если} \quad \|\beta_1(x)\| \leqslant M.$$

п. 2. Для дальнейшего существенно поведение мультипликативного интеграла

$$w(b, \lambda) = \overset{b}{\underset{a}{\overset{\curvearrowright}{\int}}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)}{t-\lambda}dt\right] \quad \left(\int_a^b \|\beta_1^2(t)\|\,dt < \infty\right) \tag{2}$$

при $\tau \to 0$ $(\lambda = \sigma + i\tau)$.

Теорема 2. *Почти для всех $\sigma \in [a, b]$ существуют предельные значения*

$$w^{\pm}(\sigma) = \lim_{\tau \to \pm 0} w(b, \lambda)$$

и имеют место формулы

$$w^{\pm}(\sigma) = \lim_{\varepsilon\to 0} \overset{\curvearrowright}{\int_a^{\sigma-\varepsilon}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)}{t-\gamma}dt\right] \exp\left[\pm\pi\beta_1^2(\sigma)\right] \overset{\curvearrowright}{\int_{\sigma+\varepsilon}^{b}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)}{t-\gamma}dt\right], \qquad (3)$$

где пределы понимаются в смысле сильной сходимости.

Теорема ранее нами доказывалась при условии ограниченности $\operatorname{sp}\beta_1^2(t)$ (2, 3).

Из формулы (3) вытекает

$$w^{\pm}(\sigma) = R^{\pm 1}(\sigma)u(b, \sigma), \qquad (4)$$

где

$$R^{\pm 1}(\sigma) = \lim_{\varepsilon\to+0} \overset{\curvearrowright}{\int_a^{\sigma-\varepsilon}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)\,dt}{t-\sigma}\right] \exp\left[\pm\pi\beta_1^2(\sigma)\right] \left[\overset{\curvearrowright}{\int_a^{\sigma-\varepsilon}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)}{t-\sigma}dt\right]\right]^{-1} =$$

$$= \exp\left[\pm\pi r^2(\sigma)\right], \qquad (5)$$

$$U(b, \sigma) = \lim_{\varepsilon\to+0} \overset{\curvearrowright}{\int_a^{\sigma-\varepsilon}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)}{t-\sigma}dt\right] \overset{\curvearrowright}{\int_{\sigma+\varepsilon}^{b}} \exp\left[-i\frac{\beta_1^2(t)}{t-\sigma}dt\right]. \qquad (6)$$

Обозначим через H и H_1 замыкание многообразий, в которые переходит $L_r^2[a, b]$ при умножении его элементов соответственно на $\beta_1(x)$ и $R(x) - R^{-1}(x)$.

В силу теоремы 1 оператор $\vec{A}$ индуцирует на H свою простую часть. В дальнейшем будем рассматривать оператор $\vec{A}$ лишь на пространстве H.

В (4–6) мы построили взаимно обратные операторы B и B^{-1}, определенные на плотных множествах соответственно в H_1 и H при помощи формул

$$B\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(\sigma)\sqrt{R(\sigma) - R^{-1}(\sigma)}\,U(x, \sigma)\,d\sigma\,\beta_1^{-1}(x), \qquad (7)$$

$$B^{-1}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_a^x [f(\sigma)\beta_1^{-1}(\sigma)]'\,U^*(\sigma, x)\,d\sigma + f(a)\beta_1^{-1}(a)\right\}\sqrt{R(x) - R^{-1}(x)}. \qquad (8)$$

Здесь

$$U(x, \sigma) = \lim_{\varepsilon\to+0} \overset{\curvearrowright}{\int_a^{\sigma-\varepsilon}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)}{t-\sigma}dt\right] \overset{\curvearrowright}{\int_{\sigma+\varepsilon}^{b}} \exp\left[-\frac{i\beta_1^2(t)}{t-\sigma}dt\right].$$

Формулам (7)—(8) может быть придан смысл и в том случае, когда матрица $\beta_1(x)$ не имеет обратной на множестве положительной меры (4–6).

п. 3. Имеет место соотношение

$$\vec{A} = BQB^{-1}, \qquad (9)$$

где Q является оператором умножения на независимую переменную

$$Qf = xf, \quad f \in H_1.$$

Заметим, что при выводе соотношений (7)—(9) мы в работах (4–6) предполагали $\operatorname{sp}\beta_1^2(t)$ ограниченным. Однако от этого условия легко освободиться, пользуясь теоремой 2.

Если $\vec{A}$ и Q связаны соотношением типа (9), то они называются **линейно подобными** [4–5]. Если при этом B и B^{-1} ограничены, то операторы $\vec{A}$ и Q называются **линейно эквивалентными**.

Теорема 3. *Справедливы соотношения*

$$\|e^{-\frac{\pi}{2}r^2}B^{-1}\| = 1, \quad \|Be^{-\frac{\pi}{2}r^2}\| = 1,$$

где оператор $e^{-\frac{\pi}{2}r^2}$ *определен формулой*

$$e^{-\frac{\pi}{2}r^2}f = f(x)e^{-\frac{\pi}{2}r^2(x)}.$$

Теорема 4. *Для того чтобы оператор $\vec{A}$ был линейно эквивалентен самосопряженному оператору, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{vrai\,sup}\|\beta_1^2(x)\| = M < \infty. \tag{10}$$

Следствие. *Если условие (10) выполняется, то оператор $\vec{A}$ эквивалентен Q, причем*

$$\|B\| = e^{\frac{\pi}{2}M}, \quad \|B^{-1}\| = e^{\frac{\pi}{2}M}.$$

В терминах характеристической матрицы-функции теорема 4 допускает следующую переформулировку.

Теорема 4′ *. *Для того чтобы диссипативный оператор A класса $i\Omega$ с абсолютно непрерывным спектром был линейно эквивалентен самосопряженному, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{vrai\,sup}\|w^+(\sigma)\| < \infty.$$

Теорема 3 позволяет изучать оператор A и в том случае, когда условие (10) не выполняется.

Теорема 5. *Кратность спектра оператора A равна*

$$N = \operatorname{vrai\,sup}\operatorname{rang}\beta_1^2(x) = \operatorname{vrai\,sup}\operatorname{rang}[w^+(x) - w^-(x)].$$

Следствие. *Оператор A распадается на сумму N индуцированных операторов первой кратности.*

Теорема 6. *Существуют инвариантные подпространства $H^{(n)}$ и $H_1^{(n)}$ соответственно операторов A и Q такие, что индуцированные на них операторы $A^{(n)}$ и $Q^{(n)}$ линейно эквивалентны. При этом операторы проектирования на эти пространства*

$$P^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} I, \quad P^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} I.$$

Все результаты остаются верными и для операторов, не принадлежащих классу $i\Omega$, характеристическая матрица-функция которых допускает представление (2).

Заметим, что сформулированные здесь теоремы могут быть перенесены на случай, когда один из концов сегмента $[a, b]$ или оба бесконечны. В этом случае операторы A и Q неограничены.

п. 4. Изучим поведение e^{iAt} при $t \to \pm\infty$. Сравнивать его будем с поведением e^{iA_1t} при $t \to \pm\infty$, где A_1 — действительная компонента A $(A_1 = (A + A^*)/2)$. Пусть G — подпространство, соответствующее абсолютно непрерывной части спектра A_1, а P_G — оператор проектирования на G.

---

* *Примечание при корректуре.* Более общий результат получен Б. С. Надем и К. Фояшем [10].

Теорема 7. *Пусть простой оператор A удовлетворяет условиям теоремы $4'$. Тогда существуют сильные пределы*

$$W_{\pm}(A, A_1) = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iAt}e^{-iA_1t}P_G,$$

$$W_{\pm}(A_1, A) = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iA_1t}e^{-iAt}.$$

При этом операторы $W_{\pm}(A, A_1)$ и $W_{\pm}(A_1, A)$ ограничены вместе с обратными и выполняются соотношения

$$A = W_{\pm}(A, A_1)A_1W_{\pm}(A, A_1)^{-1}, \quad A_1 = W_{\pm}(A_1, A)AW_{\pm}(A_1, A)^{-1},$$
$$W_{\pm}(A, A_1) = W_{\pm}^{-1}(A_1, A),$$

где A_1 рассматривается лишь на G.

Таким образом, теорема 7 распространяет на несамосопряженные операторы известную теорему Розенблюма — Като ([7, 8]). Заметим, что некоторые результаты в этом направлении были получены ранее ([9]).

Введем оператор рассеяния S по формуле

$$S = W_-^{-1}(A, A_1)W_+(A, A_1).$$

Оператор S определен в G и перестановочен в G с A, $\|S\| \leqslant 1$.

Теорема 8. *Оператор S унитарно эквивалентен умножению на матрицу:*

$$S(x) = I - \sqrt{R(x) - R^{-1}(x)}R^{1/2}(x)U(b, x)(I + R(x)U(b, x))^{-1} \times$$
$$\times R^{-1/2}(x)\sqrt{R(x) - R^{-1}(x)}$$

в пространстве H_1. Здесь R и U связаны с характеристической функцией w оператора A соотношениями (4) — (6).

Одесский электротехнический институт связи

Поступило 21 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Лившиц, Матем. сборн., **34**(76), 1, 175 (1954). [2] Л. А. Сахнович, УМН, **12**, в. 3, 205 (1957). [3] Л. А. Сахнович, Укр. матем. журн., ч. 11, в. 3, 275 (1959). [4] Л. А. Сахнович, Матем. сборн., 44 (86), 4, 509 (1958). [5] Л. А. Сахнович, ДАН, **115**, № 3, 462 (1957). [6] Л. А. Сахнович, О приведении несамосопряженных операторов к диагональному виду, кандидатская диссертация, Одесский гос. пед. инст. им. К. Д. Ушинского, 1956. [7] M. Rosenblum, Pacif. J. Math., **7**, № 1, 997 (1957). [8] T. Kato, Proc. Japan. Acad., **33**, № 5, 260 (1957). [9] И. В. Станкевич, ДАН, **160**, № 6 (1965). [10] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Acta Sci. Math., **26**, 79 (1965).