Е. А. Севастьянов, Средний модуль колебания и кусочно-монотонная аппроксимация, *Матем. заметки*, 1982, том 31, выпуск 6, 867–876

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 31, № 6 (1982)

СРЕДНИЙ МОДУЛЬ КОЛЕБАНИЯ И КУСОЧНО-МОНОТОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Е. А. Севастьянов

Пусть $\Omega(f, [\alpha, \beta]) = \sup\{|f(x') - f(x'')|: x', x'' \in [\alpha, \beta]\}$ — колебание функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. *Средним модулем колебания* ограниченной функции f на отрезке $\Delta = [a, b]$ назовем функцию

$$\Omega(\delta, f, \Delta) = \Omega(\delta, f) = \frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta \Omega(f, [x - \delta|\Delta|, x] \cap \Delta)\,dx,$$

где $0 < \delta \leqslant 1$, $|\Delta| = b - a$ (изменение величины $\Omega(\delta, f)$, которое произойдет, если колебание $\Omega(f, [x - \delta|\Delta|, x] \cap \Delta)$ заменить на $\Omega(f, [x, x + \delta|\Delta|] \cap \Delta)$ или на $\Omega\left(f, \left[x - \frac{\delta}{2}|\Delta|, x + \frac{\delta}{2}|\Delta|\right] \cap \Delta\right)$ для дальнейшего является несущественным). Очевидно, что $\Omega(\delta, f(x), \Delta) = \Omega(\delta, f(a + x|\Delta|), [0, 1])$. Геометрически $\Omega(\delta, f, [0, 1])$ — это площадь той части фигуры, «заметаемой» дополненным графиком функции f при сдвиге его вправо на δ, которая располагается над отрезком $[0, 1]$ (напомним, что дополненный график $F(f)$ функции $f(x)$ состоит из ее графика $\{(x, y): y = f(x), 0 \leqslant x \leqslant 1\} = F_f$ и вертикальных отрезков, дополняющих F_f до наименьшего замкнутого множества, содержащего F_f). Аналогичная характеристика подробно рассматривалась в [1] в связи с приближениями функций в хаусдорфовой метрике. В частности, в [1] было показано, что функция $\Omega(\delta, f)$ неотрицательна, возрастает, непрерывна и квазивыпукла при $\delta \geqslant 0$, т. е. $\Omega(\delta_1 + \delta_2, f) \leqslant \Omega(\delta_1, f) + \Omega(\delta_2, f)$ при любых $\delta_1, \delta_2 \geqslant 0$. Там же было отмечено, что $\Omega(0+, f) =$

$= 0$ тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ почти всюду на Δ непрерывна или, что то же, когда $f(x)$ интегрируема по Риману. Добавим к этому, что величина $\Omega(1/n, f, [0, 1])$ при $n \to \infty$ эквивалентна разности $\sum_n^*(f) - \sum_{*n}(f)$ верхней и нижней сумм Дарбу функции f для разбиения отрезка $[0, 1]$ на n равных отрезков.

Если определить для ограниченной измеримой на Δ функции f интегральный модуль непрерывности формулой

$$\omega_1(\delta, f, \Delta) = \omega_1(\delta, f) =$$
$$= \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{(1/|\Delta|)\int_{[a-h|\Delta|,\, b]} |f(x) - f(x - h|\Delta|)|\, dx\right\},$$

то, очевидно, $\omega_1(\delta, f) \leqslant \Omega(\delta, f)$. Легко видеть при этом, что модули $\omega_1(\delta, f)$ и $\Omega(\delta, f)$ могут отличаться по порядку (при $\delta \to 0$). Понятие среднего модуля колебания $\Omega(\delta, f)$ может представить интерес, в частности, по той причине, что некоторые утверждения об ограниченных функциях f с участием $\omega_1(\delta, f)$ допускают усиление, если в них роль модуля $\omega_1(\delta, f)$ поручить модулю $\Omega(\delta, f)$ (ср. ниже, например, следствие 1 и теорему 1).

Для простоты изложения далее рассматриваются непрерывные на отрезке Δ функции f ($f \in C(\Delta)$). Обозначим через $M_n(f, \Delta) = M_n(f)$ наименьшие равномерные уклонения функции $f \in C(\Delta)$ на отрезке Δ от кусочно-монотонных (непрерывных) функций порядка $\leqslant n$, т. е. функций, минимальное число участков монотонности которых на отрезке Δ не превосходит n ($n = 1, 2, \ldots$); $M_0(f, \Delta) = M_0(f) = \max\{f(x)\} - \min\{f(x)\}$. Очевидно, $M_n(f) \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

В следующей ниже теореме устанавливается связь между средним модулем колебания функции f и ее наименьшими уклонениями $M_n(f)$. Для формулировки теоремы обозначим через $\mathfrak{M}(\Delta)$ класс гомеоморфизмов μ отрезка Δ, т. е. класс непрерывных, строго возрастающих на $\Delta = [a, b]$ функций $\mu(t)$, для которых $\mu(a) = a$, $\mu(b) = b$, и рассмотрим суперпозицию $f \circ \mu = f(\mu(t))$ ($f \in C(\Delta)$, $\mu \in \mathfrak{M}(\Delta)$).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f \in C(\Delta)$, $n = 1, 2, \ldots$, $1/(n + 1) \leqslant \delta \leqslant 1/n$. *Тогда*

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{M}(\Delta)} \{\Omega(\delta, f \circ \mu)\} = \delta \sum_{k=0}^{n-1} 2(M_k(f) - M_n(f)) + 2M_n(f).$$

В частности,

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{M}(\Delta)} \{\Omega(1/n, f \circ \mu)\} = (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} 2M_k(f).$$

Теорема 1 является непосредственным следствием устанавливаемых ниже лемм 1 и 2. В свою очередь, доказательства этих лемм основываются на следующем утверждении (см. [2]).

ЛЕММА А. *Пусть* $f \in C(\Delta)$,

$$V_n(f, \Delta) = V_n(f) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup \left\{\sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(b_i)|\right\},$$

где супремум берется при фиксированном n *по всем* a_i, b_i, $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b$, *и пусть точки* α_i^n, β_i^n $(a \leqslant \alpha_1^n < \beta_1^n \leqslant \alpha_2^n < \beta_2^n \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n^n < \beta_n^n \leqslant b)$ *таковы, что*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\alpha_i^n) - f(\beta_i^n)| = V_n(f).$$

Тогда

$$V_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} 2M_k(f), \tag{1}$$

а точки α_i^n, β_i^n *можно считать выбранными таким образом, что*

a) $f(x) \in [f(\alpha_i^n), f(\beta_i^n)]$ *при* $x \in \Delta_i^n = [\alpha_i^n, \beta_i^n]$, *причем* $|f(\alpha_i^n) - f(\beta_i^n)| \geqslant 2M_n(f)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

b) *множество* $\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i^n = \Delta_n$ *имеет не более одного внутреннего интервала смежности* $(\beta_s^n, \alpha_{s+1}^n)$ *и, если такой есть, то совокупность отрезков* $\{\Delta_i^{n+1}\}_{i=1}^{n+1} = \{[\alpha_i^{n+1}, \beta_i^{n+1}]\}$ *получается присоединением отрезка* $[\beta_s^n, \alpha_{s+1}^n]$ *к отрезкам* Δ_i^n $(i = 1, 2, \ldots, n)$; *при этом* $|f(\beta_s^n) - f(\alpha_{s+1}^n)| = 2M_n(f)$;

c) *если множество* Δ_n — *отрезок, то отрезки* Δ_i^{n+1} $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ *получаются из отрезков* Δ_i^n $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *либо присоединением к ним нового отрезка (при этом можно считать, что он имеет общий конец с* Δ_n*), либо заменой одного из отрезков* Δ_i^n *двумя отрезками, образующимися удалением из заменяемого отрезка некоторого открытого интервала;*

d) *точки* α_i^n, β_i^n *разбивают отрезок* Δ *на* n *или* $n+1$ *отрезков, соответствующих участкам монотонности кусочно-монотонной функции наилучшего приближения, либо* *порядка не выше n (в случае отсутствия внутреннего интервала смежности), либо порядка не выше $n+1$ (в противном случае).*

Величину $V_n(f)$ будем называть n-ым частичным изменением функции f на отрезке Δ.

ЛЕММА 1. *Пусть $f \in C(\Delta)$. При любом действительном $\delta > 0$ и натуральном n имеем*

$$\Omega(\delta, f) \leqslant \delta \sum_{k=0}^{n-1} 2(M_k(f) - M_n(f)) + 2M_n(f). \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой А. Пусть имеет место случай, когда интервала смежности нет, т. е. когда множество $\Delta_n = \bigcup \Delta_i^n$ — это отрезок ($\Delta_n \subseteq \subseteq \Delta$). Рассмотрим отрезок Δ_i^n и определим на нем монотонную функцию $m_i(x)$ следующим образом. В случае, если $f(\alpha_i^n) < f(\beta_i^n)$, определим $m_i(x)$ как наибольшую возрастающую миноранту на Δ_i^n функции $f_i^+(x) = \min\{f(x), f(\beta_i^n) - 2M_n(f)\}$, т. е. $m_i(x) = \inf\limits_{t \geqslant x}\{f_i^+(t)\}$, ($t, x \in \Delta_i$); в случае же $f(\alpha_i^n) > f(\beta_i^n)$ — как наибольшую убывающую миноранту на Δ_i^n функции $f_i^-(x) = \min\{f(x), f(\alpha_i^n) - 2M_n(f)\}$, т. е. $m_i(x) = \inf\limits_{t \leqslant x}\{f_i^-(t)\}$ (t, $x \in \Delta_i$). Тогда в силу *a*) леммы А в общей точке соседних отрезков Δ_i^n и Δ_{i+1}^n функции $m_i(x)$ и $m_{i+1}(x)$ принимают одно и то же значение. Поэтому функция $m(x)$, равная $m_i(x)$ при $x \in \Delta_i^n$ ($i = 1, \ldots, n$) и продолженная непрерывно вне отрезка $\Delta_n = [\alpha_1^n, \beta_n^n]$ постоянными (т. е. так, что $m(x) = m(\alpha_1^n)$ при $x < \alpha_1^n$ и $m(x) = m(\beta_n^n)$ при $x > \beta_n^n$), является непрерывной и имеет не более n участков монотонности. Если каждую из функций $m_i(x)$ продолжить с отрезка Δ_i на всю прямую также непрерывно постоянными, то при любом x и $\delta > 0$ получим

$$\Omega(m, [x - \delta|\Delta|, x]) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Omega(m_i, [x - \delta|\Delta|, x]).$$

Поэтому

$$\Omega(\delta, m, \Delta) \leqslant (1/|\Delta|) \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(m_i, [x - \delta|\Delta|, x])\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta \cdot \operatorname{Var} m_i = [V_n(f) - 2nM_n(f)]\,\delta. \tag{3}$$

Кроме того, при любом x имеем

$$0 \leqslant f(x) - m(x) \leqslant 2M_n(f). \tag{4}$$

Действительно, пусть при некотором x^* выполняется неравенство $f(x^*) - m(x^*) > 2M_n(f)$, пусть $x^* \in \Delta_i^n$ и пусть для определенности $f(\alpha_i^n) < f(\beta_i^n)$. Тогда в силу определения функции $m_i(x)$, учитывая неравенство $f(x^*) \leqslant \leqslant f(\beta_i^n)$ (см. a)), найдем точку x^{**}, $x^* < x^{**} < \beta_i^n$, для которой $f(x^{**}) = m_i(x^*)$ и, следовательно, $f(x^*) - - f(x^{**}) > 2M_n(f)$. Это означает, что уклонение любой неубывающей на Δ_i^n функции от $f(x)$ больше $M_n(f)$. А так как уклонение любой невозрастающей на Δ_i^n функции, отличной от постоянной, в силу a) также больше $M_n(f)$, то получаем противоречие со свойством d).

В силу (3) и (4) получим

$$\Omega(\delta, f, \Delta) \leqslant \Omega(\delta, m, \Delta) + \Omega(\delta, f - m, \Delta) \leqslant \leqslant (V_n(f) - 2nM_n(f))\delta + 2M_n(f),$$

что и требовалось (см. (1)). Если для заданного $n \geqslant 2$ множество $\bigcup \Delta_i^n$ имеет внутренний интервал смежности Δ^{n+1}, то к рассмотренным отрезкам Δ_i^n следует добавить отрезок $\overline{\Delta^{n+1}}$ и для расширенной таким образом совокупности отрезков провести приведенные выше рассуждения (на $\overline{\Delta^{n+1}}$ функция $m(x)$ при этом будет постоянной в силу b)). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f \in C(\Delta)$, $n = 1, 2, \ldots, 1/(n + + 1) \leqslant \delta \leqslant 1/n$. *Тогда существует такая последовательность* $\{\mu_i\}$ *функций* $\mu_i \in \mathfrak{M}(\Delta)$, *что*

$$\lim_{i\to\infty} \Omega(\delta, f \circ \mu_i) = \delta \sum_{k=0}^{n-1} 2(M_k(f) - M_n(f)) + 2M_n(f). \tag{5}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\Delta = [0, 1]$, $1/(n + 1) \leqslant \delta < 1/n$. Рассмотрим вначале случай, когда отрезки $\Delta_i^n = [\alpha_i^n, \beta_i^n]$ (см. лемму А) имеют внутренний интервал смежности $(\beta_s^n, \alpha_{s+1}^n)$. Тогда для точек β_i^{n+1} $(i = 0, 1, \ldots, n + 1$, $\beta_0^{n+1} = \alpha_1^{n+1})$ в силу b) имеем

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s+1}}^{n+1} |f(\beta_{i-1}^{n+1}) - f(\beta_i^{n+1})| = V_n(f),\\ &|f(\beta_s^{n+1}) - f(\beta_{s+1}^{n+1})| = 2M_n(f) = V_{n+1}(f) - V_n(f).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Пусть $0 < \varepsilon < (1/2)(1 - n\delta) = \delta_1/2$. Определим на Δ функцию $\bar{\mu}_\varepsilon(t)$, положив

$$\bar{\mu}_\varepsilon(t) = \begin{cases} \beta_i^{n+1}, & (i-1)\delta + \varepsilon \leqslant t \leqslant i\delta - \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, s); \\ \beta_{s+1}^{n+1}, & s\delta + \varepsilon \leqslant t \leqslant s\delta + \delta_1 - \varepsilon; \\ \beta_i^{n+1}, & (i-2)\delta + \delta_1 + \varepsilon \leqslant t \leqslant (i-1)\delta + \delta_1 - \varepsilon \\ & \qquad (i = s+2, \ldots, n+1); \end{cases}$$

в остальных точках отрезка $\Delta = [0, 1]$ определим ее так, чтобы она на Δ была непрерывной, монотонной и чтобы в точках 0 и 1 принимала соответственно значения 0 и 1. Нетрудно видеть, что график $F(f \circ \bar{\mu}_\varepsilon) = \{(t, y): y = f(\bar{\mu}_\varepsilon(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant 1 - \varepsilon\}$ попадает в (открытую) 2ε-окрестность дополненного графика $F(f^*)$ функции

$$f^*(t) = \begin{cases} f(\beta_0^{n+1}), & t = 0; \\ f(\beta_i^{n+1}), & (i-1)\delta < t \leqslant i\delta \quad (i = 1, \ldots, s); \\ f(\beta_{s+1}^{n+1}), & s\delta < t \leqslant s\delta + \delta_1; \\ f(\beta_i^{n+1}), & (i-2)\delta + \delta_1 < t \leqslant (i-1)\delta + \delta_1 \\ & \qquad (i = s+2, \ldots, n+1). \end{cases} \tag{7}$$

Верно, очевидно, и обратное: 2ε-окрестность графика $F(f \circ \bar{\mu}_\varepsilon)$ содержит дополненный график $F(f^*)$. В силу непрерывности f вышесказанное остается в силе и с заменой функции $\bar{\mu}_\varepsilon(t)$ на функцию $\mu_\varepsilon(t) \in \mathfrak{M}(\Delta)$ при условии, что $\mu_\varepsilon(t)$ достаточно хорошо (равномерно) приближает функцию $\bar{\mu}_\varepsilon(t)$. Отсюда, из определения (7) функции f^* и из (6) следует, что

$$\Omega(\delta, f \circ \mu_\varepsilon) \to \Omega(\delta, f^*) = \\ = V_n(f)\,\delta + (V_{n+1}(f) - V_n(f))\delta_1, \quad \varepsilon \to 0, \tag{8}$$

т. е. (5) доказано.

Случай, когда отрезки Δ_i^n не имеют внутреннего интервала смежности (см. c)) и когда отрезки Δ_i^{n+1} могут быть получены добавлением к отрезкам Δ_i^n одного нового отрезка, фактически не отличается от рассмотренного (в этом случае при определении функции $\bar{\mu}_\varepsilon(t)$ малый отрезок длины δ_1 является крайним).

Остался случай, когда отрезки Δ_i^{n+1} получаются из отрезков Δ_i^n заменой некоторого отрезка $\Delta_s^n = [\alpha_s^n, \beta_s^n]$ его частями $[\alpha_s^n, \beta_s^{n+1}]$ и $[\alpha_{s+1}^{n+1}, \beta_s^n]$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i=1}^n |f(\beta_{i-1}^n) - f(\beta_i^n)| = V_n(f) \qquad (\beta_0^n = \alpha_1^n), \\ &|f(\beta_s^{n+1}) - f(\alpha_{s+1}^{n+1})| = V_{n+1}(f) - V_n(f). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Определим функцию $\bar{\mu}_\varepsilon^*(t)$, положив

$$\bar{\mu}_\varepsilon^*(t) = \begin{cases} \beta_i^n & (i-1)\delta + \varepsilon \leqslant t \leqslant i\delta - \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, s-1); \\ \beta_s^{n+1}, & (s-1)\delta + \varepsilon \leqslant t \leqslant (s-1)\delta + \delta_1 - \varepsilon; \\ \alpha_{s+1}^{n+1}, & t = (s-1)\delta + \delta_1; \\ \beta_i^n, & (i-1)\delta + \delta_1 + \varepsilon \leqslant t \leqslant i\delta + \delta_1 - \varepsilon \\ & \qquad\qquad (i = s, \ldots, n); \end{cases}$$

в остальных точках отрезка Δ, как и выше, определим ее так, чтобы она на Δ была непрерывной, монотонной и чтобы было $\bar{\mu}_\varepsilon^*(0) = 0$, $\bar{\mu}_\varepsilon^*(1) = 1$. Далее рассмотрим функцию

$$f^{**}(t) = \begin{cases} f(\beta_0^n), & t = 0; \\ f(\beta_i^n), & (i-1)\delta < t \leqslant i\delta \quad (i = 1, \ldots, s-1); \\ f(\beta_s^{n+1}), & (s-1)\delta < t < (s-1)\delta + \delta_1; \\ f(\alpha_{s+1}^{n+1}), & t = (s-1)\delta + \delta_1; \\ f(\beta_i^n), & (i-1)\delta + \delta_1 < t \leqslant i\delta + \delta_1 \quad (i = s, \ldots, n). \end{cases} \tag{10}$$

Так же как и выше, замечаем, что графики $F(f \circ \bar{\mu}_\varepsilon^*)$ и $F(f^{**})$ располагаются в 2ε-окрестностях друг друга и при этом функцию $\bar{\mu}_\varepsilon^*$ можно заменить на некоторую функцию $\mu \in \mathfrak{M}(\Delta)$. Отсюда, из определения (10) функции f^{**} и из (9) следует (8). Лемма доказана.

Отметим некоторые следствия доказанной теоремы. В силу (1) имеет место

ТЕОРЕМА 1'. *Пусть $f \in C(\Delta)$, $n = 1, 2, \ldots$, $V_n(f)$ — n-е частичное изменение функции f, $1/(n+1) \leqslant \delta \leqslant 1/n$. Тогда*

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{M}(\Delta)} \{\Omega(\delta, f \circ \mu)\} = V_n(f)\delta + (V_{n+1}(f) - V_n(f))(1 - n\delta),$$

в частности,

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{M}(\Delta)} \{\Omega(1/n, f\circ\mu)\} = (1/n)\, V_n(f).$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть* $f\in C(\Delta)$, $n=1, 2, \ldots$ $\ldots, 1/(n+1)\leqslant\delta\leqslant 1/n$. *Тогда*

$$\omega_1(\delta, f)\leqslant\delta\sum_{k=0}^{n-1} 2(M_k(f)-M_n(f))+2M_n(f)=$$
$$=V_n(f)\,\delta+(V_{n+1}(f)-V_n(f))(1-n\delta),$$

в частности,

$$\omega_1(1/n, f)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2M_k(f)=V_n(f)/n.$$

Последнее неравенство является точным в том смысле, что при каждом $n=1, 2, \ldots$

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{M}(\Delta)} \{\omega_1(1/n, f\circ\mu)\}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2M_k(f)=V_n(f)/n$$

(это фактически устанавливается при доказательстве леммы 2). Таким образом, найдено окончательное значение постоянной C в ранее доказанном (см. [3]) неравенстве

$$\omega_1(1/n, f)\leqslant\frac{C}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2M_k(f).$$

Как обычно, через $R_n(f, \Delta)=R_n(f)$ обозначим наименьшие равномерные уклонения функции f на отрезке Δ от рациональных функций степени $\leqslant n$. Поскольку рациональная функция степени $\leqslant n$ имеет не более $2n$ участков монотонности, то $M_{2n}(f)\leqslant R_n(f)$, $n=0, 1, \ldots$ Более того, очевидно, что

$$M_{2n}(f)\leqslant\inf_{\mu\in\mathfrak{M}(\Delta)} \{R_n(f\circ\mu)\stackrel{\mathrm{df}}{=\!=} R_n^*(f)\qquad(\leqslant R_n(f)).$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $f\in C(\Delta)$, $n=1, 2, \ldots$ *Тогда*

$$\sup_{\mu\in\mathfrak{M}(\Delta)} \{\Omega(1/n, f\circ\mu)\}\leqslant(4/n)\sum_{k=0}^{n-1} R_k^*(f),$$

в частности,

$$\Omega(1/n, f)\leqslant(4/n)\sum_{k=0}^{n-1} R_k(f).$$

С л е д с т в и е 3. *Имеем*

$$\omega_1(1/n, f)\leqslant(4/n)\sum_{k=0}^{n-1} R_k(f).$$

Это неравенство с несколько бо́льшим значением постоянной было получено Е. П. Долженко [4]. Заметим, что вопрос о точном значении постоянной остается открытым.

Установленная выше теорема дает повод для следующего определения. Пусть $f \in D(\Delta)$, т. е. пусть f имеет на отрезке Δ разрывы лишь первого рода. Положим

$$v(\delta, f) = \sup_{\mu \in \overline{\mathfrak{M}}(\Delta)} \{\Omega(\delta, f \circ \mu)\}, \qquad 0 < \delta \leqslant 1.$$

Очевидно, функция $v(\delta, f)$ не зависит от монотонных отображений отрезка Δ на себя и в силу теоремы 1 является при каждом натуральном n линейной на отрезке $[1/(n+1), 1/n]$, причем

$$v(1/n, f) = V_n(f)/n = (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} 2M_k(f) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Функцию $v(\delta, f)$ назовем *модулем колебания функции f на отрезке* Δ. Из того, что $M_k(f) \downarrow 0$ при $k \to \infty$, заключаем, что $v(0+, f) = 0$ и что модуль колебания $v(\delta, f)$ — функция, выпуклая кверху. Обратно, нетрудно показать, что всякая непрерывная, возрастающая, выпуклая кверху на $(0, 1]$ и линейная на отрезках $[1/(n+1), 1/n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ функция $v(\delta)$, $v(0+) = 0$ является модулем колебания некоторой непрерывной функции f. Понятие модуля колебания $v(\delta, f)$ (как и понятие n-ых частичных изменений $V_n(f)$) дает вполне определенную характеристику поведения f, связанную с нашими геометрическими представлениями об изменении (колебании) графика $y = f(x)$ по высоте. Фактически для того же широко используется понятие Ф-вариации функции. Напомним, что Ф-вариацией функции f на отрезке Δ относительно некоторой возрастающей, выпуклой книзу функции $\Phi(u)$ переменного $u \geqslant 0$, $\Phi(0) = 0$, называется величина

$$V_\Phi(f, \Delta) = V_\Phi(f) = \sup \left\{\sum_{i=1}^{n} \Phi(|f(x_i) - f(x_{i-1})|)\right\},$$

где супремум берется по всем $x_i \in \Delta$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, и всем $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $V_{\Phi_1}(f) \leqslant V_{\Phi_2}(f)$ при $\Phi_1(u) \leqslant \Phi_2(u)$; нетрудно также показать, что для любой функции $f \in D(\Delta)$ найдется функция Φ, при которой $V_\Phi(f) < \infty$. Верно и обратное: если при некоторой функции Φ имеем $V_\Phi(f) < \infty$, то $f \in D(\Delta)$.

Сравнивая понятия модуля колебания и Ф-вариации, можно отметить, что в ряде случаев первое позволяет более полно учесть интересующие нас особенности изменения (колебания) функции. Так, пусть $\Phi(u) = u^2$, $f(x) = x$ $(x \in \Delta = [0, 1])$, и пусть $g(x)$ — это функция, непрерывная на $[0, 1]$, линейная на каждом из отрезков $[(i-1)/3, i/3]$ $(i = 1,2,3)$, $g(0) = 0$, $g(1/3) = 2/3$, $g(2/3) = 1/3$, $g(1) = 1$. Тогда $V_\Phi(f) = V_\Phi(g)$, в то время как очевидно различие модулей колебания функций f и g. Фактически это же обстоятельство («грубость» Ф-вариации) демонстрирует следующий пример. Положим $\Phi(u) = u^2$ и рассмотрим класс A_1 функций f, для которых $V_\Phi(f) < \infty$, и класс A_2 функций f, для которых $v(\delta, f) = O(\Phi^{-1}(\delta)) = O(\sqrt{\delta})$. Тогда можно показать, что и для функций f класса A_1 и для функций f класса A_2 не улучшаемой по порядку оценкой сверху наименьших уклонений $M_n(f)$ является $C_f\,\Phi^{-1}(1/n) = C_f/\sqrt{n}$ (C_f не зависит от n). Однако, легко доказать, что класс A_2 шире класса A_1, т. е. модуль колебания позволил получить более общий результат, чем Ф-вариации. Аналогичная ситуация может возникнуть также в теории рациональных приближений.

Московский инженерно-физический институт

Поступило 6.IX.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А., О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности, рациональных) функций. Матем. сб., 101, № 4 (1976), 508 — 541.

[2] Севастьянов Е. А., Кусочно-монотонная аппроксимация и Ф-вариации, Analysis Mathematica, 1, № 2 (1975), 141 — 164.

[3] Севастьянов Е. А., Равномерные приближения кусочно-монотонными функциями и некоторые их приложения к Ф-вариациям и рядам Фурье, Докл. АН СССР, 217, № 1 (1974), 27 — 30.

[4] Долженко Е. П., Равномерные аппроксимации рациональными функциями (алгебраическими и тригонометрическими) и глобальные функциональные свойства. Докл. АН СССР, 166, № 3 (1966), 526 — 529.