A. S. Kronrod, On a nonmajorizable method for choosing a confidence region for one type of specified function,

Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1973, Volume 210, Number 1, 18–19

Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 1

УДК 519.283 МАТЕМАТИКА

А. С. КРОНРОД

О НЕМАЖОРИРУЕМОМ РЕЦЕПТЕ ВЫБОРА ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО ВИДА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 VII 1972)

В заметке ([1]) показано, как по результатам измерений в точках $\{x_s\}$ ординаты $\{y_s\}$ наблюдаемой прямой $y = kx + l$ восстанавливается минимальная доверительная область для параметров k, l при заданном уровне достоверности $1 - \varepsilon$ и заданной целевой функции (значении ординаты прямой в точке x_0). Главное состоит в том, что целевая функция индуцирует в пространстве параметров k, l соответствующую этой функции меру.

В условиях ([1]) тривиальны широкие обобщения как на семейство кривых, так и на вид целевой функции. Однако в ([1]) требуется знание априорного распределения плотности вероятности в семействе допустимых кривых.

В заметке ([2]), наоборот, решается задача о построении немажорируемого рецепта для нахождения доверительной области с заданным уровнем достоверности без всяких предположений об априорном распределении плотности вероятности наблюдаемой величины. Однако в этом случае мера в пространстве значений измеряемой (векторной) величины считается заданной и минимальность доверительной области определяется по этой мере.

В этой работе делается попытка решить задачу типа задачи в заметке ([2]), но с тем, чтобы мера в пространстве параметров индуцировалась целевой функцией, как в ([1]).

Пусть для простоты мы, как и в ([1]), наблюдаем в точках $\{x_s\}$ ординаты $\{y_s\}$ прямой

$$y = kx + l \tag{1}$$

$(s = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть приборные ошибки заданы функциями $\varphi_s(y_s, y_s^0)$, и пусть, например, измерения независимы.

Пусть наша целевая функция состоит в получении минимальной доверительной области для ординаты прямой (1) в точке x_0 при заданном уровне достоверности $1 - \varepsilon$.

Мы теперь частично откажемся от предположения о задании априорного распределения плотности вероятности $F(k, l)$ в пространстве прямых вида (1).

Пусть нам не задано априорное распределение плотности вероятности значений y_0 прямых (1) в точке x_0. Однако мы потребуем для любого y_0 знания условной плотности вероятности $F_{y_0}(k, l)$ при условии, что $kx_0 + l = y_0$.

Иными словами, мы не знаем, куда и как часто попадает выстрел, но для каждого места попадания знаем распределение вероятности попаданий в заданную точку с разных направлений.

В этих условиях рассмотрим для каждого y_0 пучок прямых

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2}$$

Теперь вместо верхнего лебеговского множества плотности вероятности наблюдений $\{y_s\}$ при заданных значениях k, l, как в ([1]), мы рассмотрим функцию

$$f_{y_0}(k, l) = F_{y_0}(k, l) \prod_{s=1}^{n} \varphi_s(y_s, y_s^0), \tag{3}$$

где

$$y_s^0 = (y_0 - kx_0) + kx_s.$$

Далее, как в ([2]), мы рассмотрим верхнее лебеговское множество $Q_{y_0, \varepsilon}$ значений $f_{y_0}(k, l) > \alpha(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_{Q_{y_0,\varepsilon}} f_{y_0}(k, l)\, dt = (1 - \varepsilon) \int f_{y_0}(k, l)\, dt, \tag{4}$$

где dt соответствует движению по пучку (2) и в правой части (4) интеграл взят по всему пучку.

Теперь, как и в ([2]), искомый немажорируемый рецепт создания доверительной области $D_\varepsilon(y_1, \ldots, y_n)$ значений y_0 при данном $\varepsilon > 0$ и при наблюденных значениях $\{y_s\}$ состоит в том, что к $D_\varepsilon(y_1, \ldots, y_n)$ относятся все y_0, для которых

$$(y_1, \ldots, y_n) \in Q_{y_0, \varepsilon}. \tag{5}$$

Доказательство немажорируемости такого рецепта с помощью теоремы Фубини повторяет доказательство теоремы 1 в заметке ([2]). Предполагается измеримость всех необходимых функций и конечность интегралов, к которым применяется теорема Фубини.

Обобщение указанного результата на другие классы допустимых кривых очевидно. Наоборот, задание целевой функции при таком подходе требует выделения пучков траекторий, и широкие обобщения целевой функции для меня затруднительны.

Естественно встает вопрос о соотношении сказанного в ([1]) и данной заметке с методом наименьших квадратов (м.н.к.). В. А. Кронрод показал, что если класс допустимых функций — многочлены вида

$$y = \sum_{p=0}^{m} a_p x^p, \tag{6}$$

то при нормальном распределении приборных ошибок для постоянной (предельно) плотности вероятности любых значений коэффициентов a_p значение многочлена (6) в x_0, полученное по м.н.к., попадает в середину минимального доверительного интервала, даваемого нашим рецептом.

Однако уже для равновероятных углов наклона прямой (1) при равновероятных значениях l и нормальном распределении приборных ошибок точка попадания y_0^*, полученная по м.н.к., может существенно отклоняться от середины соответствующего доверительного интервала.

Центральный научно-исследовательский институт
патентной информации и технико-экономических исследований
Комитета по делам изобретений и
открытий при Совете Министров СССР
Москва

Поступило
10 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Кронрод, ДАН, 205, № 5 (1972). [2] А. С. Кронрод, ДАН, 208, № 5 (1972).