V. A. Goncharov, Fourier coefficients of continuous functions for systems of Haar type, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1993, Number 2, 101–104

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.587

В. А. Гончаров

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА ХААРА

Хорошо известная теорема Бочкарева [1] утверждает, что если $f(t)\in\in \mathrm{Lip}(\alpha)$, $0<\alpha\leqslant 1$ на $[0, 1]$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}<\infty$, где $a_n(f)$—n-й коэффициент Фурье—Хаара на $[0, 1]$, то $f(t)\equiv\mathrm{const}$ на $[0, 1]$. Пусть задана последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ натуральных чисел, таких, что $p_0=1$, а $p_n\geqslant 2$ $(n\geqslant 1)$. Определим на $[0, 1]$ систему $\chi\{p_n\}\equiv\{\chi_m(t)\}$. Положим $\chi_1(t)\equiv 1$ на $[0, 1]$. Если же $m\geqslant 2$, то $m=m_n+r(p_{n+1}-1)+s$, где $n=0, 1, \ldots$; $r=0, 1, \ldots, m_n-1$; $s=1, \ldots, p_{n+1}-1$; $m_n=p_0p_1\ldots p_n$, причем такое представление числа m единственно. Обозначим через A множество точек вида l/m_k на отрезке $[0, 1]$. Если $t\in[0, 1]\diagdown A\equiv B$, то разложение

$$t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)}{m_k},\quad 0\leqslant\alpha_k(t)\leqslant p_k-1,$$

единственно. Функцию $\chi_m(t)=\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ определим следующим образом:

$$\chi_{n,r}^{(s)}(t)=\begin{cases}\sqrt{m_n}\exp\left(2\pi i s\,\dfrac{\alpha_{n+1}(t)}{p_{n+1}}\right) & \text{при } t\in\left(\dfrac{r}{m_n}, \dfrac{r+1}{m_n}\right)\cap B;\\[2mm] 0 \text{ при } t\notin\left[\dfrac{r}{m_n}, \dfrac{r+1}{m_n}\right]\end{cases}$$

$$(0\leqslant n<\infty,\ 0\leqslant r<m_n,\ 1\leqslant s<p_{n+1}).$$

Продолжим функцию $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ по непрерывности на интервал $(r/m_n, (r+1)/m_n)$. В точках разрыва функцию $\chi_{n,r}^{(s)}(t)$ положим равной полусумме ее предельных значений справа и слева, а на концах отрезка [0, 1] — ее предельным значениям изнутри отрезка. Определенная таким образом система $\chi\{p_n\}$ называется системой типа Хаара, построенной по последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Класс всех систем типа Хаара $\chi\{p_n\}$ называется классом систем типа Хаара.

Для систем типа Хаара, построенных по последовательностям $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с ограниченными p_n в совокупности, результат, аналогичный теореме Бочкарева, получен Бокаевым [2].

Теорема (Бокаев [2]). *Если при некотором* $\alpha\in(0, 1]$ *функция* $f(t)\in\in\mathrm{Lip}(\alpha)$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_{k+1}\sum\limits_{j=m_k+1}^{m_{k+1}}|a_j(f)|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}<\infty$, *то* $f(t)\equiv\mathrm{const}$ *на* $[0, 1]$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $f(t)\in\mathrm{Lip}(\alpha)$, $0<\alpha\leqslant 1$, *на* $[0, 1]$. *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(f)|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}<\infty$, $a_n(f)$—*n-й коэффициент Фурье для системы типа Хаара, то* $f(t)\equiv\mathrm{const}$ *на* $[0, 1]$.

Докажем сначала теорему 2.

Теорема 2. *Пусть $f(t)$ — непрерывная на $[0, 1]$ функция и*

$$\sum_{s=1}^{\infty} (\sqrt{m_s}) \sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} |a_t(f)| < \infty,$$

$a_t(f)$ — t-й коэффициент Фурье $f(t)$ для системы типа Хаара.

Тогда $f(t) \equiv \mathrm{const}$ на $[0, 1]$.

Доказательство. Докажем, что $\bigvee_0^1 f = 0$ ($\bigvee_0^1 f$ — вариация f на $[0, 1]$). Полагаем

$$J_k^{(n)} = \left(\frac{k-1}{m_n}, \frac{k}{m_n}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant m_n.$$

Тогда ввиду непрерывности функции $f(t)$ имеем

$$\bigvee_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \sup_{\xi_1, \xi_2 \in J_k^{(n)}} |f(\xi_1) - f(\xi_2)|.$$

Учитывая, что

$$S_{m_n}(\xi_1) = S_{m_n}(\xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in J_k^{(n)},$$

$S_{m_n}(t)$ — частные суммы ряда Фурье по системе типа Хаара от $f(t)$, а также, что $\sup |f(\xi_1) - f(\xi_2)|$ достигается в некоторых точках $\xi_{1,k}^{(n)}, \xi_{2,k}^{(n)} \in J_k^{(n)}$, получаем

$$\sup_{\xi_1, \xi_2 \in J_k^{(n)}} |f(\xi_1) - f(\xi_2)| = |f(\xi_{1,k}^{(n)}) - f(\xi_{2,k}^{(n)})|,$$

отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \sup_{\xi_1, \xi_2 \in J_k^{(n)}} |f(\xi_1) - f(\xi_2)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} |f(\xi_{1,k}^{(n)}) - f(\xi_{2,k}^{(n)})|.$$

Переобозначим $\xi_{1,k}^{(n)} = \xi_k^{(n)}$. Так как $\xi_k^{(n)} \in J_k^{(n)}$, то существует l_k:

$$(k-1)\frac{m_s}{m_n} < l_k \leqslant k\frac{m_s}{m_n}, \quad n \leqslant s,$$

такое, что $\xi_k^{(n)} \in J_k^{(n)}$. Тогда $\chi_l(\xi_k^{(n)}) = 0$, если

$$\left[\left((k_1-1)\frac{m_s}{m_n} < l \leqslant k_1\frac{m_s}{m_n}\right) \& (k_1 \neq k) \& (1 \leqslant k_1 \leqslant m_n)\right];$$

$$\chi_l(\xi_k^{(n)}) = 0, \text{ если } \left[(l \neq l_k) \& \left((k-1)\frac{m_s}{m_n} < l \leqslant k\frac{m_s}{m_n}\right)\right].$$

Отсюда получаем

$$\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}} |a_t\chi_t(\xi_k^{(n)})| = \sum_{t=(p_{s+1}-1)(l_k-1)+1}^{(p_{s+1}-1)l_k} |a_t\chi_t(\xi_k^{(n)})|.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}|f(\xi_{1,k}^{(n)})-S_{m_n}(\xi_{1,k}^{(n)})-\{f(\xi_{2\,k}^{(n)})-S_{m_n}(\xi_{2,k}^{(n)})\}|\leqslant$$

$$\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}|f(\xi_{1,k}^{(n)})-S_{m_n}(\xi_{1,k}^{(n)})|,$$

откуда

$$2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}|f(\xi_{1,k}^{(n)})-S_{m_n}(\xi_{1,k}^{(n)})|=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\sum_{t=m_n+1}^{\infty}a_t\chi_t(\xi_k^{(n)})\Big|\leqslant$$

$$\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\Big(\sum_{s=n}^{\infty}\Big(\Big|\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}}a_t\chi_t(\xi_k^{(n)})\Big|\Big)\Big)=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\Big(\sum_{s=n}^{\infty}\Big(\Big|\sum_{t=(p_{s+1}-1)(l_k-1)+1}^{(p_{s+1}-1)l_k}|a_t\chi_t(\xi_k^{(n)})|\Big)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\Big(\sum_{s=n}^{\infty}\Big(\sqrt{m_s}\sum_{t=(p_{s+1}-1)(l_k-1)+1}^{(p_{s+1}-1)l_k}|a_t|\Big)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}\Big(\sum_{s=n}^{\infty}\sqrt{m_s}\sum_{t=(k-1)\frac{m_s}{m_n}(p_{s+1}-1)+1}^{k\frac{m_s}{m_n}(p_{s+1}-1)}|a_t|\Big)\leqslant$$

$$\leqslant 2\lim_{n\to\infty}\sum_{s=n}^{\infty}\Big(\sqrt{m_s}\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}}|a_t|\Big),$$

следовательно, $\bigvee_0^1 f=0\Rightarrow f(t)\equiv\text{const}$ на $[0,\ 1]$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Используя неравенство

$$|a_j(f)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{m_k}}E_{m_k}(f),\quad m_k<j\leqslant m_{k+1}$$

из работы [3] и неравенство

$$E_{m_k}(f)\leqslant c\omega\left(f,\ \frac{1}{m_k}\right),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

из работы [4], имеем $|a_j(f)|\leqslant cm_k^{-\frac{1}{2}}$, $m_k<j\leqslant m_{k+1}$. Отсюда

$$\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sqrt{m_s}\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}}|a_t(f)|\Big)=\sum_{1}^{\infty}\Big(\sqrt{m_s}\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}}t\!\!/\,||a()\big)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}|a_t(f)|^{\frac{1}{2\alpha+1}}\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sqrt{m_s}\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}}|a_t(f)|\Big)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}\big((m_s)^{-\frac{1}{2}-\alpha}\big)^{\frac{1}{2\alpha+1}}=$$

$$=c\sum_{s=1}^{\infty}\Big(\sum_{t=m_s+1}^{m_{s+1}}|a_t(f)|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}\Big)=c\sum_{t=m_1+1}^{\infty}|a_t|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}.$$

Следовательно, если $\sum_{t=m_1+1}^{\infty}|a_t|^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}<\infty$, то из теоремы 2 получаем $f(t)\equiv\mathrm{const}$ на $[0, 1]$.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочкарев С. В. О коэффициентах рядов Фурье по системе Хаара//Матем. сб. 1969. **80**(**122**), № 1 (9). 97—116.
2. Бокаев Н. А. О коэффициентах Фурье по обобщенной системе Хаара//Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. 1990. № 3. 13—16.
3. Тухлиев К. Коэффициенты Фурье и наилучшие приближения одного класса систем сходимости//Докл. АН Таджикской ССР. 1980. **23**, № 11. 615—619.
4. Голубов Б. И. Об одном классе полных ортогональных систем//Сиб. матем. журн. 1968. **9**, № 2. 297—314.

Поступила в редакцию
23.01.92

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 515.12

В. Л. Сухих

РАЗМЕРНО ПОЛНОЦЕННОЕ КЛЕТОЧНОПОДОБНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ ДЛЯ ANR-КОМПАКТОВ

Долгое время стоявшая проблема К. Борсука о размерной полноценности ANR-компактов была решена недавно А. Н. Дранишниковым [1], построившим два 4-мерных ANR-компакта с 7-мерным произведением. Следовательно, существуют размерно неполноценные ANR-компакты, т. е. ANR-компакты, для размерности произведения которых не выполняется логарифмический закон.

В связи с этим возникает естественный вопрос о возможности представления всякого ANR-компакта как образа при CE-отображении некоторого размерно полноценного ANR-компакта той же размерности. Настоящая работа дает положительный ответ на этот вопрос.

При этом в качестве условия, гарантирующего размерную полноценность, используется так называемое условие (Δ), введенное К. Борсуком [2]; в статье Дранишникова и Щепина [3] для компактов этого класса предложен термин размерно-регулярные.

Определение 1. Пространство X удовлетворяет условию DD^kP дизъюнктной аппроксимации k-мерных дисков, если для любых двух отображений f, $g:D^k\to X$ и любого $\varepsilon>0$ найдутся отображения f', $g':D^k\to X$, такие, что $\mathrm{dist}(f, f')<\varepsilon$, $\mathrm{dist}(g, g')<\varepsilon$ и $\mathrm{Im}\, f'\cap\mathrm{Im}\, g'=\varnothing$.

Лемма 1 [4]. *Пусть ANR-компакт $X\in DD^nP$. Тогда любое отображение $f:Y\to X$, где Y — компакт,* $\dim Y\leqslant n$, *может быть аппроксимировано вложением.*