V. G. Zuravlev, A correspondence between theta series of ternary and quasiternary quadratic forms, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1991, Volume 196, 61–82

В.Г.Журавлев

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ТЕТА-РЯДАМИ ТЕРНАРНЫХ И КВАТЕРНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Введение

В [6] построен в терминах матриц Эйхлера-Брандта подъем Шимуры тета-рядов тернарных квадратичных форм. В данной работе для общих тета-рядов со сферическими коэффициентами показано, что указанный подъем индуцирован эпиоморфизмом ι группы кватернионов $\mathfrak{A}^{\times}$ на ортогональную группу O трехмерного квадратичного пространства кватернионов с нулевым следом $V = \mathfrak{A}_0$.

Более конкретно, пусть $\mathfrak{A}$ – алгебра определенных кватернионов над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, d – произведение простых чисел, нерасщепляющих $\mathfrak{A}$; n – неотрицательное целое число и $\mathfrak{M}_{n+3/2} = \mathfrak{M}(L, \varphi(L), P_1)$ – пространство тета-рядов $\theta(z, f')$ (п.3.6) полуцелого веса $n+3/2$ для решеток из рода $[L]$ решетки $L = V \cap \Omega$, где Ω (п.I.5) – некоторый порядок алгебры $\mathfrak{A}$ дискриминанта Δ и функция f' из множества $F'_{2n} = F_{2n}(U' \setminus O_{\mathbb{A}} / O)$ (п.2.3); аналогично, $\mathfrak{M}_{2n+2} = \mathfrak{M}(\Omega, \varphi(\Omega, I), \xi)$ – пространство тета-рядов $\theta(z, f)$ (п.4.6) целого веса $2n+2$ для решеток из рода $[\Omega]$ и f из множества функций $F_{2n} = F_{2n}(U \setminus \mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}} / \mathfrak{A}^{\times})$ (п.2.I); δ – мономорфизм (2.7) из F'_{2n} в F_{2n} и

$$\mathfrak{M}_{n+3/2} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{M}_{2n+2} : \theta(z, f') \longmapsto \theta(z, \delta(f')); \tag{I}$$

пусть $T(p)$ и $\hat{T}(p^2)$ – операторы Гекке (4.9) и (3.8) группы GL_2 и ее накрывающей и $T'(p^2)$ – оператор Гекке из п.3.5 на пространстве F'_{2n}. В этих обозначениях имеет место

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Для четных n и простых чисел $p \nmid 2\Delta$ или $p \mid d$ выполняются следующие утверждения.

I. Подпространство $\delta(\mathfrak{M}_{n+3/2}) \subset \mathfrak{M}_{2n+2}$ инвариантно относительно операторов Гекке $T(p)$.

2. Если $f' \in F'_{2n}$ – собственная функция оператора $T'(p^2)$ с собственным значением $\lambda'(p^2)$, то

$$\theta(z, f')\big|_{m/2, \chi} \hat{T}(p^2) = p^n \lambda'(p^2)\, \theta(z, f') \tag{2}$$

и

$$\theta(z,\delta(f'))\big|_{m,\chi} T(p) = p^{k}\lambda'(p^2)\,\theta(z,\delta(f')).$$

Если же $p\,|\,d$, то любая функция f' - собственная и $\lambda'(p^2)=1$.

3. Пусть $\bar{f}'$ - столбец из функций, образующих базис пространства F'_{2k} , и $\Lambda'(p^2)$ - матрица оператора Гекке $T'(p^2)$ в этом базисе. Тогда справедливы следующие тождества для векторных тета-рядов

$$\theta(z,\bar{f}')\big|_{m/2,\chi} \hat{T}(p^2) = p^{k}\Lambda'(p^2)\,\theta(z,\bar{f}')$$

и (3)

$$\theta(z,\delta(\bar{f}'))\big|_{m,\chi} T(p) = p^{k}\Lambda'(p^2)\,\theta(z,\delta(\bar{f}')).$$

Для простых $p\,|\,d$ матрица $\Lambda'(p^2)$ единичная.

Выбирая другие параметры пространств $\mathfrak{M}_{k+3/2}$ и $\mathfrak{M}_{2k+2}$, можно получить новые тета-ряды и эти тета-ряды, ассоциированные с собственной функцией f' операторов Гекке $T'(p^2)$, имеют прежние собственные значения.

§ I. Трехмерные квадратичные пространства и кватернионы

I.I. Пусть V - невырожденное трехмерное квадратичное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с положительно определенной квадратичной формой $q(x)$. Согласно [4, с.29], можно считать, что

$$V = \mathfrak{A}_0 = \{\alpha\in\mathfrak{A}\ ;\ T(\alpha)=0\},$$

где $\mathfrak{A}$ - отвечающая V алгебра кватернионов, $T(\alpha)=\alpha+\bar{\alpha}$ и $\alpha\mapsto\bar{\alpha}$ - главная инволюция алгебры $\mathfrak{A}$, при этом $q(x)= N(x) = x\cdot\bar{x}$ (норма x). В этих обозначениях ассоциированная с q симметрическая билинейная форма $B(x,y)=q(x+y)-q(x)-q(y)$ примет вид

$$B(x,y) = T(x\cdot\bar{y}) = -T(x\cdot y) \quad \text{для } x,y\in V=\mathfrak{A}_0. \qquad \text{(I.I)}$$

Любое ортогональное преобразование σ пространства V , т.е. линейное преобразование с условием $B(x,y)=B(\sigma x,\sigma y)$ для всех x , $y\in V$, имеет вид

$$\sigma x = \alpha x \alpha^{-1} \qquad \text{для } x \in V \quad \text{и } \alpha \in \mathfrak{A}^{\times} = \mathfrak{A} \setminus \{0\}.$$

Обозначим через $O = O(V)$ группу ортогональных преобразований V и определим эпиморфизм

$$\iota : \mathfrak{A}^{\times} \longrightarrow O,$$

полагая $\iota(\alpha) = \sigma$, где σ – отображение (I.2). Ядро $Ker\,\iota$ совпадает с $\mathbb{Q}^{\times} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Если $\mathfrak{A}^{\times}_{\mathbb{A}}$ и $O_{\mathbb{A}}$ – аделизации групп $\mathfrak{A}^{\times}$ и O, то отображение ι полагаем распространенным на эти группы.

I.2. Алгебру кватернионов $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как четырехмерное квадратичное пространство над $\mathbb{Q}$ с квадратичной формой $N(x)$ и билинейной формой $B(x,y) = T(x \cdot \bar{y})$ для $x, y \in \mathfrak{A}$. Поскольку $\mathfrak{A}$ положительно определенная, $\mathfrak{A}_{\infty} = \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ совпадает с алгеброй гамильтоновых кватернионов $\mathbb{H}$. Для почти всех простых чисел p

$$\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p) \qquad (I.3)$$

(множество 2×2 -матриц с коэффициентами из поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$). Пусть $p_1, \ldots, p_e$ – все простые числа (их нечетное число [5]), не удовлетворяющие условию (I.3), и пусть $d = p_1 \cdots p_e$. Для $p = p_i$ $\mathfrak{A}_p$ совпадает с единственной алгеброй с делением над $\mathbb{Q}_p$.

I.3. Решетками L в V и M в $\mathfrak{A}$ называются свободные над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ модули ранга 3 и 4 соответственно. Если M – решетка в $\mathfrak{A}$, то $L = V \cap M$ – решетка в V. Чтобы не усложнять работу, в качестве решеток M рассмотрим $M = \Omega$, где Ω – некоторый порядок в $\mathfrak{A}$ (решетка, являющаяся кольцом с единицей). Если $\Omega = \Omega_{max}$ – максимальный порядок, то локализации $\Omega_p = \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, где $\mathbb{Z}_p$ – кольцо p-целых чисел из $\mathbb{Q}_p$, обладают свойствами:

$$\Omega_p \overset{\mathbb{Z}_p}{\cong} M_2(\mathbb{Z}_p) \text{ и } \Omega_p = \{\alpha_p \in \mathfrak{A}_p ; N(\alpha_p) \in \mathbb{Z}_p\} \qquad (I.4)$$

соответственно для $p \nmid d$ и $p \mid d$. В дальнейшем будем рассматривать такие порядки $\Omega = \Omega(h)$ с h, равным произведению различных простых чисел $p \nmid d$, для которых Ω_p удовлетворяют соответствующему свойству из (I.4) для любого $p \nmid h$, а для $p \mid h$ группа единиц $\Omega_p^{\times}$ является конгруэнц-подгруппой из $GL_2(\mathbb{Z}_p)$, т.е. для некоторого $q = p^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$\Omega_p^{\times}$ содержит подгруппу матриц $M \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (mod\ q)$. Например, такими являются порядки Эйхлера [5], удовлетворяющие условиям:

$$\Omega_p \overset{\mathbb{Z}_p}{\cong} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_p);\ c \equiv 0 \,(mod\, p) \right\} \quad \text{для } p \mid h . \qquad (I.5)$$

I.4. Дискриминантом Ω называется определитель

$$\Delta = \Delta(\Omega) = \det B , \qquad \text{где} \quad B = (B(v_i, v_j))_{4\times 4}$$

для некоторого $\mathbb{Z}$ -базиса $v_1, \ldots, v_4$ решетки Ω . Из определения следует, что B – целая симметрическая матрица с четной диагональю. Ее ступень $q = q(\Omega)$ – наименьшее натуральное число такое, что $B^{\#} = q \cdot B^{-1}$ – снова целая матрица с четной диагональю. Аналогично определяются дискриминант $\Delta' = \Delta(L)$ и ступень $q' = q(L)$ для решетки $L = L(\Omega) = V \cap \Omega$. Для порядков Эйхлера [5, с.95] $\Delta = d^2 \cdot h^2$ и $q = d \cdot h$.

I.5. В группе $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^{\times}$ выделим подгруппу

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1 = \{ \alpha = (\alpha_p) \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^{\times} ;\ \prod_p |\, N(\alpha_p) |_p = 1 \} , \qquad (I.6)$$

где произведение включает $p = \infty$ и $|\ldots|_p$ – p -норма в поле $\mathbb{Q}_p$. Используя для произвольной решетки $M \subset \mathfrak{A}$ равенство $M = \mathfrak{A} \cap (\bigcap_p M_p)$, зададим действие группы $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1$ на множестве решеток формулой

$$\alpha M = \mathfrak{A} \cap (\bigcap_p \alpha_p \cdot M_p) . \qquad (I.7)$$

Начиная с этого места, фиксируем некоторый порядок $\Omega = \Omega(h)$, и пусть

$$U = U(\Omega) = \{ u \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1 ;\ u\Omega = \Omega \}$$

и группа $\mathfrak{A}^{\times}$ диагонально вложена в $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1$. Отображение $(U\alpha^{-1}\mathfrak{A}^{\times}) \longmapsto \{\alpha\Omega\}$ задает взаимно однозначное соответствие между двойными классами и $\mathfrak{A}^{\times}$ -классами решеток вида $\alpha\Omega$ из рода $[\Omega]$ решетки Ω . Поэтому число двойных классов конечно. В пространстве V фиксируем решетку $L = L(h) = V \cap \Omega$ и аналогично (I.7) зададим действие группы $O_{\mathbb{A}}$ на множестве решеток из V . По той же причине конечно множество классов $U' \backslash O_{\mathbb{A}} / O$, где $U' = U(L)$ – стабилизатор решетки L в группе $O_{\mathbb{A}}$. В общем случае число двойных классов и число классов решеток из рода $[L]$ равны.

§ 2. Автоморфные формы

2.1. Пусть ν - неотрицательное целое число и ξ_ν - симметрическое тензорное представление группы $GL_2(\mathbb{C})$ степени ν [(5, с.104], [9, с.196]. Считая $\mathbb{H}^\times$ вложенным в $GL_2(\mathbb{C})$, определим представление $\sigma_\nu(\alpha) = N(\alpha)^{-\nu/2}\xi_\nu(\alpha)$ мультипликативной группы $\mathbb{H}^\times$ и далее - группы $\mathfrak{A}^\times_{\mathbb{A}}$, полагая $\sigma_\nu((\alpha_\infty,\ldots,\alpha_p,\ldots)) = \sigma_\nu(\alpha_\infty)$. Введем конечномерное $\mathbb{C}$ - пространство $F_\nu = F_\nu(U\setminus \mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}}/\mathfrak{A}^\times)$ функций $f(g)$ на группе $\mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}}$ со значениями в пространстве $W \cong \mathbb{C}^{\nu+1}$ представления ξ_ν, удовлетворяющих условию

$$f(ug\gamma) = \sigma_\nu(u)f(g) \tag{2.1}$$

для всех $u \in U$, $g \in \mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}}$ и $\gamma \in \mathfrak{A}^\times$. Функции $f(g)$ будем называть автоморфными формами степени ν.

2.2. $(U, \mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}})$ образуют пару Гекке [1]. Обозначим через $L(\mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}})$ соответствующее кольцо Гекке, и если $T = \sum_k a_k(g_k U)$ - разложение на левые классы смежности элемента $T \in L(\mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}})$, то полагаем

$$(Tf)(g) = \sum_k a_k\,\sigma_\nu(g_k) f(g_k^{-1}\cdot g)\,. \tag{2.2}$$

$(Tf)(g)$ не зависит от выбора представителей g_k из классов смежности $g_k U$ и формула (2.2) задает представление кольца Гекке $L(\mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}})$ на пространстве F_ν.

2.3. Для ортогональной группы O введем пространство $F'_\nu = F_\nu(U'\setminus O_{\mathbb{A}}/O)$ функций $f'(g)$ на группе $O_{\mathbb{A}}$ также со значениями в пространстве W и удовлетворяющих условию

$$f'(u'g\gamma) = \sigma_\nu(u)f'(g) \tag{2.3}$$

для всех $u' \in U'$, $g \in O_{\mathbb{A}}$ и $\gamma \in O$, где $u \in \mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}}$ - произвольный ι -прообраз элемента u'. Так как ι - эпиморфизм и $\sigma_\nu(i\alpha) = \sigma_\nu(\alpha)$ для любого i из группы иделей I поля $\mathbb{Q}$, то u существует и $\sigma_\nu(u)$ не зависит от выбора элемента u. Равенство $\sigma_\nu(u') = \sigma_\nu(u)$ задает представление группы $O_{\mathbb{A}}$ на пространстве W.

С помощью формулы (2.2) определим представление кольца $L(O_{\mathbb{A}})$ для пары Гекке $(U', O_{\mathbb{A}})$ на пространстве функций F'_ν.

2.4. Согласно (I.I) и (I.4), для стабилизаторов U_p и U_p' решеток $\mathfrak{O}_p$ и $L_p = V_p \cap \mathfrak{O}_p$ выполняются следующие формулы:

$$U_p = \mathfrak{O}_p^{\times} = \{\alpha_p \in \mathfrak{A}_p^{\times};\ N(\alpha_p) \in \mathbb{Z}_p^{\times}\},\ U_p' = \mathfrak{A}_p^{\times} / \mathbb{Q}_p^{\times} \qquad (2.4)$$

для $p \mid d$;

$$U_p = \mathfrak{O}_p^{\times},\quad U_p' = \mathfrak{N}(\mathfrak{O}_p^{\times}) / \mathbb{Q}_p^{\times}, \qquad (2.5)$$

где $\mathfrak{N}(\mathfrak{O}_p^{\times})$ - нормализатор $\mathfrak{O}_p^{\times}$ в группе $\mathfrak{A}_p^{\times}$, для $p \mid h$;

$$U_p = \mathfrak{O}_p^{\times} \cong GL_2(\mathbb{Z}_p),\ U' = U_p \cdot \mathbb{Q}_p^{\times} / \mathbb{Q}_p^{\times} \qquad (2.6)$$

для $p \nmid dh$. Таким образом, имеет место включение $\iota(U) \subset U'$ и поэтому, принимая во внимание (2.I) и (2.3), с помощью эпиморфизма ι можно определить подъем автоморфных форм

$$F_\nu' \xrightarrow{\delta} F_\nu : f' \mapsto f = (\delta f')(g) = f'(\iota(g)), \qquad (2.7)$$

являющийся мономорфным отображением.

2.5. ЛЕММА 2.I. Предположим, что $\mathfrak{N}(\mathfrak{O}_p^{\times}) = \mathfrak{O}_p^{\times} \cdot \mathbb{Q}_p^{\times}$ для всех $p \mid h$. Тогда отображение

$$T = \sum_k a_k (g_k U) \overset{\iota}{\longmapsto} T' = \sum_k a_k (\iota(g_k) U') \qquad (2.8)$$

определяет эпиморфизм кольца Гекке $L(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1)$ на кольцо $L(O_{\mathbb{A}})$. Если f' принадлежит пространству F_ν', $T \in L(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1)$ и δ - отображение (2.7), то выполняется формула коммутирования

$$T\delta(f') = \delta(T'f'), \quad \text{где} \quad T' = \iota(T). \qquad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемые кольца Гекке порождаются своими локальными подкольцами $L_p(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1)$ и $L_p(O_{\mathbb{A}})$, которые, в свою очередь, порождаются двойными классами $T(g) = (U g U)$ и $T'(g') = (U' g' U')$ элементов $g = (g_\infty, \dots, g_{p'}, \dots)$ из $\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1$ с $g_{p'} = 1$ для всех $p' \neq \infty$ или p и $g' = \iota(g)$. Отсюда и из (2.4)-(2.6) следует, что $\varepsilon : L_p(\mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1) \to L_p(O_{\mathbb{A}})$ - гомоморфизм. Эпиморфность же его следует из аналогичного свойства отображения ι. Из (2.2) и (2.7) получаем равенства

$$(T\delta(f'))(g) = \sum_k a_k \sigma_\nu(g_k) f'(\iota(g_k^{-1} \cdot g))$$

и

$$(\delta(\iota(T)f'))(g)=\sum_k a_k\,\sigma_\nu(\iota(g_k))\,f'(\iota(g_k)^{-1}\cdot\iota(g)),$$

откуда вытекает формула (2.9). □

Условия леммы 2.I выполняются для максимальных порядков $\mathcal{O}_{max}$ и для порядков Эйхлера (см.п.I.3). Кроме того, из (2.4) для любого $p|d$ заключаем, что $L_p(O_{\mathbb{A}})=QT'(e)$, где e – тождественное отображение пространства V и $T'(e)$ – единичный элемент кольца Гекке. В этом случае $\iota(T(g))=T'(e)$ для всех двойных классов $T(g)$ из $L(\mathcal{O}^1_{\mathbb{A}})$ и $p|d$. Поэтому в силу (2.9) получаем

$$T(g)f=f \quad \text{для} \quad f=\delta(f') \quad \text{и} \quad p|d, \tag{2.I0}$$

где f' – любая функция из пространства F'_ν .

§ 3. Тета-ряды тернарных квадратичных форм

3.I. Пусть $\varphi(L)(x)$ – характеристическая функция решетки L из п.I.5, определенная на пространстве $V=\mathcal{O}_0$;

$$\varphi(L,s)(x)=e(x,s)\varphi(L)(x),$$

где $e(x,s)=exp(2\pi i\,N(x)s)$ и $s\in\mathbb{Q}$; и пусть

$$\Phi(L,s)(x)=P_1(x)\,\varphi(L,s)(x) \tag{3.I}$$

и при этом [9, с.I99] $P_1(x)$ – W-векторная функция от $x\in\mathbb{H}$, координаты которой имеют вид $f(a+bi+cj+dk)=Q(b,c,d)$ с однородными многочленами Q степени n и $P_1(\alpha x\alpha^{-1})=$ $=\sigma_{2n}(\alpha)\,P_1(x)$ для $\alpha\in\mathbb{H}^\times$ и $x\in\mathbb{H}$. Для $g=(g_\infty,\dots)$ из группы $O_{\mathbb{A}}$, вспоминая формулу (I.2), положим

$$(\pi(g)\Phi(L,s))(x)=P_1(g_\infty^{-1}(x))\,\varphi(gL,s)(x) \tag{3.2}$$

и для функций $\Phi(L)=\Phi(L,0)$ и $f'\in F'_{2n}$ рассмотрим интеграл

$$E(f',\Phi(L))(z)=vol_{dx}(U')^{-1}\int\limits_{O_{\mathbb{A}}/O}(f'(g);\langle\pi^{-1}(g)\Phi(L),e(\,,z)\rangle)dg, \tag{3.3}$$

где мера dg индуцирована мерой Тамагавы dx на группе $O_{\mathbb{A}}$, $(\ ,\ )$ – эрмитово произведение в пространстве $W \cong \mathbb{C}^{2n+1}$, относительно которого представление σ_{2n} унитарно, наконец,

$$\langle \Phi(L,s), e(\ ,z)\rangle = \sum_{x\in V} \Phi(L,s)(x)\, e(x,z), \tag{3.4}$$

где $e(x,z) = exp(2\pi i\, N(x) z)$ и z из верхней полуплоскости Зигеля H_1, т.е. z – комплексное число с $\mathcal{I}m\, z > 0$.

Вычислим интеграл (3.3) для функции $f'_\alpha \in F'_{2n}$ с носителем $U'\alpha^{-1}O$. Согласно (2.3), $f'_\alpha(g) = \sigma_{2n}(u) f'_\alpha(\alpha^{-1})$ для $g = u\alpha^{-1}\gamma$ с $u \in U'$ и $\gamma \in O$ и, согласно (3.2), для этих же g имеем

$$(\pi(g)^{-1}\Phi(L))(x) = \sigma_{2n}(u)\, P_1(\alpha_\infty^{-1}\gamma(x))\, \varphi(\alpha L)(\gamma(x)) \, .$$

Теперь, применяя (3.4), получаем равенство

$$\langle \pi(g)^{-1}\Phi(L), e(\ ,z)\rangle = \sigma_{2n}(u) \sum_{x\in V} P_1(\alpha_\infty^{-1}\gamma(x))\, \varphi(\alpha L)(\gamma(x))\cdot e(x,z) =$$

$$= \sigma_{2n}(u) \sum_{x\in\alpha L} P_1(\alpha_\infty^{-1}(x))\, exp(2\pi i\, N(x) z) \, .$$

Последняя сумма является векторным тета-рядом решетки αL, который обозначим через $\Theta_{\alpha L}(z)$. Отсюда и из (3.3) выводим

$$E(f'_\alpha, \Phi(L))(z) = (f'_\alpha(\alpha^{-1});\ \Theta_{\alpha L}(z))\, vol_{dx}(U')^{-1} \int_{U'\alpha^{-1}O/O} dg \, ,$$

и интеграл равен

$$\int_{\alpha U'\alpha^{-1}/(\alpha U'\alpha^{-1}\cap O)} dg = \frac{1}{e(\alpha L)} \int_{\alpha U'\alpha^{-1}} dx \, ,$$

где $e(\alpha L)$ – число элементов из пересечения $\alpha U'\alpha^{-1} \cap O$, равное числу единиц решетки αL. Используя свойства меры Тамагавы dx, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Пусть f'_α – некоторая функция из пространства F'_{2n} (п.2.3) с некоторым целым n и с носителем $U'\alpha^{-1}O$, L – фиксированная решетка из п.I.5 и

$$\theta_{\alpha L}(z,f'_\alpha)=\sum_{x\in\alpha L} P(f'_\alpha;x)\exp(2\pi i N(x)z) \tag{3.5}$$

– тета-ряд решетки αL, из рода $[L]$ со сферическими коэффициентами $P(f'_\alpha;x)=(f'_\alpha(\alpha^{-1});P_1(\alpha_\infty^{-1}(x))$. Тогда имеет место следующая формула

$$E(f'_\alpha,\Phi(L))(z)=\frac{1}{e(\alpha L)}\theta_{\alpha L}(z,f'_\alpha). \tag{3.6}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.I. В интеграл (3.3) можно подставить любую другую функцию $\Phi(L')$. Тогда в правой части формулы (3.6) появится некоторая линейная комбинация тета-рядов решеток из рода $[L']$ (см.также замечание после Основной теоремы).

3.2. Тета-ряды $\theta_{\alpha L}(z,f'_\alpha)$ принадлежат пространству $\mathfrak{M}_{m/2}=\mathfrak{M}_{m/2}(\Gamma_0^1(q'),\chi)$ модулярных форм рода I, полуцелого веса $m/2=(2n+3)/2$ и характера

$$\chi(d)=\chi_L(d)=\left(\frac{2\Delta'}{|d|}\right) \tag{3.7}$$

относительно группы $\Gamma_0^1(q')$ матриц $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ из $SL_2(\mathbb{Z})$ с $c\equiv 0(\mathrm{mod}\,q')$ [8, с.456], [I0, с.205], [I, с.58, 86]. Если $p\nmid\Delta'$, то для оператора Гекке $\hat{T}(p^2)$ ([I], с.237) имеет место разложение

$$\begin{aligned}\hat{T}(p^2)=(\hat{\Gamma}\widehat{\begin{pmatrix}1&0\\0&p^2\end{pmatrix}}\hat{\Gamma})=\sum_{b\,\mathrm{mod}\,p^2}(\hat{\Gamma}(\begin{pmatrix}1&b\\0&p^2\end{pmatrix};p))+\\+\sum_{\substack{b\,\mathrm{mod}\,p\\ b\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)}}(\hat{\Gamma}(\begin{pmatrix}p&b\\0&p\end{pmatrix};\varepsilon_p^{-1}\left(\frac{-b}{p}\right)p^{1/2}))+(\hat{\Gamma}(\begin{pmatrix}p^2&0\\0&1\end{pmatrix};1)),\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\wedge$ означает, что соответствующие элементы рассматриваются в накрывающей группе $\mathfrak{G}$ группы $GL_2(\mathbb{R})$ [I, с.93], $\Gamma=\Gamma_0^1(q')$ и $\varepsilon_p=1$ или $+\sqrt{-1}$ для $p\equiv 1$ или $3(\mathrm{mod}\,4)$.

Для любой функции $F(z)$ комплексного переменного z и элемента $\hat{M}=(\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix};t)$ из $\mathfrak{G}$ с определителем $ad=p^2$ положим

$$(F|_{m/2,\chi}\hat{M})(z) = p^{m-2}\chi(a)t^{-m}F\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

В этих обозначениях при четном n

$$\langle \pi(g)^{-1}\Phi(L,s), e(\ ,z)\rangle|_{m/2,\chi}\hat{M} = \langle \pi(g)^{-1}\Phi(L,s), e(\ ,z)|_{m/2,\chi}\hat{M}\rangle$$

и (3.9)

$$e(x,z)|_{m/2,\chi}\hat{M} = p^{m-2}\chi(a)t^{-m}e\left(\frac{a}{p}x, \frac{b}{a}\right)e\left(\frac{a}{p}x, z\right),$$

поэтому левая часть (3.9) равна

$$\sum_{x\in V}(\pi(g)^{-1}\Phi(L,0))(x)p^{m-2}\chi(a)t^{-m}e\left(\frac{a}{p}x, \frac{b}{a}\right)e\left(\frac{a}{p}x, z\right) =$$

$$= p^{n}\sum_{x\in V}\left(\pi(g)^{-1}\left[p\chi(a)t^{-3}\Phi\left(\frac{a}{p}L, \frac{b}{a}\right)\right]\right)(x)\cdot e(x,z).$$

Откуда, вводя обозначение

$$\pi_{3/2,\chi}(\hat{M}^{-1})\Phi(L,s) = P_1(x)p\chi(a)t^{-3}\varphi\left(\frac{a}{p}L, s\left(\frac{d}{p}\right)^2 + \frac{b}{a}\right), \qquad (3.10)$$

получаем равенство

$$\langle \pi(g)^{-1}\Phi(L), e(\ ,z)\rangle|_{m/2,\chi}\hat{M} = p^{n}\langle \pi(g)^{-1}(\pi_{3/2,\chi}(\hat{M}^{-1})\Phi(L), e(\ ,z)\rangle,$$

значит, ввиду (3.3),

$$E(f'_{\alpha}, \Phi(L))|_{m/2,\chi}\hat{M} = p^{n}E(f'_{\alpha}, \pi_{3/2,\chi}(\hat{M}^{-1})\Phi(L)). \qquad (3.11)$$

3.3. Для произвольной решетки $L'\subset V$ рассмотрим отображение

$$i : \varphi(L',s) \mapsto \varphi_{A_0}(L',s)(x) = \prod_{p<\infty}\varphi_p(L'_p, s_p)(x_p),$$

где $x = (x_p) \in V_{A_0}$ – аделизации V без ∞ -компоненты, $s = (s_p) \in A_0$, $\varphi_p(L'_p, s_p) = e(x_p, s_p)\varphi_p(L'_p)(x_p)$ и

$\varphi_p(L_p)$ – характеристическая функция решетки $L'_p = L' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$. Так как $\varphi_{A_0}(L',s)(x) = \varphi(L',s)(x)$ для $x \in V$, $s \in \mathbb{Q}$, то i – вложение пространства, порожденного функциями вида $\varphi(L',s)$. Отображение i обладает свойством

$$i(\pi_{3/2,\chi}(\hat{M}^{-1})\varphi(L)) = \pi_{3/2,\chi}(\hat{M}^{-1})\varphi_p(L_p)\cdot\prod_{p'\neq p}\varphi_{p'}(L_{p'}), \qquad (3.12)$$

здесь мы воспользовались тем, что по (3.10) $\pi_{3/2,\chi}$ не действует на множитель $P_1(x)$ функции $\Phi(L)$.

3.4. Сумма всех $\pi_{3/2,\chi}(\hat{M}^{-1})\varphi_p(L_p)$, когда $\hat{M}$ пробегает всех представителей правых классов из (3.8), равна

$$(\pi_{3/2,\chi}(\hat{T}^*(p^2))\varphi_p(L_p))(x) = p^{-2}\Big(\sum_{b \bmod p^2} e(x,b)\Big)\varphi_p\Big(\frac{1}{p}L_p\Big)(x) +$$

$$+p^{-1/2}\chi(p)\varepsilon_p^3\Big(\sum_{b \bmod p}\Big(\frac{-b}{p}\Big)e\Big(x,\frac{b}{p}\Big)\Big)\varphi_p(L_p)(x) + p\chi(p^2)\varphi_p(pL_p)(x) \qquad (3.13)$$

$$=\varphi'_p\Big(\frac{1}{p}L_p\Big)(x) + \chi(p)\Big(\frac{-1}{p}\Big)\Big(\frac{N(x)}{p}\Big)\varphi_p(L_p)(x) + p\chi(p^2)\varphi_p(pL_p)(x),$$

где $\varphi'_p(\frac{1}{p}L_p)(x)$ – характеристическая функция множества $x \in 1/p\,L_p$ с $N(x) \in \mathbb{Z}$. Равенства (3.9)–(3.12) справедливы для всех простых чисел p, если принять во внимание, что $\chi(p) = 0$ для $p \mid \Delta'$. Поэтому выполняется и формула (3.13), принимающая вид

$$(\pi_{3/2,\chi}(\hat{T}^*(p^2))\varphi_p(L_p))(x) = \varphi'_p\Big(\frac{1}{p}L_p\Big)(x) \quad \text{для } p \mid \Delta'. \qquad (3.14)$$

В частности, если $p \mid d$, то в силу (1.4) $\varphi'_p(\frac{1}{p}L_p)(x) = \varphi_p(L_p)(x)$, откуда и из (3.14) заключаем, что

$$(\pi_{3/2,\chi}(\hat{T}^*(p^2))\varphi_p(L_p))(x) = \varphi_p(L_p)(x) \quad \text{для } p \mid d. \qquad (3.15)$$

3.5. Для $p \nmid \Delta'$ воспользуемся изоморфизмами (1.4), (2.6) и отождествим V_p с множеством матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ с a, b, c из $\mathbb{Q}_p$. Пусть $T'(p^2)$ – оператор Гекке (см. п.2.5) для элемента $g = (1,\dots,g_p,\dots)$ из $O_{\mathbb{A}}$ с g_p, отвечающим $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$. Для таких g оператор $\pi(g)$ (3.2) действует только на $\varphi(L)$ – часть функции $\Phi(L)$, чем сейчас и воспользуемся. Согласно (I.7), имеем

$$i(\pi(T'(p^2))\varphi(L)) = \pi(T'_p(p^2))\varphi_p(L_p)\cdot\prod_{p'\neq p}\varphi_{p'}(L_{p'}), \tag{3.16}$$

где

$$T'_p(p^2) = \left(U'_p\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}U'_p\right) = \sum_{t \bmod p}\left(\begin{pmatrix}p&t\\0&1\end{pmatrix}U'_p\right) + \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}U'_p\right),$$

следовательно, по (3.2)

$$\pi(T'_p(p^2))\varphi_p(L_p)(x) = \sum_{t \bmod p}\varphi_p(L_p)\left(\begin{pmatrix}1/p&-t/p\\0&1\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}p&t\\0&1\end{pmatrix}\right) + \tag{3.17}$$
$$+\varphi_p(L_p)\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1/p\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\right)$$

и $L_p = \left\{M = \begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{Z}_p)\right.$ для $p \nmid \Delta'$.

ЛЕММА 3.I. Для любого простого $p \nmid \Delta'$ выполняется тождество

$$\pi_{3/2,\chi}(\hat{T}^*(p^2))\,\varphi_p(L_p)(x) = \pi(T'_p(p^2))\varphi_p(L_p)(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся, что значения $\Phi_0(x)$ – правой части равенства (3.I7) и $\Phi_1(x)$ – правой части равенства (3.I3) совпадают для всех $x\in V_p$. Достаточно рассмотреть только множество элементов

$$x = \frac{1}{p}M = \frac{1}{p}\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix} \text{ с } M\in L_p \text{ и } N(M) = \det M = -a^2-bc \equiv 0 \pmod{p^2},$$

содержащее носитель $\Phi_1(x)$, который, в свою очередь, содержит носитель $\Phi_0(x)$. Для этого выясним, когда элементы

$$x(t) = \begin{pmatrix}1/p&-t/p\\0&1\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}p&t\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(t)/p&-b(t)/p^2\\c&-a(t)/p\end{pmatrix},$$

где $a(t) = a-ct$ и $b(t) = ct^2-2at-b$, или

$$x' = \begin{pmatrix}1&0\\0&1/p\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a/p&b\\c/p^2&-a/p\end{pmatrix}$$

принадлежат решетке L_p.

Пусть $p \nmid c$. Тогда $\Phi_1(x) = 1$ и существует единственное $t \bmod p$ такое, что $a(t) \equiv 0 \pmod p$, т.е. $ct = a + pt_1$ и $t_1 \in \mathbb{Z}_p$. Имеем $c b(t) = (ct)^2 - 2a(ct) - cb = -a^2 - bc \equiv$ $\equiv 0 \pmod{p^2}$, поэтому $\Phi_0(x) = 1$.

Пусть $c = pc'$ и $p \nmid c'$, откуда вытекает $a = pa'$, $b = pb'$ и $x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix}$, поэтому $\Phi_1(x) = 1 + \chi(p)\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{N(x)}{p}\right)$.

Дискриминант $D = 4a'^2 + 4b'c' = -4N(x)$, значит, справедливо сравнение $\frac{1}{p} b(t) = c't^2 - 2a't - b' \equiv 0 \pmod p$, которое имеет число решений 2,0 или I при $\left(\frac{-N(x)}{p}\right) = 1, -1$ или 0 соответственно, и число решений равно $\Phi_0(x)$. С другой стороны, $\Delta' \in 2 \cdot (\mathbb{Z}_p^\times)^2$ ([6], с.126) и по (3.7) $\chi(p) = 1$, откуда $\Phi_1(x) = 1 + \left(\frac{-N(x)}{p}\right) = \Phi_0(x)$.

Наконец, пусть $c = p^2 \cdot c''$. Тогда $a = pa'$, $b = pb'$ и $x = \begin{pmatrix} a' & b' \\ pc'' & -a' \end{pmatrix}$. Если $p \mid a'$, $p \mid b'$, то $\Phi_1(x) = p + 1 = \Phi_0(x)$; если $p \mid a'$, $p \nmid b'$, то $\Phi_1(x) = 1 = \Phi_0(x)$; и если $p \nmid a'$, то

$$\Phi_1(x) = 1 + \chi(p)\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-a'^2}{p}\right) = 1 + \chi(p) = 2$$

и сравнение $\frac{1}{p} b(t) = pc''t^2 - 2a't - b' \equiv -2a't - b' \equiv 0 \pmod p$ имеет единственное решение $t \bmod p$. Следовательно, $\Phi_0(x) = 2 = \Phi_1(x)$, и лемма доказана. □

3.6. Для любого элемента $g_1 = (1, \dots, g_p, \dots)$ из $O_{\mathbb{A}}$ из инвариантности меры dg в интеграле (3.3) следует

$$E(f'(g_1^{-1} \cdot g), \Phi(L)) = E(f'(g), \pi(g_1^{-1})\Phi(L)).$$

Согласно [3, с.79, 80], для локального оператора Гекке $T_p'(g_p) = (U_p' g_p U_p')$ существует разложение вида

$$T_p'(g_p) = \sum_k (g_k U_p') = \sum_k (g_k^{-1} U_p')$$

с одними и теми же представителями g_k в обоих суммах. Отсюда и из последнего равенства для простых чисел $p \nmid \Delta'$ вытекает формула сплетения для ортогональной группы $O_{\mathbb{A}}$

$$E(T_p' f', \Phi(L)) = E(f', \pi(T_p')\Phi(L)), \qquad (3.18)$$

где f' – любая функция из пространства F'_{2n} (п.2.3) и T'_p – оператор локального кольца Гекке $L(O_p) \subset L(O_{\mathbb{A}})$, порожденного операторами $T'_p(g_p)$.

Далее, из (3.II) для операторов $\hat{T}(p^2)$ для любых p следует формула сплетения

$$E(f', \Phi(L))\Big|_{m/2,\chi} \hat{T}(p^2) = p^n E(f', \pi_{3/2,\chi}(\hat{T}^*(p^2))\Phi(L)), \quad (3.19)$$

так как и для $p \mid \Delta'$ можно использовать разложение (3.8), учитывая при этом в (3.10), что $\chi(p) = 0$. Теперь из формул (3.18), (3.19) и из леммы 3.I следует

ТЕОРЕМА 3.I. При четном n и $p \nmid \Delta'$ имеет место следующая формула двойственности между операторами Гекке групп $O_{\mathbb{A}}$ и SL_2:

$$E(f', \Phi(L))\Big|_{m/2,\chi} \hat{T}(p^2) = p^n E(T'(p^2) f', \Phi(L)), \quad (3.20)$$

где $T'(p^2)$ – оператор Гекке кольца $L(O^1_{\mathbb{A}})$, отвечающий локальному оператору $T'_p(p^2)$. Далее, пусть $\theta(z, f')$ обозначает линейную комбинацию тета-рядов (3.5) $E(f', \Phi(L))$. Тогда для $p \mid d$

$$\theta(z, f')\Big|_{m/2,\chi} \hat{T}(p^2) = p^n \theta(z, f'), \quad (3.21)$$

и если $f' \in F'_{2n}$ является собственной функцией оператора Гекке $T'(p^2)$ с $p \nmid \Delta'$: $T'(p^2) f' = \lambda'(p^2) f'$, то

$$\theta(z, f')\Big|_{m/2,\chi} \hat{T}(p^2) = p^n \lambda'(p^2) \theta(z, f'). \quad (3.22)$$

В общем случае, пусть $\bar{f}'$ – столбец функций, образующих базис пространства F'_{2n}, и $\Lambda'(p^2)$ – матрица оператора $T'(p^2)$ в этом базисе. Тогда для простых $p \nmid 2n$ выполняется формула

$$\theta(z, \bar{f}')\Big|_{m/2,\chi} \hat{T}(p^2) = p^n \Lambda'(p^2) \cdot \theta(z, \bar{f}'), \quad (3.23)$$

где для $p \mid d$ матрица $\Lambda'(p^2)$ единичная.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В ([10], с.205) формула (3.22) доказана для решеток $L = V \cap \Omega_{max}$.

§ 4. Тета-ряды кватернарных квадратичных форм

4.I. Пусть теперь $\varphi(\Omega, I)(x,t)$ – характеристическая функция множества $\Omega \times I$, где Ω – решетка алгебры $\mathfrak{A}$ из п.I.5, $I = \{1\}$, и пусть

$$\varphi(\Omega, I, s)(x,t) = e(x,s)\varphi(\Omega, I)(x,t),$$
$$\Phi(\Omega, I, s)(x,t) = \xi(|t|_+^{1/2} x)\varphi(\Omega, I, s)(x,t), \tag{4.I}$$

где $\xi(x) = \xi_{2n}(x) \cdot w$ для некоторого вектора $w \in W$ и $\xi(0) = 0$ (по однородности), $|t|_+ = t$ или 0 для $t > 0$ или $t \leq 0$ соответственно. Для функций $f \in F_{2n}$ (п.2.I) и $\Phi(\Omega, I) = \Phi(\Omega, I, 0)$ полагаем (ср. с (3.3))

$$E(f, \Phi(\Omega, I))(z) = vol_{dx}(U)^{-1} \int\limits_{\mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}}/\mathfrak{A}^{\times}_{-}} (f(g); \langle \pi^{-1}(g)\Phi(\Omega, I), e(\,, |t|_+ z)\rangle) dg, \tag{4.2}$$

где мера dg индуцирована мерой Тамагавы dx на группе $\mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}}$; для $g = (g_\infty, \dots) \in \mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}}$

$$\pi(g)\Phi(\Omega, I, s) = \xi(|N(g_\infty)t|_+^{1/2} g_\infty^{-1} x)\varphi(g\Omega, N_f(g)I, s), \tag{4.3}$$

при этом $N_f(g) = \prod\limits_{p<\infty} |N(g_p)|_p$ – норма конечной части g, наконец,

$$\langle \pi^{-1}(g)\Phi(\Omega, I), e(\,, |t|_+ z)\rangle =$$
$$= \sum_{\substack{x \in \mathfrak{A} \\ t \in \mathbb{Q}^\times}} (\pi^{-1}(g)\Phi(\Omega, I))(x,t) \exp(2\pi i |t|_+ N(x) z). \tag{4.4}$$

Возьмем функцию $f_\alpha \in F_{2n}$ с носителем $U\alpha^{-1}\mathfrak{A}^\times$. По (2.I) $f_\alpha(g) = \sigma_{2n}(u) f_\alpha(\alpha^{-1})$ для $g = u\alpha^{-1}\gamma$ с $u \in U$, $\gamma \in \mathfrak{A}^\times$, а по (4.3)

$$\pi^{-1}(g)\Phi(\Omega, I)(x,t) =$$
$$= \sigma_{2n}(u)\xi(|t|_+^{1/2} \alpha_\infty^{-1} \gamma x)\varphi(\alpha\Omega, I)(\gamma x, N_f(\alpha^{-1}\gamma)t),$$

откуда следует, что правая часть (4.4) равна

$$\sigma_{2n}(u)\sum_{\substack{x\in\mathfrak{A}\\ t\in\mathbb{Q}^{\times}}}\xi(|t|_{+}^{1/2}\alpha_{\infty}^{-1}\gamma x)\varphi(\alpha\Omega,I)(\gamma x,N_{f}(\alpha^{-1}\gamma)t)e(x,|t|_{+}z)=$$

$$=\sigma_{2n}(u)\sum_{\substack{x\in\mathfrak{A}\\ t\in\mathbb{Q}^{\times}}}\xi(|t|_{+}^{1/2}\alpha_{\infty}^{-1}x)\varphi(\alpha\Omega,I)(x,t)\exp\left(2\pi i|t|_{+}\frac{N(x)}{N(\alpha_{\infty})}z\right)\overset{(4.5)}{=}$$

$$=\sigma_{2n}(u)\sum_{x\in\alpha\Omega}\xi(\alpha_{\infty}^{-1}x)\exp\left(2\pi i\frac{N(x)}{N(\alpha_{\infty})}z\right).$$

Последняя сумма является векторным тета-рядом, который обозначим через $\Theta_{\alpha\Omega}(z)$ и который, очевидно, не зависит от u, γ. Поэтому из (4.5) и (4.2) получаем

$$E(f_{\alpha},\Phi(\Omega,I))=\frac{1}{e(\alpha\Omega)}(f_{\alpha}(\alpha^{-1});\Theta_{\alpha\Omega}(z)),$$

где $e(\alpha\Omega)$ - число единиц решетки $\alpha\Omega$, откуда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.I. Пусть

$$\theta_{\alpha\Omega}(z;f_{\alpha})=\sum_{x\in\alpha\Omega}P(f_{\alpha};x)\exp\left(2\pi i\frac{N(x)}{N(\alpha_{\infty})}z\right) \tag{4.6}$$

- тета-ряд со сферическими коэффициентами $P(f_{\alpha};x)=(f_{\alpha}(\alpha^{-1});\xi(\alpha_{\infty}^{-1}x))$. Тогда предыдущее равенство перепишется в виде

$$E(f_{\alpha},\Phi(\Omega,I))(z)=\frac{1}{e(\alpha\Omega)}\theta_{\alpha\Omega}(z;f_{\alpha}). \tag{4.7}$$

4.2. Полученные тета-ряды (4.6) принадлежат пространству $\mathfrak{M}_{m}=\mathfrak{M}_{m}(\Gamma_{0}^{1}(q),\chi)$ модулярных форм рода I, целого веса $m=2n+2$ и характера

$$\chi(d)=\chi_{\Omega}(d)=\left(\frac{\Delta}{|d|}\right) \tag{4.8}$$

относительно группы $\Gamma=\Gamma_{0}^{1}(q)$ ([2], с.247). Для простых $p\nmid\Delta$ выполняется разложение

$$T(p)=\left(\Gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma\right)=\sum_{b \bmod p}\left(\Gamma\begin{pmatrix}1&b\\0&p\end{pmatrix}\right)+\left(\Gamma\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}\right) \tag{4.9}$$

оператора Гекке $T(p)$. Для матрицы $M=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ с $ad=p$ и произвольной функции $F(z)$ комплексного переменного z полагаем

$$F\Big|_{m,\chi} M = p^{m-1}\chi(a)d^{-m}F\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Используя равенство (4.4), получаем для четного n

$$\langle \pi^{-1}(g)\Phi(\Omega,I),\ e(\ ,|t|_+ z)\rangle\Big|_{m,\chi}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix} =$$

$$=\sum_{\substack{x\in\mathfrak{A}\\ t\in\mathbb{Q}^\times}}(\pi^{-1}(g)\Phi(\Omega,I,0))(x,t)\,p^{-1}\exp\left(2\pi i|t|_+N(x)\frac{z+b}{p}\right) =$$

$$=p^{n}\sum_{\substack{x\in\mathfrak{A}\\ t\in\mathbb{Q}^\times}}\left(\pi^{-1}(g)\left[p^{-1}\Phi\left(\Omega,\tfrac{1}{p}I,|t|_+b\right)\right]\right)(x,t)\,e(x,|t|_+z).$$

Аналогично,

$$\langle \pi^{-1}(g)\Phi(\Omega,I),\ e(\ ,|t|_+ z)\rangle\Big|_{m,\chi}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\sum_{\substack{x\in\mathfrak{A}\\ t\in\mathbb{Q}^\times}}(\pi^{-1}(g)\Phi(\Omega,I,0))(x,t)\,p^{m-1}\chi(p)\exp\left(2\pi i\left|\frac{t}{p}\right|_+N(px)z\right) =$$

$$=\sum_{\substack{x'\in\mathfrak{A}\\ t'\in\mathbb{Q}^\times}}(\pi^{-1}(g)\Phi(\Omega,I,0))\left(\tfrac{1}{p}x',pt'\right)p^{m-1}\chi(p)\cdot e(x,|t|_+z) =$$

$$=p^{n}\sum_{\substack{x\in\mathfrak{A}\\ t\in\mathbb{Q}^\times}}\left(\pi^{-1}(g)\left[p\chi(p)\Phi\left(p\Omega,\tfrac{1}{p}I,0\right)\right]\right)(x,t)\cdot e(x,|t|_+z),$$

следовательно, в обозначениях (4.2) для $M=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ получаем соотношение

$$E(f,\Phi(\Omega,I))\Big|_{m,\chi}M=p^{n}E(f,\pi_{\chi,\chi}(M^{-1})\Phi(\Omega,I)), \tag{4.10}$$

где по определению

$$\pi_{\chi,\chi}\left(\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & p\end{pmatrix}^{-1}\right)\Phi(\Omega,I,0)=\xi(|t|_+^{1/2}x)\left[p^{-1}\varphi(\Omega,\tfrac{1}{p}I,|t|_+b)\right],$$

(4.II)

$$\pi_{\chi,\chi}\left(\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\right)\Phi(\Omega,I,0)=\xi(|t|_+^{1/2}x)\left[p\chi(p)\varphi(p\Omega,\tfrac{1}{p}I,0)\right].$$

4.3. Для рассмотренных M представление $\pi_{\chi,\chi}$ и для элементов $g\in G_{\mathbb{A}}^1$ с $g_\infty=p^{1/2}$, $g_p=\begin{pmatrix}p & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\chi,\chi}$ или $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}$ и $g_{p'}=1$ для $p'\neq\infty,p$ представление π (4.3) оставляют неизменным ξ -множитель функции $\Phi(\Omega,I,0)$. Поэтому можем ограничиться рассмотрением только части $\varphi(\Omega,I,0)$ и для представлений оставим прежние обозначения.

Аналогично п.3.3, определим вложение i, отображающее функцию $\varphi(\Omega',I',s)$, где Ω' – произвольная решетка из $\mathcal{O}$ и I' – непустое мультипликативное подмножество из $\mathbb{Q}^\times$, в функцию

$$\varphi_{\mathbb{A}_0}(\Omega',I',s)(x,t)=\prod_{p<\infty}\varphi_p(\Omega'_p,I'_p,s_p)(x_p,t_p),$$

при этом $x=(x_p)\in\mathcal{O}_{\mathbb{A}_0}$, $t=(t_p)$ из группы иделей $\mathbb{A}_0^\times$, $s=(s_p)\in\mathbb{A}_0$,

$$\varphi_p(\Omega'_p,I'_p,s_p)(x_p,t_p)=e(x_p,s_p)\varphi_p(\Omega'_p,I'_p)(x_p,t_p),$$

где $\varphi_p(\Omega'_p,I'_p)$ – характеристическая функция множества $\Omega'_p\times I'_p$ и $I'_p=I'\cdot\mathbb{Z}_p^\times$. Для матриц M из п.4.2 справедливо тождество

$$i(\pi_{\chi,\chi}(M^{-1})\varphi(\Omega,I))=\pi_{\chi,\chi}(M^{-1})\varphi_p(\Omega_p,I_p)\prod_{p'\neq p}\varphi_{p'}(\Omega_{p'},I_{p'}).\qquad(4.12)$$

4.4. Если M пробегает представителей правых классов из разложения (4.9), то соответствующая сумма $\pi_{\chi,\chi}(M^{-1})\varphi_p(\Omega_p,I_p)$ в силу (4.II) равна

$$(\pi_{\chi,\chi}(T^*(p^2))\varphi_p(\Omega_p,I_p))(x,t)=$$

$$=p^{-1}\Big(\sum_{b\bmod p}e(x,|t|_+b)\Big)\varphi_p(\Omega_p,\tfrac{1}{p}I_p)(x,t)=\qquad(4.13)$$

$$+p\chi(p)\varphi_p(p\mathcal{O}_p,\tfrac{1}{p}I_p)(x,t) =$$

$$=\varphi_p'(\mathcal{O}_p,\tfrac{1}{p}I_p)(x,t)+p\chi(p)\varphi_p(p\mathcal{O}_p,\tfrac{1}{p}I_p)(x,t),$$

где $\varphi_p'(\mathcal{O}_p,\frac{1}{p}I_p)$ -- характеристическая функция множества $\mathcal{O}_p\times 1/p\, I_p$ с условием $N(x)\equiv 0 \pmod p$. Формула (4.13) верна и для $p\mid d$. Для таких p, согласно (1.4),

$$(\pi_{2,\chi}(T^*(p))\varphi_p(\mathcal{O}_p,I_p)(x,t) = \varphi_p(P,\tfrac{1}{p}I_p)(x,t), \tag{4.14}$$

где $P=w_p\cdot\mathcal{O}_p$ – двусторонний идеал порядка $\mathcal{O}_p$, порожденный элементом $w_p\in\mathcal{O}_p$ с нормой $N(w_p)=p$.

4.5. Не усложняя обозначений, считаем $\mathcal{O}_p=M_2(\mathbb{Z}_p)$ и $U_p=GL_2(\mathbb{Z}_p)$ для $p\nmid 2\Delta$, и пусть $T_0(p)$ – оператор Гекке элемента g из $\mathfrak{A}^1_{\mathbb{A}}$ с $g_\infty=p^{1/2}$, $g_p=\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}$ и $g_{p'}=1$ для всех $p'\neq\infty,p$. По (4.3),

$$i(\pi(T_0(p))\varphi(\mathcal{O},I))=\pi(T_p(p))\varphi_p(\mathcal{O}_p,I_p)\prod_{p'\neq p}\varphi_{p'}(\mathcal{O}_{p'},I_{p'}), \tag{4.15}$$

где $T_p(p)$ – локальный оператор Гекке, отвечающий $T_0(p)$, с аналогичным оператору $T_p'(p^2)$ из (3.16) разложением:

$$T_p(p)=\left(U_p\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}U_p\right)=\sum_{s \bmod p}\left(\begin{pmatrix}p&s\\0&1\end{pmatrix}U_p\right)+\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}U_p\right).$$

Таким образом, снова используя определение (4.3), получаем

$$\pi(T_p(p))\varphi_p(\mathcal{O}_p,I_p)(x,t) =$$

$$=\sum_{s \bmod p}\varphi_p\left(\begin{pmatrix}p&s\\0&1\end{pmatrix}\mathcal{O}_p,\tfrac{1}{p}I_p\right)(x,t)+\varphi_p\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\mathcal{O}_p,\tfrac{1}{p}I_p\right)(x,t)= \tag{4.16}$$

$$=\sum_{s \bmod p}\varphi_p(\mathcal{O}_p,\tfrac{1}{p}I_p)(x(s),t)+\varphi_p(\mathcal{O}_p,\tfrac{1}{p}I_p)(x',t),$$

где для $x=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из Ω_p использованы сокращения:

$$x(s)=\begin{pmatrix} 1/p & -s/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} \frac{a-sc}{p} & \frac{b-sd}{p} \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(s)/p & b(s)/p \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$x'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} a & b \\ c/p & d/p \end{pmatrix}.$$

Из включений $x(s),\ x'\in\Omega_p$ вытекает $N(x)=ad-bc\equiv$ $\equiv 0(\operatorname{mod} p)$. Обозначим последние суммы из (4.16) и (4.13) через $\Phi_0(x,t)$ и $\Phi_1(x,t)$.

ЛЕММА 4.1. Для простых $p\nmid 2\Delta$ имеет место тождество

$$(\pi_{2,\chi}(T^*(p))\varphi_p(\Omega_p,I_p))(x,t)=(\pi(T_p(p))\varphi_p(\Omega_p,I_p))(x,t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить тождество для $t=1/p$ и $x\in\Omega_p$ с $ad-bc\equiv 0(\operatorname{mod} p)$.

Пусть $p\nmid c$. Тогда $\binom{b}{d}\equiv k\binom{a}{c}(\operatorname{mod} p)$ с некоторым k и поэтому единственное $s \operatorname{mod} p$ – решение сравнения $a(s)\equiv$ $\equiv 0(\operatorname{mod} p)$ является также решением сравнения $b(s)\equiv 0(\operatorname{mod} p)$, откуда следует $\Phi_1(x,t)=1=\Phi_0(x,t)$.

Если же $p\mid c$, то $p\mid a$ или $p\mid d$. При $p\mid a$ и $p\nmid d$ имеем $\Phi_1(x,t)=1=\Phi_0(x,t)$; при $p\nmid a$ и $p\mid d$ выполняются аналогичные равенства. Пусть теперь $p\mid a$ и $p\mid d$. Тогда, если $p\nmid b$, то снова имеют место такие же равенства; если же $p\mid b$, то $\Phi_0(x,t)=p+1$, а $\Phi_1(x,t)=1+p\chi(p)$. Поскольку дискриминант $\Delta=d^2H^2$, где H – произведение степеней простых $q\mid h$ [5, с.95], то в силу (4.8) $\chi(p)=1$, значит, $\Phi_1(x,t)=\Phi_0(x,t)$. Лемма доказана. □

Формула (4.14) позволяет распространить результат леммы 4.1 на простые $p\mid d$. Из (1.4) и (2.4) вытекает $T_p(p)=(U_p w_p U_p)=$ $=(w_p U_p)$, откуда и из (4.3)

$$\pi(T_p(p))\varphi_p(\Omega_p,I_p)=\varphi_p(P,\tfrac{1}{p}I_p).$$

Сопоставляя это равенство и (4.14), получаем следующий результат.

ЛЕММА 4.2. Для простых чисел $p\mid d$ выполняется формула

$$\pi_{2,\chi}(T^*(p))\varphi_p(\Omega_p,I_p)=\pi(T_p(p))\varphi_p(\Omega_p,I_p).$$

4.6. Снова на основании [3], с.79, 80] существуют представители g_k такие, что

$$T_0(p) = \sum_k (p g_k^{-1} U) = \sum_k (g_k U) \qquad \text{для } p \nmid h,$$

где $g_k = (p^{1/2}, \dots, g_{pk}, \dots) \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1$. Из (4.2) аналогично п.3.6 выводим для элементов $g_1 \in \mathfrak{A}_{\mathbb{A}}^1$ вида g_k соотношение

$$E(f(g_1 g), \Phi(\Omega, I)) = E(f(g), \pi(g_1)\Phi(\Omega, I)),$$

откуда и из определения (2.2) получаем

$$E(\tilde{T}_0(p) f, \Phi(\Omega, I)) = E(f, \pi(T_0(p))\Phi(\Omega, I))$$

для оператора Гекке $T_0(p) = \sum_k (g_k^{-1} U)$. Но согласно (2.I), $\tilde{T}_0(p) f = T_0(p) f$, значит, для простых $p \nmid h$ выполняется формула сплетения

$$E(T_0(p) f, \Phi(\Omega, I)) = E(f, \pi(T_0(p))\Phi(\Omega, I)). \tag{4.I7}$$

С другой стороны, из (4.II) для всех простых p и четных n следует формула

$$E(f, \Phi(\Omega, I))\Big|_{m,\chi} T(p) = p^n E(f, \pi_{2,\chi}(T^{\times}(p))\Phi(\Omega, I)). \tag{4.I8}$$

Объединяя формулы (4.I7), (4.I8) и леммы 4.I и 4.2, убеждаемся, что справедлива

ТЕОРЕМА 4.I. Для четных n и простых чисел $p \nmid 2\Delta$ или $p \mid d$ выполняется формула двойственности между операторами Гекке групп $\mathfrak{A}^{\times}$ и Sl_2 :

$$E(f, \Phi(\Omega, I))\Big|_{m,\chi} T(p) = p^n E(T_0(p) f, \Phi(\Omega, I)). \tag{4.I9}$$

Пусть $\theta(z, f) = E(f, \Phi(\Omega, I))$ – линейная комбинация тета-рядов вида (4.6), отвечающая собственной функции $f \in F_{2n}$ оператора Гекке $T_0(p)$: $T_0(p) f = \lambda(p) f$. Тогда

$$\theta(z, f)\Big|_{m,\chi} T(p) = p^n \lambda(p)\, \theta(z, f). \tag{4.20}$$

В общем случае, если $\bar{f}$ – базисный столбец функций из пространства F_{2n} и $\Lambda(p)$ – матрица оператора $T_0(p)$ в этом базисе, то

$$\theta(z,\bar{f})\Big|_{m,\chi} T(p) = p^n \Lambda(p)\cdot\theta(z,\bar{f}) . \qquad (4.21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.I. Впервые формула (4.2I) для $n=0$ была доказана Эйхлера ([4], с.148) арифметическим способом. В [7] использована идея, аналогичная нашей.

Из теорем 3.I и 4.I и из формулы коммутирования (2.9) непосредственно вытекает Основная теорема.

Литература

1. А н д р и а н о в А.Н., Ж у р а в л е в В.Г. Модулярные формы и операторы Гекке. М., 1990, 448 с.
2. А н д р и а н о в А.Н., М а л о л е т к и н Г.Н. Поведение тета-рядов рода n при модулярных подстановках. – Изв.АН СССР. Сер.мат., 1975, т.39, № 2, с.243-258.
3. Ш и м у р а Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. М., 1973, 326 с.
4. E i c h l e r M. Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin etc., 1974, 222 p.
5. E i c h l e r M. The basis problem for modular forms and the trace of the Hecke operators. - Lect.Notes Math., 1973, vol.320, p.75-152.
6. P o n o m a r e v P. Ternary quadratic forms and Shimura's correspondence. - Nagoya Math.J., 1981, vol.81, p.123-151.
7. R a l l i s S. The Eichler commutation relation and the continuous spectrum of the Weil representation. - Lect.Notes Math., 1979, vol.728, p.211-244.
8. S h i m u r a G. On modular forms of half integral weight. - Ann.Math., 1973, vol.97, N 3, p.440-481.
9. Y o s h i d a H. Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms. - Invent.math., 1980, vol.60, N 3, p.193-248.
10. Y o s h i d a H. On Siegel modular forms obtained from theta series. - J. reine und angew. Math., 1984, Bd 352, S.184-219.