В.В.Капустин, А.В.Липин

ОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ И РЕШЕТКИ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ. I

Эта статья задумывалась как систематизация широкого класса результатов, касающихся описания и классификации некоторых операторных алгебр – коммутанта $\{T\}'$, бикоммутанта $\{T\}''$ некоторого оператора T, замыкания $\mathrm{Alg}\,T$ в слабой операторной топологии множества всех полиномов от T, а также алгебр, порожденных решетками инвариантных подпространств оператора T. Оригинальные доказательства этих результатов обычно имели довольно простую идею, но сложное техническое оформление. Кроме того, обилие ссылок в многих публикациях сильно затрудняло чтение. Анализ указанных в библиографии источников и классификация полученных в них результатов привели к образованию новых понятий, делающих более прозрачными содержание и доказательства теорем. Кроме того, введение этих понятий позволило обобщить многие теоремы на более широкие классы операторов. Отметим основные методы, с помощью которых удается доказать почти все приводимые в работе результаты: метод псевдоподобия, разложение алгебр и решеток в прямые суммы и использование свойств сплетаемости с операторами более простого вида. Наглядность вычислением придает использование бескоординатной функциональной модели.

Авторы выражают искреннюю благодарность В.И.Васюнину за полезное обсуждение результатов и помощь при подготовке статьи и Н.К.Никольскому за ряд ценных замечаний.

§ I. Введение

I.I. Основные определения и обозначения

H – сепарабельное гильбертово пространство, I_H – тождественный оператор в нем, $\mathcal{B}(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов в пространстве H. В алгебре $\mathcal{B}(H)$ рассматривается слабая операторная топология (WOT), сходимость $T_\lambda \xrightarrow{WOT} T$ в которой равносильна слабой сходимости $T_\lambda f \xrightarrow{W} Tf$ на любом элементе $f \in H$. Для произвольного подмножества $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ определяются

- коммутант $\mathcal{A}' \overset{def}{=} \{B \in \mathcal{B}(H) : A \in \mathcal{A} \Longrightarrow AB = BA\}$,
- бикоммутант $\mathcal{A}'' \overset{def}{=} (\mathcal{A}')'$,
- алгебра $\mathrm{Alg}\,\mathcal{A}$ – наименьшая слабо (т.е. WOT –) замкнутая алгебра, содержащая $\mathcal{A}$ и I_H,
- решетка $\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}$ инвариантных подпространств, состоящая

из (замкнутых) подпространств L, $L\subset H$, таких, что $AL\subset L$ для каждого оператора A из $\mathcal{A}$,

- решетки $\mathrm{Lat}'\mathcal{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}'$ и $\mathrm{Lat}''\mathcal{A} = \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}''$ гипер- и би-инвариантных подпространств,
- алгебры $\mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \{B\in\mathcal{B}(H): \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}\subset \mathrm{Lat}\,\{B\}\}$,

$\mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}'\mathcal{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}'$ и $\mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}''\mathcal{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}''$.

Все шесть алгебр слабо замкнуты. Если множество $\mathcal{A}$ коммутативно, имеют место включения:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} & \subset & \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}''\mathcal{A} & \subset & \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}'\mathcal{A} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \mathrm{Alg}\,\mathcal{A} & \subset & \mathcal{A}'' & \subset & \mathcal{A}' \end{array},$$

$$\mathrm{Lat}'\mathcal{A} \subset \mathrm{Lat}''\mathcal{A} \subset \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}. \tag{I}$$

Если множество $\mathcal{A}$ состоит из одного оператора T, мы, соответственно, пишем $\mathrm{Alg}\,T$, $\mathrm{Lat}\,T$ и т.д. Очевидно, алгебра $\mathrm{Alg}\,T$ является WOT -замыканием множества $\mathcal{P}(T)$ полиномов от оператора T.

Мы говорим, что оператор $T\in\mathcal{B}(H)$ удовлетворяет свойству

(DCP) (double commutant property;обозн. $T\in(DCP)$), если $\{T\}''=\mathrm{Alg}\,T$;

(CC) (commutativity of the commutant, $T\in(CC)$), если $\{T\}'=\{T\}''$;

рефлексивен, если $\mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,T=\mathrm{Alg}\,T$;

бирефлекивен, если $\mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}''T=\{T\}''$; и

гиперрефлексивен, если $\mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}'T=\{T\}'$.

Оператор T называется сжатием, если $\|T\|\leqslant 1$. Введем следующие классы сжимающих операторов:

$C_{0*}=\{T\in\mathcal{B}(H): \|T\|\leqslant 1$ и $T^n f\to 0$ для всех $f\in H\}$,

$C_{*0}=\{T\in\mathcal{B}(H): T^*\in C_{0*}\}$,

$C_{1*}=\{T\in\mathcal{B}(H): \|T\|\leqslant 1$ и $T^n f\not\to 0$ для всех $f\in H\setminus\{0\}\}$,

$C_{*1}=\{T\in\mathcal{B}(H): T^*\in C_{1*}\}$,

$C_{\alpha\beta}=C_{\alpha*}\cap C_{*\beta}$ $(\alpha,\beta=0,1)$.

Замыкание множества L, $L\subset H$, будем обозначать символом $cl_H L$, или, когда это не вызовет недоразумений, просто $cl\,L$ или $\overline{L}$. Если $\{L_\lambda\}$ – семейство подмножеств, то выражение $\bigvee_\lambda\{L_\lambda\}$ означает наименьшее замкнутое подпространство пространства H, содержащее все L_λ.

Пусть $T_1\in\mathcal{B}(H_1)$, $T_2\in\mathcal{B}(H_2)$. Оператор $X: H_1\to H_2$, удовлетворяющий равенству $XT_1 = T_2X$, называется сплетением операторов T_1 и T_2. Если для T_1 и T_2 существует сплетение X такое, что $\operatorname{Ker} X = \{0\}$ (соответственно, $\overline{\operatorname{Range} X} = H_2$), то мы пишем $T_1 \overset{i}{\prec} T_2$ (соответственно, $T_1 \overset{d}{\prec} T_2$). Оператор $X: H_1 \to H_2$, обладающий свойствами $\operatorname{Ker} X = \{0\}$ и $\overline{\operatorname{Range} X} = H_2$, называется деформацией. Если существует деформация X, сплетающая операторы T_1 и T_2, мы будем писать $T_1 \prec T_2$. Обозначение $T_1 \overset{cd}{\prec} T_2$ применяется, если существует семейство $\{X_\alpha\}$ сплетений такое, что $\bigvee_\alpha \operatorname{Range} X_\alpha = H_2$. Отношения $\overset{i}{\prec}, \overset{d}{\prec}, \overset{cd}{\prec}, \prec$ суть отношения порядка. Если $T_1 \prec T_2$ и $T_2 \prec T_1$, то мы говорим что операторы T_1 и T_2 квазиподобны и обозначаем $T_1 \sim T_2$. Аналогичен смысл обозначений $T_1 \overset{i}{\sim} T_2$, $T_1 \overset{d}{\sim} T_2$. Говорят, что операторы T_1 и T_2 подобны (обозначение $T_1 \approx T_2$), если они сплетаются обратимым оператором. Когда надо подчеркнуть, какие сплетения осуществляют приведенные отношения порядка, мы будем писать $T_1 \overset{i}{\underset{X}{\prec}} T_2$, $T_1 \underset{X,Y}{\sim} T_2$, и т.п.

Кратностью спектра оператора T называется число

$$\mu_T \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \min\{\dim E : \bigvee_{n\geq 0} T^n E = H\}.$$

Пусть C^{ac} – класс всех сжатий, имеющих абсолютно непрерывную минимальную унитарную дилатацию. Отметим, что этот класс включает в себя все вполне неунитарные (в.н.у.) сжатия. Положим $C_{11}^{ac} = C_{11} \cap C^{ac}$. Сжатия класса C^{ac} обладают H^∞-исчислением (см. [I]); очевидно, $H^\infty(T) \subset \operatorname{Alg} T$. Будем говорить, что T – сжатие класса C_0, если существует функция φ, $\varphi \in H^\infty$, называемая аннулятором оператора T, такая, что $\varphi(T) = 0$. Все такие аннуляторы образуют подпространство $m_T H^\infty$ для некоторой внутренней функции m_T, называемой минимальной функцией сжатия T.

Наконец, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ означают, соответственно, множества натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел, $\mathbb{T}$ и $\mathbb{D}$ – окружность и (открытый) круг в плоскости $\mathbb{C}$ с центром в нуле и единичного радиуса.

I.2. Предварительные сведения и простейшие результаты

Пусть S – оператор сдвига в пространстве H^2, $M_\vartheta = P_\vartheta S | K_\vartheta$, где ϑ – внутренняя функция, $K_\vartheta = H^2 \ominus \vartheta H^2$, P_ϑ – ортопроектор в H^2 на K_ϑ. Операторы M_ϑ принадлежат классу C_0, причем $m_{M_\vartheta} = \vartheta$. Рассмотрим последовательность $\vec{\vartheta} = (\vartheta_n)_{n\geq 1}$ внутренних функций, такую, что $\vartheta_{n+1} | \vartheta_n$ (то есть $\vartheta_n / \vartheta_{n+1} \in H^\infty$), $n \geq 1$. Оператор $M_{\vec{\vartheta}} = \sum_{n\geq 1} \oplus M_{\vartheta_n}$ называется жордановым оператором. Все такие операторы принадлежат классу C_0 и $m_{M_{\vec{\vartheta}}} = \vartheta_1$, $\mu_{M_{\vec{\vartheta}}} = max\{n \in \mathbb{N} : \vartheta_n \neq const\}$.

I. ТЕОРЕМА О ЖОРДАНОВОЙ МОДЕЛИ (см., например, [2], добавление I). Для любого оператора $T \in C_0$ существует единственный квазиподобный ему жорданов оператор $M_{\vec{\vartheta}}$.

Оператор $M_{\vec{\vartheta}}$ называется жордановой моделью сжатия T.

2. ЛЕММА.

1) Пусть $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$, $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$, $XT_1 = T_2X$ и $L \in Lat\, T_1$. Тогда $\overline{XL} \in Lat\, T_2$ и $T_1 | L \overset{d}{\underset{X|L}{\prec}} T_2 | \overline{XL}$.

2) Если, кроме того, $L \in Lat' T_1$ и $T_2 \overset{i}{\underset{Y}{\prec}} T_1$, то $T_2 | \overline{XL} \overset{i}{\underset{Y|\overline{XL}}{\prec}} T_1 | L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Достаточно заметить, что

$T_2 \overline{XL} \subset \overline{T_2 XL} = \overline{XT_1 L} \subset \overline{XL}$ и $(X|L)(T_1|L) = (T_2|\overline{XL})(X|L)$.

2) Поскольку $YX \in \{T_1\}'$, то $Y\overline{XL} \subset L$. Очевидно, $(X|\overline{XL})(T_2|\overline{XL}) = (T_1|L)(Y|\overline{XL})$. ●

3. ЛЕММА.

1) Если $T_1 \overset{i}{\prec} T_2$ и $T_2 \in C_{1*}$, то $T_1 \in C_{1*}$.

2) Если $T_1 \overset{d}{\prec} T_2$ и $T_1 \in C_{0*}$, то $T_2 \in C_{0*}$.

3) Если $T_2 \overset{d}{\prec} T_1$ и $T_2 \in C_{*1}$, то $T_1 \in C_{*1}$.

4) Если $T_2 \overset{i}{\prec} T_1$ и $T_1 \in C_{*0}$, то $T_2 \in C_{*0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Если $XT_1 = T_2X$, то имеем $XT_1^n = T_2^n X$ для любого натурального числа n. Поэтому сходимость $T_1^n f \to 0$ $(f \in H_1)$ влечет $T_2^n Xf \to 0$. Условие $T_2 \in C_{1*}$ дает $Xf = 0$, откуда, по инъективности оператора X, $f = 0$.

2) Множество $\{h \in H_2 : T_2^{\,n} h \longrightarrow 0\}$ является замкнутым подпространством пространства H_2. Как и в I) легко проверяется, что оно содержит плотное подпространство $Range\,X$ и, следовательно, совпадает с H_2.

3),4) получаются переходом к сопряженным операторам.

4. ЛЕММА. Если $T_1 \overset{d}{\prec} T_2$, то $\mu_{T_1} \geq \mu_{T_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $XT_1 = T_2X$, $\overline{Range\,X} = H_2$ и $\{h_j\}$ – циклическое семейство для оператора T_1. Очевидно, что $\{Xh_j\}$ – циклическое семейство для оператора T_2. ●

5. ЛЕММА. Пусть $T \in C^{ac}$. Тогда
$\mu_T = min\{card\{X_\alpha\} : S \overset{cd}{\underset{\{X_\alpha\}}{\prec}} T\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если $S \overset{cd}{\underset{\{X_\alpha\}}{\prec}} T$, то $\mu_T \leq \sum_\alpha \mu_{T|\overline{\mathrm{Range}\, X_\alpha}} \leq \mathrm{card}\,\{X_\alpha\}$ (последнее неравенство следует из леммы 4). Для доказательства обратного неравенства достаточно показать, что $\mu_T = 1$ влечет $S \overset{d}{\prec} T$. В самом деле, пусть $H_1, \dots, H_{\mu_T}$ – инвариантные подпространства оператора T такие, что $\mu_{T|H_\alpha} = 1$ для любого $\alpha \leq \mu_T$, и пусть операторы $X_\alpha : H^2 \longrightarrow H_\alpha$ имеют плотные образы и сплетают S и $T|H_\alpha$. Тогда эти же операторы, рассматриваемые как операторы $H^2 \to H$, образуют семейство сплетений с требуемыми свойствами.

Итак, пусть $\mu_T = 1$, h – циклический вектор оператора T. Рассмотрим пространство $K = \bigvee\{\mathcal{U}^n h : n \geq 0\}$, где $\mathcal{U}$ – минимальная унитарная дилатация оператора T. Ясно,что $\overline{P_H K} = H$, где P_H – ортопроектор на пространство H, и что $\mathcal{U}|K \overset{d}{\underset{P_H|K}{\prec}} T$. Поэтому достаточно показать, что $S \overset{d}{\prec} \mathcal{U}'$ для любого изометрического оператора $\mathcal{U}'$, для которого $\mu_{\mathcal{U}'} = 1$.
Но каждый такой оператор унитарно эквивалентен либо оператору сдвига S (для которого утверждение тривиально), либо унитарному оператору $z|\chi_e L^2$, где χ_e – индикатор измеримого подмножества e единичной окружности $\mathbb{T}$. Остается заметить, что операторы S и $z|\chi_e L^2$ сплетаются оператором $f \longmapsto \chi_e f$ при $m(\mathbb{T} \setminus e) > 0$ (где m – нормированная мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$), и оператором $h \longmapsto \gamma h$, где $\gamma \in L^\infty$, $\gamma \neq 0$ п.в., $\log|\gamma| \notin L^1$, при $m(\mathbb{T} \setminus e) = 0$.

6. СЛЕДСТВИЕ. Если $T \in C^{ac}$, то $S \overset{cd}{\prec} T$. ●

Наконец, мы докажем несколько утверждений, касающихся сжатий класса C_0. Применяемый здесь подход принадлежит Х.Берковичу ([7]).

7. ЛЕММА. Пусть $T \in C_0$, $L \in \mathrm{Lat}\, T$. Тогда $\mu_{T^*} = \mu_T$ и $\mu_{T|L} \leq \mu_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первого утверждения легко получается из теоремы I (о жордановой модели). Далее, очевидное соотношение $T|L \overset{i}{\prec} T$ влечет $T^* \overset{d}{\prec} (T|L)^*$, и, по лемме 4, $\mu_{T|L} = \mu_{(T|L)^*} \leq \mu_{T^*} = \mu_T$. ●

Рассмотрим наряду с каждым сжимающим оператором T оператор-функцию $T(\cdot)$ на классе H^∞:

$$T(f) = T \,|\, \overline{\mathrm{Range}\, f(T)}, \quad f \in H^\infty.$$

8. ЛЕММА. Если T_1, T_2 – сжимающие операторы в пространствах H_1, H_2, и $T_1 \overset{d}{\prec} T_2$, то $\mu_{T_1(\cdot)} \geq \mu_{T_2(\cdot)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для любой функции f, $f \in H^\infty$, $\overline{\mathrm{Range}\, f(T_1)} \in \mathrm{Lat}\, T_1$, и, если $XT_1 = T_2 X$, $\overline{XH_1} = H_2$, то $\overline{X\, \mathrm{Range}\, f(T_1)} = \overline{Xf(T_1)H_1} = \overline{f(T_2)XH_1} = \overline{\mathrm{Range}\, f(T_2)}$. Поэтому можно применить лемму 2.I). Мы имеем $T_1(f) \overset{d}{\prec} T_2(f)$. Остается воспользоваться леммой 4.

9. ЛЕММА. Если T_1, T_2 – два сжатия класса C_0, $T_1 \overset{i}{\prec} T_2$, то $\mu_{T_1(\cdot)} \leqslant \mu_{T_2(\cdot)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – инъективное сплетение для операторов T_1 и T_2. Тогда оператор $X | \overline{\mathrm{Range}\, f(T_1)}$ сплетает операторы $T_1(f)$ и $T_2(f)$, какова бы ни была функция $f \in H^\infty$. Соотношение $T_1(f) \overset{i}{\prec} T_2(f)$ влечет $T_2(f)^* \overset{d}{\prec} T_1(f)^*$, и, по леммам 7 и 8, $\mu_{T_2(\cdot)} = \mu_{T_2(\cdot)^*} \geqslant \mu_{T_1(\cdot)^*} = \mu_{T_1(\cdot)}$. ●

Заметим, что, как показывает лемма 8, функция $\mu_{T(\cdot)}$ является квазиподобным инвариантом. Из следующей леммы видно, что для класса C_0 этот инвариант полон: если $\mu_{T_1(\cdot)} = \mu_{T_2(\cdot)}$, то $T_1 \sim T_2$.

IO. ЛЕММА. Пусть $T = M_{\vec{\vartheta}}$, $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_t)$ – жорданов оператор ($t = \mu_T \leqslant \infty$). Имеют место соотношения

$$[\mu_{T(\cdot)}]^{-1}(\{0, 1, \dots, j\}) = \vartheta_{j+1} H^\infty \quad (j = 0, 1, \dots, t) \tag{2}$$

(здесь для единообразия полагается $\vartheta_{t+1} = \vartheta_\infty = 1$).

Очевидно, равенства (2) позволяют по функции $\mu_{T(\cdot)}$ однозначно восстановить оператор $T = M_{\vec{\vartheta}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H^\infty$ и $\vartheta_{j+1} | f$. Тогда, по лемме 7,

$$\mu_{T(f)} = \mu_{M_{\vec{\vartheta}} | \overline{K_1 \oplus \dots \oplus K_j \oplus \mathbb{O} \oplus \dots \oplus \mathbb{O}}} \leqslant \mu_{M(\vartheta_1, \dots, \vartheta_j)} = j$$

(здесь $K_\ell = \overline{\mathrm{Range}\, f(M_{\vartheta_\ell})}$). Мы доказали включение $\supset$ в равенстве (2).

Обратно, пусть функция ϑ_{j+1} не делит функцию f. Тогда в разложении

$$M_{\vec{\vartheta}}(f) = f(M_{\vartheta_1}) \oplus \dots \oplus f(M_{\vartheta_t})$$

$j + 1$ первые слагаемые отличны от нуля. Ясно, что минимальная функция оператора $f(M_{\vartheta_\ell})$ есть $m_\ell = \vartheta_\ell / (f_i \wedge \vartheta_\ell)$ (где f_i – внутренняя часть функции f), и, значит, $f(M_{\vartheta_\ell}) \sim M_{m_\ell}$. Поэтому оператор $M_{\vec{\vartheta}}(f)$ квазиподобен жорданову оператору $\sum_{\ell=1}^{t} \oplus M_{m_\ell}$, кратность спектра которого $\geqslant j + 1$. Это доказывает обратное включение в (2). ●

11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если T_1, T_2 – сжатия класса C_0, то любое из условий $T_1 \prec T_2$, $T_1 \overset{d}{\prec} T_2$, $T_1 \overset{i}{\sim} T_2$ влечет $T_1 \sim T_2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 8,9, каждое из этих условий влечет $\mu_{T_1(\cdot)} = \mu_{T_2(\cdot)}$. Теперь квазиподобие следует из замечания, предваряющего лемму 10. ●

12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $T \in C_0$, $\mu_T < \infty$, $L \in Lat\, T$. Рассмотрим жордановы модели $J = M_{\vec{\vartheta}}$, $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_t)$, $J_0 = M_{\vec{\varphi}}$, $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_\ell)$ операторов T и $T|L$. Тогда $\ell \le t$ и $\varphi_j \mid \vartheta_j$ $(j = 1, \dots, \ell)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\ell \le t$ следует из леммы 7. Она же дает соотношение $\mu_{(T|L)(\cdot)} \le \mu_{T(\cdot)}$. Поэтому, при любом $j \le \ell$: $[\mu_{T(\cdot)}]^{-1}\{0,\dots,j\} \subset [\mu_{(T|L)(\cdot)}]^{-1}\{0,\dots,j\}$. Поскольку функции $\mu_{T(\cdot)}$ и $\mu_{(T|L)(\cdot)}$ квазиподобно инвариантны, то в этом включении можно считать T и $T|L$ жордановыми операторами. По лемме 10 получаем $\vartheta_{j+1} H^\infty \subset \varphi_{j+1} H^\infty$ $(j = 0, \dots, \ell-1)$, что и дает соотношения $\varphi_j \mid \vartheta_j$. ●

1.3. Функциональная модель

Пусть T – в.н.у. сжатие в гильбертовом пространстве H, $\mathcal{U}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ $(\mathcal{H} \supset H)$ – его минимальная унитарная дилатация. Пространство $\mathcal{H}$ раскладывается в прямую сумму $\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$, где G_* – "приходящее" подпространство, $\mathcal{U}^* G_* \subset G_*$, G – "уходящее" подпространство, $\mathcal{U} G \subset G$. Можно показать, что числа $\dim(G \ominus \mathcal{U} G)$ и $\dim(G_* \ominus \mathcal{U}^* G_*)$ совпадают с дефектными индексами $d_T \overset{def}{=} \dim Range(I - T^*T)^{1/2}$ и d_{T^*} оператора T.

Фиксируем пространства E, E_* такие, что $\dim E = d_T$, $\dim E_* = d_{T^*}$. Произвольная пара унитарных операторов v и v_*, $v: E \to G \ominus \mathcal{U} G$, $v_*: E_* \to G_* \ominus \mathcal{U}^* G_*$ определяет изометрические вложения $\pi: L^2(E) \to \mathcal{H}$ и $\pi_*: L^2(E_*) \to \mathcal{H}$:

$$\pi\Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} z^k e_k\Big) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^k v e_k, \quad e_k \in E,$$

$$\pi_*\Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} z^k e_{*k}\Big) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}^{k+1} v_* e_{*k}, \quad e_{*k} \in E_*.$$

Имеют место формулы

$$G = \pi H^2(E), \quad G_* = \pi_* H^2_-(E_*), \quad \pi^*\pi = I, \quad \pi_*^*\pi_* = I, \quad \pi z = \mathcal{U}\pi, \quad \pi_* z = \mathcal{U}\pi_*,$$

где $H^2_-(E_*) = L^2(E_*) \ominus H^2(E_*)$. Ясно, что $\pi_*^*\pi z = z\pi_*^*\pi$.

Поэтому оператор $\theta_T = \pi_*^* \pi$ можно рассматривать как операторную функцию класса $L^\infty(E \to E_*)$. Более того, $\theta_T \in H^\infty(E \to E_*)$ и $\|\theta_T\| \leq 1$. Функция θ_T называется характеристической функцией сжатия T.

Знание функции θ_T позволяет восстановить оператор T с точностью до унитарной эквивалентности. Фиксируем соответствующие пространства E, E_*, сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и изометрические вложения $\pi : L^2(E) \to \mathcal{H}$, $\pi_* : L^2(E_*) \to \mathcal{H}$ такие, что $\pi_*^* \pi = \theta_T$, $Range\, \pi \vee Range\, \pi_* = \mathcal{H}$. Положим $G = \pi H^2(E)$, $G_* = \pi_* H^2_-(E_*)$, $K_\theta = \mathcal{H} \ominus (G_* \oplus G)$ и определим оператор P_θ как ортопроектор в пространстве $\mathcal{H}$ на подпространство K_θ, унитарный оператор $\mathcal{U}$ равенствами $\mathcal{U}\pi = \pi z$, $\mathcal{U}\pi_* = \pi_* z$ и, наконец, оператор $M_\theta = P_\theta\, \mathcal{U} | K_\theta$.

13. ТЕОРЕМА. Операторы T и M_θ унитарно эквивалентны.

Оператор M_θ называется функциональной моделью сжатия T.

Подпространства $R \overset{def}{=} \mathcal{H} \ominus \pi_* L^2(E_*)$ и $R_* \overset{def}{=} \mathcal{H} \ominus \pi L^2(E)$ называют остаточным и $*$-остаточным пространствами унитарной дилатации $\mathcal{U}$. Положим $\Delta = (I - \theta^*\theta)^{1/2}$, $\Delta_* = (I - \theta\theta^*)^{1/2}$, и определим изометрические операторы $\tau : \overline{\Delta L^2(E)} \to \mathcal{H}$, $\tau_* : \overline{\Delta_* L^2(E_*)} \to \mathcal{H}$ равенствами $\tau\Delta = \pi - \pi_*\theta$, $\tau_*\Delta_* = \pi_* - \pi\theta^*$. Нетрудно показать, что их образы совпадают с подпространствами R и R_*; поэтому операторы $U \overset{def}{=} \mathcal{U} | R$ и $U_* \overset{def}{=} \mathcal{U} | R_*$ унитарно эквивалентны операторам умножения на независимую переменную в пространствах $\overline{\Delta L^2(E)}$ и $\overline{\Delta_* L^2(E_*)}$ соответственно.

Операторы U и U_* называются остаточной и $*$-остаточной частями унитарной дилатации $\mathcal{U}$. Допуская некоторую вольность речи, мы иногда будем называть пространства R и R_* соответственно остаточным и $*$-остаточным пространствами, а операторы U и U_* – остаточной и $*$-остаточной частями оператора T. Мы будем пользоваться следующими формулами:

$$\tau^*\pi = \Delta, \quad \tau^*\pi_* = 0, \quad \tau_*^*\pi = 0, \quad \tau_*^*\pi_* = \Delta_*, \quad \tau_*^*\tau = -\theta,$$
$$\pi_*\pi_*^* + \tau\tau^* = \pi\pi^* + \tau_*\tau_*^* = I, \quad P_H = I - \pi_* P_- \pi_*^* - \pi P_+ \pi^*, \tag{2}$$

где P_+ – проектор Рисса, $P_- = I - P_+$.

Каждой аналитической в единичном круге $\mathbb{D}$ функции θ сопоставляется ассоциированная функция $\tilde{\theta} \in H^\infty(E_* \to E)$: $\tilde{\theta}(z) = \theta(\bar{z})^*$. Функция θ называется внутренней ($*$-внутренней), если при п.в. $\xi \in \mathbb{T}$ оператор $\theta(\xi)$ (соотв., $\tilde{\theta}(\xi)$) есть изометрия, и внешней ($*$-внешней), если $clos\, \theta H^2(E) = H^2(E_*)$ (соотв., $clos\, \tilde{\theta} H^2(E_*) = H^2(E)$). Имеется соответствие: $T \in C_{*0}$

$(T\in C_{0*}) \Longleftrightarrow \theta_T$ – внутренняя (соотв., $*$ – внутренняя), $T\in C_{*1}$
$(T\in C_{1*}) \Longleftrightarrow \theta_T$ – внешняя (соотв., $*$ – внешняя).

Будем говорить, что (операторнозначная) функция $\theta, \theta\in H^\infty(E\to E_*)$, имеет левое (правое) скалярное кратное $\delta, \delta\in H^\infty$, если существует функция $\Omega, \Omega\in H^\infty(E_*\to E)$ такая, что $\Omega\theta = \delta I$ (соотв., $\theta\Omega = \delta I$). Если функция θ имеет и левое и правое скалярные кратные, то мы говорим, что она обладает скалярным кратным. Если $T\in C^{ac}$, T_0 – его в.н.у. часть, то мы полагаем $\theta_T = \theta_{T_0}$. Класс (SM) (сокращение от scalar multiple) есть множество сжатий $T\in C^{ac}$ таких, что характеристическая функция θ_T обладает скалярным кратным.

Для сжатия $T\in C^{ac}$ символом σ_T мы будем обозначать борелевское подмножество окружности $\mathbb{T}$, являющееся объединением множества неизометричности функции θ_T и борелевского множества, на котором сосредоточена спектральная мера унитарной части оператора T.

Существует связь между инвариантными подпространствами в.н.у. сжатия T и его характеристической функцией. Именно, каждому подпространству $L\in \mathrm{Lat}\, T$ однозначно соответствует факторизация $\theta_{T_1} = \theta_1\theta_0$ его характеристической функции в произведение двух сжимающих функций $\theta_0\in H^\infty(E\to F)$, $\theta_1\in H^\infty(F\to E_*)$ (F – некоторое гильбертово пространство, называемое промежуточным), регулярная в следующем смысле: $\tau\tau^* = \tau_0\tau_0^* + \tau_1\tau_1^*$ (или, равносильно, $\tau_*\tau_*^* = \tau_{*0}\tau_{*0}^* + \tau_{*1}\tau_{*1}^*$), где τ_j и τ_{*j} – функциональные вложения, соответствующие операторной функции θ_j.

Более подробное изложение этой теории читатель может найти в монографии [I] и препринте [I4].

§ 2. Унитарные операторы

Для унитарного оператора все указанные во введении алгебры и решетки легко описываются.

Рассмотрим спектральное представление унитарного оператора V в гильбертовом пространстве K :

$$K = \int_{\mathbb{T}} \oplus\, K(\xi)\, d\nu(\xi), \quad (Vf)(\xi) = \xi f(\xi), \quad f\in K, \tag{I}$$

где ν – конечная борелевская мера на единичной окружности $\mathbb{T}$, $K(\xi)$ - ν -измеримое семейство подпространств фиксированного гильбертова пространства. Как известно ([3], теорема 7.2.4), операторы B из коммутанта $\{V\}'$ суть операторы умножения на операторнозначную функцию $B(\xi): K(\xi) \longrightarrow K(\xi)$,

$$(Bf)(\xi) = B(\xi)f(\xi), \quad f\in K. \tag{2}$$

Соотношение $B\in\{V\}''$ означает, что оператор $B(\xi)$ коммутирует со всеми ограниченными операторами в $K(\xi)$ при ν - п.в. ξ, то есть, $B(\xi)=b(\xi)I_{K(\xi)}$, $b(\xi)\in\mathbb{C}$, и, отсюда, $\{V\}''=L^\infty_\nu(V)$.

Инвариантные подпространства унитарного оператора описываются следующим образом ([2], стр.30). Если $L\in Lat\,V$, то

$$L = L_1 \oplus L_2, \tag{3}$$

где L_2- приводящее, а L_1- вполне не приводящее оператор V подпространства; при этом,

$$L_2 = PK = \{f\in K: f(\xi)\in P(\xi)K(\xi) \quad \text{для } \nu \text{ - п.в. } \xi\in\mathbb{T}\}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{d\nu_a}{dm}\right|^{1/2} L_1 = \Phi H^2(\mathfrak{D}) = \{f\in K: f(\xi)=\Phi(\xi)g(\xi), \xi\in\mathbb{T}, g\in H^2(\mathfrak{D})\} \tag{5}$$

для некоторых ν - измеримых операторных функций P,Φ, т.ч. $P(\xi)$ - ортопроектор в пространстве $K(\xi)$ при ν - п.в. ξ, а $\Phi(\xi)$ - изометрический оператор из некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{D}$ в $K(\xi)$ при m - п.в. ξ, $\xi\in\mathbb{T}$; для ν_s- - п.в. ξ полагается $\Phi(\xi)=\mathbb{O}$. Здесь и далее ν_a и ν_s обозначают абсолютно непрерывную и сингулярную составляющие меры ν.

Указанные выше представления алгебр $\{V\}'$ и $\{V\}''$ позволяют описать гипер- и би-инвариантные подпространства оператора V. Гиперинвариантные подпространства L имеют вид

$$L = \int_e \oplus K(\xi)\,d\nu(\xi), \tag{6}$$

где e - борелевское подмножество окружности $\mathbb{T}$, а биинвариантные - суть приводящие подпространства (4) оператора V.

Заметим, что если оператор B имеет инвариантными все подпространства L вида (6) (т.е. $B\in Alg\,Lat'V$), то он коммутирует со всеми спектральными проекторами оператора V, а следовательно, и с его спектральной мерой. Последнее влечет представление (2) для оператора B, и, поэтому, $Alg\,Lat'V=\{V\}'$.

Для операторов $B\in Alg\,Lat''V$ рассуждение продолжается: мы имеем $Lat\,K(\xi)\subset Lat\,B(\xi)$ (ν - п.в. ξ), откуда $B\in L^\infty_\nu(V)$ и $Alg\,Lat''V=\{V\}''=L^\infty_\nu(V)$.

Далее, по известному критерию полноты полиномов в L^2_ν, $d\nu=\omega\,dm+d\nu_s$ (для этого требуется, чтобы

$\int \log \omega(\xi)\, dm(\xi) = -\infty$ (см. [2], стр.40)),

$$m\{w=0\}>0 \Longrightarrow Alg\, V = L^\infty_\nu(V).$$

Вводя $(mod\ m)$ – множество

$$\mathcal{O}_V = \{\xi \in \mathbb{T} : \omega(\xi) \neq 0\},$$

и предполагая $\mathcal{O}_V \neq \mathbb{T}$, имеем $Alg\, V = L^\infty_\nu(V)$, а потому и $Alg\, Lat\, V = L^\infty_\nu(V)$. Если же $\mathcal{O}_V = \mathbb{T}$, то существует измеримое семейство изометрических вложений $\Phi(\xi): \mathbb{T} \longrightarrow K(\xi)$.

Пусть $V = V_a \oplus V_s$, $K = K_a \oplus K_s$ – разложение оператора V в прямую сумму абсолютно непрерывного и сингулярного унитарных операторов, и пусть $B \in Alg\, Lat\, V$. Поскольку $K_a \oplus \mathbb{O}$, $\mathbb{O} \oplus K_s \in Lat\, V$, то оператор B разложим относительно представления $K = K_a \oplus K_s$: $B = B_a \oplus B_s$. Имеем $B_a w^{-1/2} \Phi H^2 \subset w^{1/2}\Phi H^2$, откуда $B_a H^2 = \Phi^* w^{1/2} B_a w^{-1/2}\Phi H^2 \subset H^2$, и $B_a \in H^\infty(V_a)$. Поэтому $Alg\, Lat\, V \subset H^\infty(V_a) \oplus L^\infty_{\nu_s}(V_s)$. Для доказательства обратного включения заметим, что $Alg\, Lat\, V \supset Alg\, V$, и проверим, что $Alg\, V \supset H^\infty(V_a) \oplus L^\infty_{\nu_s}(V_s)$. С этой целью рассмотрим множество L функций $f \in L^2_\nu$ таких, что $f(V) \in H^\infty(V_a) \oplus L^\infty_{\nu_s}(V_s)$, и положим $\hat{L} = cl_{L^2_\nu} L$. Очевидно, что $\hat{L}$ является замкнутым z-инвариантным подпространством в L^2_ν, содержащим функцию $\mathbb{1}$, и потому представляется в виде (см. (3)-(5)) $\hat{L} = \hat{L}_a \oplus \hat{L}_s$, где $\hat{L}_s = L^2_{\nu_s}$, а подпространство $\hat{L}_a$ либо имеет вид φH^2 для некоторой функции φ, $|\varphi|^{-2} = \omega$, либо совпадает с $L^2_{\nu_a}$. В любом случае, подпространство $\mathcal{X}$, $\mathcal{X} \overset{def}{=} \{f \in L^\infty_\nu : f(\xi) = h(\xi)$ при m – п.в. $\xi \in \mathbb{T}$ для некоторой функции $h \in H^\infty\}$, содержится в $\hat{L}$. Кроме того, очевидно, $\hat{L} \cap \mathcal{X} = L$. Поэтому $L = \mathcal{X}$, и, значит,

$$H^\infty(V_a) \oplus L^\infty_{\nu_s}(V_s) = Alg\, V = Alg\, Lat\, V.$$

Полученные результаты собраны в следующую теорему.

I. ТЕОРЕМА. Для унитарного оператора V справедливы следующие утверждения.

1) Коммутант $\{V\}'$ состоит из операторов, разложимых (в смысле (2)) в спектральном представлении оператора V.

2) Бикоммутант $\{V\}''$ равен $L^\infty_\nu(V)$.

3) Алгебра $Alg\, V$ равна $L^\infty_\nu(V)$ при $\mathcal{O}_V \neq \mathbb{T}$ и $H^\infty(V) \oplus L^\infty_{\nu_s}(V)$ при $\mathcal{O}_V = \mathbb{T}$.

4) Инвариантные подпространства L описываются соотношениями (3)-(5).

5) Гиперинвариантные подпространства суть подпространства представимые в виде (6) при борелевском $e \subset \mathbb{T}$

6) Биинвариантные подпространства суть приводящие подпространства (см.(4)).

7) Оператор V рефлексивен, бирефлексивен и гиперрефлексивен.

8) $V \in (\mathbb{D}CP) \longleftrightarrow \sigma_V = \mathbb{T}$

9) $V \in (CC) \longleftrightarrow \mu_V = 1$.

2. СЛЕДСТВИЕ. Если $V = V_a \oplus V_s$, где V_a – абсолютно непрерывный, а V_s – сингулярный унитарный операторы, то $\mathrm{Alg}\, V = \mathrm{Alg}\, V_a \oplus \mathrm{Alg}\, V_s$.

3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть V_1 и V_2 – абсолютно непрерывные унитарные операторы. Следующие утверждения равносильны.

1) $\mathrm{Alg}(V_1 \oplus V_2) = \mathrm{Alg}\, V_1 \oplus \mathrm{Alg}\, V$

2) $\{V_1 \oplus V_2\}'' = \{V_1\}'' \oplus \{V_2\}''$

3) $\sigma_{V_1} \cap \sigma_{V_2} = \emptyset$. ●

§ 3. <u>О разложимости алгебр и решеток</u>

3.1. Общие результаты

1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{B}(H_1)$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}(H_2)$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H_1 \oplus H_2)$ – алгебры операторов, содержащие единицы.

1) Если $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, то $\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} \supset \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_1 \oplus \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}_1' \oplus \mathcal{A}_2'$.

2) Если $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, то $\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} \subset \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_1 \oplus \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_1' \oplus \mathcal{A}_2'$.

3) $\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} \supset \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_1 \oplus \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} \subset \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_1 \oplus \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_2$.

4) $\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} \subset \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_1 \oplus \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} \supset \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_1 \oplus \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $L_{1,2} \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_{1,2}$, $A \in \mathcal{A}$, то, по предположению, $A = A_1 \oplus A_2$, $A_{1,2} \in \mathcal{A}_{1,2}$ и $L_1 \oplus L_2 \in \mathrm{Lat}\, A$. Второе включение доказывается аналогично.

2) Так как $I \oplus \mathbb{O}$, $\mathbb{O} \oplus I \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$, то для произвольного оператора $B \in \mathcal{A}'$ получаем $B = B_1 \oplus B_2$, где $B_j = P_{H_j} B \mid H_j$

(здесь и далее пространства H_1 и H_2 считаем естественным образом вложенными в $H_1 \oplus H_2$). Очевидно, $B \in (\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{O})'$, откуда $B_1 \in \mathcal{A}_1'$. Аналогично, $B_2 \in \mathcal{A}_2'$. Подобным образом доказывается и первое включение.

3) Если $H_1, H_2 \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}$ и $B \in \mathrm{Alg\,Lat}\,\mathcal{A}$, то $BH_1 \subset H_1$, $BH_2 \subset H_2$, откуда $B = B_1 \oplus B_2$, $B_j = B | H_j$ Очевидно, $B_j \in \mathrm{Alg\,Lat}\,\mathcal{A}_j$.

Обратно, правое включение (ввиду 1)) влечет

$$\mathrm{Lat}\,\mathcal{A} = \mathrm{Lat\,Alg\,Lat}\,A \supset \mathrm{Lat\,Alg\,Lat}\,\mathcal{A}_1 \oplus \mathrm{Lat\,Alg\,Lat}\,A_2 = \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_1 \oplus \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}_2 .$$

4) Доказывается аналогично утверждению 3).

Далее рассматриваются операторы $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$ и $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$.

2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

(i1) $\mathrm{Alg}(T_1 \oplus T_2) \subset \mathrm{Alg}\,T_1 \oplus \mathrm{Alg}\,T_2$,

(i2) $\mathrm{Lat}(T_1 \oplus T_2) \supset \mathrm{Lat}\,T_1 \oplus \mathrm{Lat}\,T_2$,

(i3) $\mathrm{Alg\,Lat}(T_1 \oplus T_2) \subset \mathrm{Alg\,Lat}\,T_1 \oplus \mathrm{Alg\,Lat}\,T_2$,

(i4) $\{T_1 \oplus T_2\}' \supset \{T_1\}' \oplus \{T_2\}'$,

(i5) $\mathrm{Lat}'(T_1 \oplus T_2) \subset \mathrm{Lat}'T_1 \oplus \mathrm{Lat}'T_2$,

(i6) $\mathrm{Alg\,Lat}'(T_1 \oplus T_2) \supset \mathrm{Alg\,Lat}'T_1 \oplus \mathrm{Alg\,Lat}'T_2$,

(i7) $\{T_1 \oplus T_2\}'' \subset \{T_1\}'' \oplus \{T_2\}''$,

(i8) $\mathrm{Lat}''(T_1 \oplus T_2) \supset \mathrm{Lat}''T_1 \oplus \mathrm{Lat}''T_2$,

(i9) $\mathrm{Alg\,Lat}''(T_1 \oplus T_2) \subset \mathrm{Alg\,Lat}''T_1 \oplus \mathrm{Alg\,Lat}''T_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение (i1) выполняется, поскольку прямая сумма $\mathrm{Alg}\,T_1 \oplus \mathrm{Alg}\,T_2$ является слабо замкнутой алгеброй, содержащей $I \oplus I$ и $T_1 \oplus T_2$. Остальные утверждения получаются из (i1) применением предложения 1. ●

3. ЗАМЕЧАНИЕ. Легко проверить, что

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \in \{T_1 \oplus T_2\}' \leftrightarrow X_{11} \in \{T_1\}',\ X_{22} \in \{T_2\}',\ T_1 X_{12} = X_{12} T_2,\ X_{21} T_1 = T_2 X_{21} .$$

Поэтому разложимость коммутанта $\{T_1 \oplus T_2\}' = \{T_1\}' \oplus \{T_2\}'$ равносильна отсутствию в $\{T_1 \oplus T_2\}'$ ненулевых операторов вида $\begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix}$, или, иначе, отсутствию ненулевых сплетений для операторов T_1 и T_2 .

4. ЛЕММА. 1) Если $B \in \{T\}'$, то подпространства $\overline{BH}$ и $\mathrm{Ker}\,B$ принадлежат $\mathrm{Lat}''T$. 2) Если $B \in \{T\}''$, то подпространства $\overline{BH}$ и $\mathrm{Ker}\,B$ принадлежат $\mathrm{Lat}'T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $C\in\{T\}''$, то $C\overline{BH}\subset\overline{CBH}=\overline{BCH}\subset\subset\overline{BH}$ и $B(C\,Ker\,B)=C(B\,Ker\,B)=\mathbb{O}$. 2) Доказывается аналогично. ●

Мы говорим, что алгебра или решетка, соответствующая оператору $T_1\oplus T_2$, разложима, если в соответствующем включении (in) $(n=1,2,\dots,9)$, см. предложение 2) имеет место равенство. Такое свойство мы будем обозначать (en).

5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для операторов T_1,T_2 имеют место импликации

$$(e1)\Rightarrow(e2)\Leftrightarrow(e3)\Rightarrow(e4)\Leftrightarrow(e5)\Leftrightarrow(e6)\Leftrightarrow(e7)\Leftrightarrow(e8)\Leftrightarrow(e9).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 1 дает цепочки $(e1)\Rightarrow(e2)\Leftrightarrow(e3)$, $(e1)\Rightarrow(e4)\Rightarrow(e5)\Leftrightarrow(e6)$, $(e4)\Rightarrow(e7)\Rightarrow(e8)\Leftrightarrow(e9)$. Импликации $(e2)\Rightarrow(e4)$, $(e5)\Rightarrow(e4)$ и $(e8)\Rightarrow(e4)$ мы докажем от противного.

Предположим, что $\{T_1\oplus T_2\}'\neq\{T_1\}'\oplus\{T_2\}'$. Согласно замечанию 3, операторы T_1 и T_2 имеют ненулевое сплетение X. Не умаляя общности, можно считать $T_1X=XT_2$ $(X:H_2\to H_1$, $X\neq\mathbb{O})$, то есть, что оператор $B\overset{def}{=}\begin{bmatrix}0&X\\0&0\end{bmatrix}$ принадлежит $\{T_1\oplus T_2\}'$. По лемме 4 подпространство $L\overset{def}{=}ker\begin{bmatrix}I&X\\0&0\end{bmatrix}$ принадлежит $Lat''(T_1\oplus T_2)\subset Lat(T_1\oplus T_2)$. Если $Xh_2\neq 0$, $h_2\in H_2$, то $0\neq(-Xh_2)\oplus h_2\in L$, в то время, как $\mathbb{O}\oplus h_2\notin L$, и, поэтому решетки $Lat''(T_1\oplus T_2)$ и $Lat(T_1\oplus T_2)$ не разложимы. Далее, подпространство H_2, очевидно, принадлежит $Lat'T_1\oplus Lat'T_2$, однако, $\mathbb{O}\neq BH_2\not\subset H_2$, что доказывает неразложимость решетки $Lat'(T_1\oplus T_2)$.

Итак, отрицание утверждения (e4) привело нас к отрицаниям утверждений (e2),(e5) и (e8). Предложение доказано. ●

6. ЛЕММА. $Alg(T_1\oplus T_2)=Alg\,T_1\oplus Alg\,T_2\Leftrightarrow I\oplus\mathbb{O}\in Alg(T_1\oplus T_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $\Rightarrow$ тривиальна. Для доказательства обратной заметим, что принадлежность операторов $I\oplus\mathbb{O}$, $I\oplus I$, $T_1\oplus T_2$ алгебре $Alg(T_1\oplus T_2)$ влечет принадлежность ей операторов $I\oplus\mathbb{O}$, $\mathbb{O}\oplus I$, $T_1\oplus\mathbb{O}$, $\mathbb{O}\oplus T_2$, а алгебра $Alg\,T_1\oplus Alg\,T_2$ есть наименьшая, содержащая эти операторы. ●

7. ЛЕММА. Пусть T_1,T_2, Q_1, Q_2 – ограниченные линейные операторы, $T_1\underset{X_1,Y_1}{\sim}Q_1$, $T_2\underset{X_2,Y_2}{\sim}Q_2$. Тогда

$$\{T_1 \oplus T_2\}' = \{T_1\}' \oplus \{T_2\}' \Longleftrightarrow \{Q_1 \oplus Q_2\}' = \{Q_1\}' \oplus \{Q_2\}'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Q_1 A = A Q_2$. Тогда оператор $Y A X_2$ сплетает операторы T_1 и T_2. По замечанию 3, разложимость $\{T_1 \oplus T_2\}'$ влечет $Y A X_2 = \mathbb{O}$, и, поскольку Y_1 и X_2 – деформации, получаем $A = \mathbb{O}$. Вновь обращаясь к замечанию 3 констатируем разложимость коммутанта $\{Q_1 \oplus Q_2\}'$. ●

3.2. Отделение сингулярной части

8. ТЕОРЕМА. Пусть T – сжатие в гильбертовом пространстве H, $T = U_s \oplus T_a$ $(H = H_s \oplus H_a)$ – его разложение в прямую сумму сингулярного унитарного оператора U_s и сжатия T_a класса C^{ac}. Тогда все рассматриваемые в этой работе алгебры и решетки оператора T разложимы (в смысле (E1)-(E9)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 5 достаточно доказать разложение $\mathrm{Alg}\, T = \mathrm{Alg}\, U_s \oplus \mathrm{Alg}\, T_a$. Пусть $U_a : \mathcal{H}_a \to \mathcal{H}_a$ – минимальная унитарная дилатация оператора T_a. Тогда оператор $U = U_s \oplus U_a$ является минимальной унитарной дилатацией для T. Согласно следствию 2.2 $\mathrm{Alg}\, U = \mathrm{Alg}\, U_s \oplus \mathrm{Alg}\, U_a$ и, следовательно, существует направленность $\{p_\lambda\}$ полиномов таких, что $p_\lambda(U) \xrightarrow{WOT} I_{H_s} \oplus \mathbb{O}_{\mathcal{H}_a}$, откуда $p_\lambda(T) = P_H p_\lambda(U) | H \xrightarrow{WOT} P_H [I_{H_s} \oplus \mathbb{O}_{\mathcal{H}_a}] = I_{H_s} \oplus \mathbb{O}_{\mathcal{H}_a}$. Поэтому $I \oplus \mathbb{O} \in \mathrm{Alg}\, T$, и нам остается воспользоваться леммой 6.

Из теоремы 8 вытекает, что изучаемые свойства рефлексивности, $(\mathcal{D}CP)$, (CC) и др. для оператора $T = U_s \oplus T_a$ "расщепляются" на таковые для операторов U_s и T_a по отдельности. Именно, мы получаем

9. СЛЕДСТВИЕ. 1) Оператор $T = U_s \oplus T_a$ рефлексивен, бирефлексивен, гиперрефлексивен или удовлетворяет $(\mathcal{D}CP)$ если и только если соответствующим свойством обладает оператор T_a.

2) $T \in (CC) \Longleftrightarrow T_a \in (CC)$ и $\mu_{U_s} \le 1$. ●

3.3. Разложение коммутанта для сжатий класса $C_{00} \oplus C_{11}$

10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть H_0, H_1 – гильбертовы пространства, $T_0 \in \mathcal{B}(H_0)$, $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$. Если $T_0 \in C_{00}$, $T_1 \in C_{11}$, то $\{T_0 \oplus T_1\}' = \{T_0\}' \oplus \{T_1\}'$ (и, следовательно, имеют место равенства (E4)-(E9)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X : H_0 \to H_1$ – сплетение для операторов T_0 и $T_1 : XT_0 = T_1 X$. Очевидно, для любого вектора $h_0 \in H_0$, $T_1^n X h_0 = X T_0^n h_0 \to 0$, откуда $X h_0 \to 0$. Поэтому $X = 0$. Переходя к сопряженным операторам, убеждаемся, что ненулевые сплетения Y, $T_0 Y = Y T_1$, также отсутствуют. Остается воспользоваться замечанием 3.

КОММЕНТАРИИ

Большая часть результатов этого параграфа была опубликована в работе Дж.Конвея и П.Ю.Ву [9] . Предложения 2 и 5 были недавно дополнены М.Заяцем [31] , исследовавшим на разложимость алгебры $\mathrm{Alg\,Lat}'(T_1 \oplus T_2)$, $\mathrm{Alg\,Lat}''(T_1 \oplus T_2)$ и решетку $\mathrm{Lat}''(T_1 \oplus T_2)$, не анализировавшиеся упомянутыми авторами. Надо отметить, что предлагаемый здесь подход (основанный на многократном применении предложения 1) значительно сокращает и упрощает доказательства этих результатов.

§ 4. Псевдоподобие операторов

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы будем говорить, что оператор A порождает (коммутативную WOT-замкнутую) алгебру $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$, если $A \in \mathcal{A}$, и наименьший содержащий его (WOT-замкнутый) идеал в алгебре $\mathcal{A}$ совпадает с $\mathcal{A}$.

2. ЗАМЕЧАНИЕ. Каждый порождающий коммутативную алгебру $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ оператор A является деформацией.

В самом деле, если $Ah = 0$, то $A'Ah = 0$ для любого оператора $A' \in \mathcal{A}$, и аппроксимируя в слабой операторной топологии тождественный оператор I операторами вида $A'A$, получим $h = Ih = 0$. Поэтому $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ и, аналогично, $\overline{\mathrm{Range}\, A} = H$.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Операторы $T_1 \in \mathcal{B}(H)$, $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$ называются псевдоподобными, если существуют такие ограниченные операторы $X : H_1 \to H_2$, $Y : H_2 \to H_1$, что

1) $XT_1 = T_2 X$, $YT_2 = T_1 Y$,

2) оператор YX порождает алгебру $\mathrm{Alg}\, T_1$,

3) оператор XY порождает алгебру $\mathrm{Alg}\,T_2$.

Отношение псевдоподобия для операторов T_1 и T_2 мы будем обозначать $T_1 \simeq T_2$; если надо подчеркнуть, какими сплетениями оно осуществляется, мы пишем $T_1 \underset{X,Y}{\simeq} T_2$.

Из свойств 2),3) и замечания 2 сразу следует, что операторы X, Y являются деформациями. Кроме того, если они взаимно обратны, то условия 2) и 3) выполняются автоматически, а условие I) означает подобие операторов T_1 и T_2. Таким образом,

$$T_1 \approx T_2 \Rightarrow T_1 \simeq T_2 \Rightarrow T_1 \sim T_2 .$$

Легко проверяется, что псевдоподобие является отношением эквивалентности.

Одним из важных частных случаев псевдоподобия является квазиподобие сжатий класса C^{ac} со следующим условием на сплетения X и Y : существует внешняя функция σ, $\sigma \in H^\infty$ такая, что $XY = \sigma(T_2)$ (и, следовательно, $YX = \sigma(T_1)$). Выполнение всех требований определения 3 в этом случае очевидно.

4. ЛЕММА. Пусть $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$, $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$, X и Y - сплетающие операторы ($XT_1 = T_2X$, $T_1Y = YT_2$) . Тогда

I) если $A \in \{T_2\}'$, то $YAX \in \{T_1\}'$,

2) если $A \in \{T_2\}''$, $YX \in \{T_1\}''$, $\overline{YH_2} = H_1$, то $YAX \in \{T_1\}''$,

3) если $A \in \mathrm{Alg}\,T_2$, $YX \in \mathrm{Alg}\,T_1$, то $YAX \in \mathrm{Alg}\,T_1$.

Пусть $\mathcal{A}(T)$ означает $\{T\}'$, $\{T\}''$ или $\mathrm{Alg}\,T$, и пусть $YX \in \mathrm{Alg}\,T_1$ и оператор XY порождает алгебру $\mathrm{Alg}\,T_2$.

4) Если $L \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}(T_1)$, то $\overline{XL} \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}(T_2)$

5) Если $A \in \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}(T_2)$, то $YAX \in \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\,\mathcal{A}(T_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Утверждение очевидно.

2) Пусть $Q \in \{T_1\}'$. Тогда $Q(YAX)Y = QYA(XY) = Q(YX)YA = Y(XQY)A = (YAX)QY$. Остается заметить, что оператор Y имеет плотный образ.

3) Очевидно, для любого полинома p оператор $Yp(T_2)X = p(T_1)YX$ принадлежит $\mathrm{Alg}\,T_1$. Пусть $\{p_\lambda\}$ - направленность полиномов, $p_\lambda(T_2) \xrightarrow{WOT} A$. Тогда $Yp_\lambda(T_2)X \xrightarrow{WOT} YAX$, и, значит, $YAX \in \mathrm{Alg}\,T_1$

4) Пусть $L \in \mathrm{Lat}\,\mathcal{A}(T_1)$ и $YX \in \mathrm{Alg}\,T_1$. Ввиду I)-3), для любого оператора $A \in \mathcal{A}(T_2)$ имеем $YAX \in \mathcal{A}(T_1)$. Следовательно, $YAXL \subset L$, откуда $XYA\overline{XL} \subset \overline{XL}$.

Множество $\mathcal{J}_L = \{ Q \in \mathrm{Alg}\, T_2 : QA\overline{XL} \subset \overline{XL} \}$ есть идеал в алгебре $\mathrm{Alg}\, T_2$, содержащий, согласно доказанному, оператор XY. Поэтому $\mathcal{J}_L = \mathrm{Alg}\, T_2$ и, значит, $A\overline{XL} = I_{H_2} A\overline{XL} \subset \overline{XL}$. Таким образом, мы доказали, что $\overline{XL} \in \mathrm{Lat}\, \mathcal{A}(T_2)$.

5) Пусть $A \in \mathrm{Alg}\,\mathrm{Lat}\, \mathcal{A}(T_2)$ и $L \in \mathrm{Lat}\, \mathcal{A}(T_1)$. Согласно 4), $\overline{XL} \in \mathrm{Lat}\, \mathcal{A}(T_2)$, и мы имеем $YAXL \subset YA\overline{XL} \subset \overline{YXL} \subset L$. ●

5. ТЕОРЕМА. Если $T_1 \underset{X,Y}{\widetilde{\sim}} T_2$ и $\mathcal{A}(T)$ означает одну из шести алгебр, а $\mathcal{L}(T)$ – одну из трех решеток, рассматриваемых в этой работе, то

$$\mathcal{A}(T_1) = \mathrm{WOT}\text{-}\mathrm{cl}\, \{ Y\mathcal{A}(T_2)X \},$$
$$\mathcal{L}(T_1) = \{ \overline{YL_2} : L_2 \in \mathcal{L}(T_2) \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включения $\supset$ следуют из леммы 4. Проверим обратные.

Пусть $A \in \mathcal{A}(T_1)$. По лемме 4, $XAY \in \mathcal{A}(T_2)$, и оператор $YXAYX$ принадлежит алгебре $W = \mathrm{WOT}\text{-}\mathrm{cl}\, \{Y\mathcal{A}(T_2)X\}$. Рассмотрим идеал $\mathcal{J}_A = \{ Q \in \mathrm{Alg}\, T_1 : YXAQ \in W \}$. Поскольку $YX \in \mathcal{J}_A$, то $\mathcal{J}_A = \mathrm{Alg}\, T_1$, и следовательно, $YXA \in W$. Применив этот прием еще один раз, получим $A \in W$.

Далее, пусть $L_1 \in \mathcal{L}(T_1)$. Согласно лемме 4, подпространство $L_2 = \overline{XL_1}$ принадлежит $\mathcal{L}(T_2)$. Покажем, что $L_1 = \overline{YL_2}$. Действительно, по свойству псевдоподобия существует направленность полиномов $\{p_\lambda\}$ такая, что $YXp_\lambda(T_1) \xrightarrow{\mathrm{WOT}} I$. Имеем

$$L_1 = IL_1 \subset \bigvee_\lambda \overline{YXp_\lambda(T_1)L_1} \subset \overline{YXL_1} = \overline{YL_2}.$$

Обратное включение ($L_1 \supset \overline{YL_2}$) очевидно.

6. СЛЕДСТВИЕ. Если $T_1 \underset{X,Y}{\widetilde{\sim}} T_2$, то $\mathrm{Lat}\, T_1 \cong \mathrm{Lat}\, T_2$, $\mathrm{Lat}' T_1 \cong \mathrm{Lat}' T_2$, $\mathrm{Lat}'' T_1 \cong \mathrm{Lat}'' T_2$, и указанные изоморфизмы решеток осуществляются преобразованиями $L_1 \mapsto \overline{XL_1}$, $L_2 \mapsto \overline{YL_2}$. При этом, $T_1 | L_1 \underset{X|L_1, Y|\overline{XL_1}}{\widetilde{\sim}} T_2 | \overline{XL_1}$. ●

7. СЛЕДСТВИЕ. Если $\mathcal{A}_1(T)$, $\mathcal{A}_2(T)$ – две из шести алгебр, а $\mathcal{L}_1(T)$, $\mathcal{L}_2(T)$ – две из трех решеток, и операторы T_1 и T_2 псевдоподобны, то

$$\mathcal{A}_1(T_1) = \mathcal{A}_2(T_1) \Longleftrightarrow \mathcal{A}_1(T_2) = \mathcal{A}_2(T_2),$$
$$\mathcal{L}_1(T_1) = \mathcal{L}_2(T_1) \Longleftrightarrow \mathcal{L}_1(T_2) = \mathcal{L}_2(T_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть псевдоподобие осуществляется сплетениями X и Y. По теореме 5, если $\mathcal{A}_1(T_2)=\mathcal{A}_2(T_2)$, то

$$\mathcal{A}_1(T_1)=\mathrm{WOT}\text{-}cl\{Y\mathcal{A}_1(T_2)X\}=\mathrm{WOT}\text{-}cl\{Y\mathcal{A}_2(T_2)X\}=\mathcal{A}_2(T_1),$$

и если $\mathcal{L}_1(T_2)=\mathcal{L}_2(T_2)$, то

$$\mathcal{L}_1(T_1)=\{\overline{YL_2}:L_2\in\mathcal{L}_1(T_2)\}=\{\overline{YL_2}:L_2\in\mathcal{L}_2(T_2)\}=\mathcal{L}_2(T_1).\ \bullet$$

Возможности техники псевдоподобия, предоставляемые утверждениями 5–7 позволяют ответить на многие вопросы об алгебрах и решетках. Прежде чем перейти к примерам и приложениям (которые посвящены сжимающим операторам),подчеркнем, что,применяя эту технику только для сжатий, мы на самом деле значительно суживаем область ее применимости. Учитывая сказанное, результаты об общих свойствах псевдоподобия мы будем формулировать с минимумом ограничений (в частности, не предполагать операторы сжатиями). Первым таким результатом является (важная!) лемма 9.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Alg -функцией мы будем называть произвольную направленность $\varphi=\{p_\lambda\}$ полиномов. Если $T\in\mathcal{B}(H)$, $\varphi=\{p_\lambda\}$ - некоторая Alg -функция и существует предел $Q=\mathrm{WOT}-\lim p_\lambda(T)$ в алгебре $\mathcal{B}(H)$, то мы говорим, что оператор Q есть Alg -функция φ от оператора T, и обозначаем $Q=\varphi(T)$.

Такое название обусловлено тем простым фактом, что алгебра $Alg\,T$ для любого ограниченного оператора T в точности совпадает с множеством всех Alg -функций от него.

9. ЛЕММА. Пусть $T\in\mathcal{B}(H)$, $H_0\in\mathrm{Lat}\,T$, $H_1=H\ominus H_0$, $\begin{bmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1\end{bmatrix}$ - матрица оператора T относительно разложения $H_0\oplus H_1$ пространства H и $V\in\mathcal{B}(K)$. Если выполняются следующие условия

1) $T_1\overset{ps}{\simeq}V$. Пусть псевдоподобие осуществляется сплетениями $X_1:H_1\to K$, $Y_1:K\to H_1$

2) Существует Alg -функция φ такая, что $Y_1X_1=\varphi(T_1)$ и существуют операторы $\varphi(T)$ и $\varphi(V)$, порождающие, соответственно, алгебры $Alg\,T$ и $Alg\,V$.

3) Существует оператор $Y:K\to H$ такой, что $TY=YV$ и $P_{H_1}Y=Y_1$, то операторы T, $T_0\oplus V$ и $T_0\oplus T_1$ псевдоподобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва отметим, что существование оператора $\varphi(T)$ влечет существование операторов $\varphi(T_0)$ и $\varphi(T_1)$ (так как $p(T)=\begin{bmatrix} p(T_0) & * \\ 0 & p(T_1)\end{bmatrix}$ для любого полинома p), и, следовательно существование операторов $\varphi(T_0\oplus T_1)=\varphi(T_0)\oplus\varphi(T_1)$ и $\varphi(T_0\oplus V)=\varphi(T_0)\oplus\varphi(V)$. Аналогично показывается, что эти операторы порождают соответствующие алгебры $Alg(T_0 \oplus T_1)$, $Alg(T_0 \oplus V)$.

Далее, пусть $\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} B_0 & B_{01} \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$ – матрицы операторов Y и $\varphi(T)$ соответственно. Из равенств $TY = YV$, $XT_1 = VX_1$ и $Y_1 X_1 = \varphi(T_1)$ следует, что

$$\mathfrak{X}_1 (T_0 \oplus V) = T \mathfrak{X}_1, \quad \mathfrak{X}_2 (T_0 \oplus T_1) = (T_0 \oplus V)\mathfrak{X}_2 \quad \text{и} \quad B_1 = Y_1 X_1,$$

где

$$\mathfrak{X}_1 = \begin{bmatrix} I & Y_0 \\ 0 & Y_1 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{X}_2 = I \oplus X_1 .$$

Кроме того, непосредственным вычислением (с учетом матричного равенства $T\varphi(T) = \varphi(T)T$) проверяется равенство $\mathfrak{X}_3 T = (T_0 \oplus T_1)\mathfrak{X}_3$, где $\mathfrak{X}_3 = \begin{bmatrix} B_0 & B_{01} - Y_0 X_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Произведение сплетающих операторов равно

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3 = \begin{bmatrix} I & Y_0 \\ 0 & Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 & B_{01} - Y_0 X_1 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y_0 X_1 \\ 0 & Y_1 X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 & B_{01} - Y_0 X_1 \\ 0 & I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_0 & B_{01} \\ 0 & Y_1 X_1 \end{bmatrix} = \varphi(T),$$

и, значит, операторы $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3$ сплетают операторы T и $T_0 \oplus V$, а операторы $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ сплетают операторы T и $T_0 \oplus T_1$. Очевидно, $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ суть деформации. Поэтому равенства $\mathfrak{X}_1 (\mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3 \mathfrak{X}_1) = \varphi(T)\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1 \varphi(T_0 \oplus V)$ и $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 (\mathfrak{X}_3 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2) = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \varphi(T_0 \oplus T_1)$ влекут $(\mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}_3)\mathfrak{X}_1 = \varphi(T_0 \oplus V)$, $\mathfrak{X}_3 (\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2) = \varphi(T_0 \oplus T_1)$.

Напомним, что операторы $\varphi(T), \varphi(T_0 \oplus V)$ $\varphi(T_0 \oplus T_1)$ порождают соответствующие алгебры, и, таким образом, нами доказано $T \simeq T_0 \oplus V$ и $T \simeq T_0 \oplus T_1$. ●

10. ЗАМЕЧАНИЕ. Если условие 1) леммы 9 заменить на условие $T_1 \approx T_2$, то условие 2) будет выполнено автоматически (положить $\varphi \equiv 1$). Повторяя доказательство леммы в этом случае получим, что операторы $T, T_0 \oplus T_1$ и $T_0 \oplus V$ подобны.

11. ТЕОРЕМА. Сжатие T класса C_0 с конечной кратностью спектра псевдоподобно своей жордановой модели.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале мы рассмотрим случай, когда спектр оператора T прост (т.е. $\mu_T = 1$). По теореме 1.1 о жордановой модели, имеем $T \sim M_{m_T}$, где m_T – минимальный аннулятор сжатия T. Пусть это квазиподобие осуществляют операторы X и Y. Поскольку, по теореме Сарасона (см.[2], стр.230), $\{M_{m_T}\}' = H^\infty(M_{m_T})$ и $XY \in \{M_{m_T}\}$, то существует функция $\varphi \in H^\infty$,

$XY=\varphi(M_{m_T})$. Ясно, что $\varphi\wedge m_T=1$ (символ $\wedge$ означает операцию взятия наибольшего общего внутреннего делителя), и, следовательно, операторы $\varphi(M_{m_T})$ и $m_T(M_{m_T})=\mathbb{O}$ не лежат в одном нетривиальном идеале алгебры $Alg\, M_{m_T}$. Значит, оператор $XY=\varphi(M_{m_T})$ порождает алгебру $Alg\, M_{m_T}$. Отсюда сразу получается и аналогичное утверждение для оператора YX; надо лишь заметить, что $X(YX)=\varphi(M_{m_T})X=X\varphi(T)$, откуда $YX=\varphi(T)$.

Пусть теперь $\mu_T\geqslant 2$. Из рассмотрения жордановой модели следует, что существуют инвариантные подпространства H_0, H_1' оператора T такие, что $m_{T|H_1'}=m_T$, $\mu_{T|H_0}=\mu_T-1$, $H_0\cap H_1'=\{0\}$, $H_0\vee H_1'=H$. Положим $H_1=H\ominus H_0$, и пусть $\begin{bmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}$ – триангуляция оператора T относительно разложения $H=H_0\oplus H_1$. Поскольку

$$T_1(P_{H_1}|H_1')=P_{H_1}TP_{H_1}|H_1'=P_{H_1}T|H_1'=(P_{H_1}|H_1')T|H_1'$$

и оператор $P_{H_1}|H_1'$ является деформацией, получаем соотношение $T|H_1'\prec T_1$. Согласно предложению I.II, отсюда вытекает квазиподобие $T_1\sim T|H_1'$. Кроме того, очевидно, $T|H_1'\sim M_{m_T}$. Следовательно, существуют деформации $Y: K_{m_T}\to H_1'$, $TY=YM_{m_T}$, и $X_1: H_1\to K_{m_T}$, $X_1T_1=M_{m_T}X_1$. Положим $Y_1=P_{H_1}Y$. Ясно, что $T_1\underset{X_1,Y_1}{\sim} M_{m_T}$, и даже, ввиду простоты спектра, $T_1\underset{X_1,Y_1}{\simeq} M_{m_T}$.

Таким образом, в лемме 9 выполняются условия 1) и 3). Проверим условие 2). Поскольку $Y_1X_1\in\{M_{m_T}\}'=H^\infty(M_{m_T})$, то $Y_1X_1=\varphi(M_{m_T})$ для некоторого $\varphi\in H^\infty$. Очевидно, $m_T\wedge\varphi=1$, и, значит, идеал в алгебре H^∞, порожденный функциями m_T и φ, совпадает с ней. Отсюда вытекает условие 2). Согласно лемме 9, мы имеем псевдоподобие $T\simeq M_{m_T}\oplus T_0$. При этом, $\mu_{T_0}=\mu_T-1$.

Последовательное применение этого приема возможно, если на каждом шаге удается построить функцию φ взаимно простой с функцией m_T. Это обеспечивается следующей леммой.

12. ЛЕММА. Пусть m_0, m – внутренние функции, $m_0|m$, $\varphi\in H^\infty$, $\varphi\wedge m_0=1$. Тогда существует функция h, $h\in H^\infty$ такая, что $(\varphi+m_0h)\wedge m=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Положим $\varphi_\lambda=(\varphi+\lambda m_0)\wedge m$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Ясно, что все функции φ_λ попарно взаимно просты и являются делителями m. Поскольку их несчетное число, существует $\lambda\in\mathbb{C}$, для которого $\varphi_\lambda\equiv 1$. ●●

Как уже отмечалось ранее, важные примеры псевдоподобия получаются в случае, когда произведения сплетающих операторов суть внешние функции от исходных. Широкий класс таких примеров дает теорема I4.

I3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $T \in C_{1*}$, X_* – (инъективное) сплетение оператора T с его $*$ – остаточной частью U_*: $X_* = \tau_*^* | H$, $X_* T = U_* X_*$. Оператор $V_* = U_* | K_*$, где $K_* = \mathrm{Range}\, X_*$, называется канонической изометрией сжатия T.

Отметим очевидное соотношение $T \prec V_*$.

I4. ТЕОРЕМА. I) Если характеристическая функция $\theta = \theta_T$ сжатия T имеет внешнее левое скалярное кратное (отметим, что отсюда следует $T \in C_{1*}$), то оператор T псевдоподобен своей канонической изометрии.

2) Пусть T –сжатие, $\begin{bmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}$ – некоторая его триангуляция; $\theta_T = \theta_1 \theta_0$ – соответствующая регулярная факторизация его характеристической функции. Если функция θ_1 имеет внешнее левое скалярное кратное, и V_* – каноническая изометрия оператора T_1, то операторы T, $T_0 \oplus T_1$, $T_0 \oplus V_*$ псевдоподобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Пусть $X_1 = X_* = \tau_* \tau_*^* | H$,

$V_* : K_* \longrightarrow K_*$ – каноническая изометрия оператора T, и пусть $\Omega \in H^\infty(E_* \to E)$, $\Omega\theta = \delta I$, δ – внешняя функция класса H^∞. Определим оператор $Q : K_* \longrightarrow \mathcal{H}$ равенством $Q = (\tau_* \delta \tau_*^* - \pi\Omega\pi_*^*) | K_*$. Поскольку

$$Q X_1 = (\tau_* \delta \tau_*^* - \pi\Omega \Delta_* \tau_*^*) | H = [\tau_* \delta \tau_*^* - \pi\Omega(\pi_*^* - \theta\pi^*)] | H =$$
$$= (\delta(\mathcal{U}) - \pi\Omega\pi_*^*) | H,$$

делаем вывод, что образ оператора Q содержится в пространстве $H \oplus G$ минимальной изометрической дилатации оператора T, и что оператор $Y_1 = P_H Q$ удовлетворяет соотношению

$$Y_1 X_1 = P_H Q X_1 = \delta(T).$$

Так как оператор $X_1 : H \longrightarrow K_*$ есть деформация,

$$X_1 T = V_* X_1, \quad (X_1 Y_1) X_1 = X_1 \delta(T) = \delta(V_*) X_1,$$
$$(T Y_1) X_1 = T\delta(T) = Y_1 X_1 T = (Y_1 V_*) X_1$$

и функция δ – внешняя, получаем $T \underset{X_1, Y_1}{\approx} V_*$.

2) Используем обозначения доказательства части I) для оператора T_1, поместив пространство $H_1 \oplus G_1$ его изометрической

дилатации в пространство $H \oplus G$ изометрической дилатации оператора T. Положим $Y = P_H Q$, $Y_1 = P_{H_1} Q$. Очевидно, $(TY)X_1 = T\delta(T) = (YV_*)X_1$, и мы находимся в условиях леммы 9. Применяя эту лемму, получаем утверждение теоремы. ●

15. СЛЕДСТВИЕ. 1) Если T -сжатие, и функция θ_T имеет левую обратную в пространстве $H^\infty(E_* \to E)$, то оператор T подобен изометрии.

2) Если в обозначениях части 2) теоремы 14 функция θ_1 обратима слева, то операторы $T, T_0 \oplus T_1$ и $T_0 \oplus V$ подобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо положить в теореме 14 и ее доказательстве скалярное кратное δ тождественно равным 1. ●

Покажем, что приведенные в теореме 14 достаточные условия псевдоподобия при некоторых дополнительных ограничениях являются и необходимыми.

16. ЛЕММА. Пусть T -сжимающий, а V - изометрический операторы в пространствах H и K, и существуют сплетения $X: H \to K$, $XT = VX$, $Y: K \to H$, $TY = YV$, такие, что $YX = \delta(T)$, $\delta \in H^\infty$. Тогда функция δ является левым скалярным кратным для оператор-функции θ_T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y^+: K \to H \oplus G$ - подъем оператора Y в пространство $H \oplus G$ минимальной изометрической дилатации $\mathcal{U}^+$ оператора T (то есть $\mathcal{U}^+Y^+ = Y^+V$, $Y = P_H Y^+$; существование такого оператора Y^+ обеспечивает [1], предложение II.2.2), и пусть оператор $X^+: H \oplus G \to K$ задан равенством $X^+ = XP_H$. Очевидно,

$$X^+\mathcal{U}^+ = XP_H \mathcal{U}^+ = XTP_H = VXP_H = VX^+.$$

Положим

$$\mathcal{F} = \delta(\mathcal{U}^+) - Y^+X^+, \quad F = P_H \mathcal{F} | H.$$

Из условия $YX = \delta(T)$ получаем

$$F = P_H \delta(\mathcal{U}^+)|H - P_H Y^+ X^+ P_H | H = \delta(T) - YX = \mathbb{O}.$$

Ввиду предложения 3.5 из [5], отсюда следует существование функции $\Omega \in H^\infty(E_* \to E)$ такой, что $\mathcal{F} = \pi\Omega\pi_*^*$. Если $f \in H^2(E)$, то

$$\Omega\theta f = \pi^*\pi\Omega\pi_*^* f = \pi^*\mathcal{F}\pi f = \pi^*\delta(\mathcal{U}^+)\pi f = \delta f.$$

Поэтому $\Omega\theta = \delta I$. ●

Полагая $\delta \equiv 1$ и объединяя с утверждением 1) следствия 15, получаем следующий результат.

I7. ТЕОРЕМА. Сжатие подобно изометрии если и только если его характеристическая функция обратима слева. ●

I8. СЛЕДСТВИЕ. Сжатие подобно унитарному оператору если и только если его характеристическая функция обратима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении теоремы I7 к самому сжатию и к его сопряженному. ●

I9. СЛЕДСТВИЕ. Каждый абсолютно непрерывный унитарный оператор подобен некоторому в.н.у. сжатию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По спектральной теореме абсолютно непрерывный унитарный оператор унитарно эквивалентен некоторому оператору умножения на независимую переменную в пространстве $\sum_\alpha \oplus L^2(e_\alpha)$, где e_α – измеримые подмножества окружности $\mathbb{T}$. Для каждого α построим скалярную внешнюю функцию δ_α, модуль которой равен $1/2$ на множестве e_α и 1 вне этого множества. Положим $\theta = \sum_\alpha \oplus \delta_\alpha$. По следствию I8, сжатие T с характеристической функцией θ подобно некоторому унитарному оператору. Остается заметить, что этот унитарный оператор унитарно эквивалентен исходному, и что сжатое T вполне не унитарно. ●

20. ТЕОРЕМА. Сжатие T подобно прямой сумме изометрии V и сжатия класса C_{0*} если и только если $*$ – внешний сомножитель θ_1 в $*$-канонической факторизации $\theta_T = \theta_1\theta_0$ обратим слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T \approx Q_0 \oplus V$, где V – изометрия, а θ_0 – сжатие класса C_{0*}, и пусть $\begin{bmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}$ – $*$– каноническая триангуляция оператора T. Ясно, что $T_1 \approx V$, и, значит, его характеристическая функция θ_{T_1} обратима слева.

Обратная импликация вытекает из утверждения 2) следствия I5. ●

2I. ЛЕММА. Пусть T – сжатие класса C_{10}, $\mu_T < \infty$. Следующие утверждения эквивалентны.

I) Оператор T квазиподобен (канонической) изометрии.

2) $T \overset{d}{\hookrightarrow} V^*$, где V – некоторый оператор одностороннего сдвига.

3) Функция θ_T имеет внешнее левое скалярное кратное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Longrightarrow$ 2). Поскольку при квазиподобии класс C_{10} сохраняется (см. лемму I.3), то оператор T квазиподобен изометрии класса C_{10}, т.е. оператору одностороннего сдвига.

2) $\Longrightarrow$ 3). Из условия $T \overset{d}{\prec} V$ следует, что $\mu_V \leqslant \mu_T < \infty$. Будем считать, что V – оператор умножения на независимую пе-

ременную в пространстве $H^2(F)$, $\dim F<\infty$. Пусть $X: H \to H^2(F)$, $Y: H^2(F) \to H$ - операторы с плотными образами, сплетающие T и V. Поскольку оператор XY коммутирует с V и отображает пространство $H^2(F)$ на плотное подпространство, он задается внешней оператор-функцией класса $H^\infty(F \to F)$. Пусть δ - определитель матрицы этой функции (в некотором базисе), Z - оператор, определяемый алгебраически сопряженной матрицей. Тогда $XYZ=\delta(V)$. Функция δ является внешней (см. [I], §У.6). Положим $Y'=YZ$. Мы имеем $XT=VX$, $XY'=\delta(V)$ и, поскольку $XTY'=VXY'=V\delta(V)=XY'V$, то и $TY'=Y'V$. По лемме I6 заключаем, что внешняя функция δ является левым скалярным кратным функции θ_T.

3)$\Longrightarrow$I). Следует из утверждения I) теоремы I4. ●

22. ЛЕММА. Для того, чтобы сжатие T, имеющее хотя бы один конечный дефектный индекс, было квазиподобно изометрии, необходимо и достаточно чтобы функция θ_T имела внешнее левое скалярное кратное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ДОСТАТОЧНОСТЬ была доказана в теореме I4.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть V - изометрия и $T \underset{X,Y}{\sim} V$. По лемме I.3, $T\in C_{1*}$. Для таких сжатий $d_T<d_{T^*}$, и, по условию, $d_T=\dim E<\infty$. Рассмотрим триангуляцию $\begin{bmatrix} T_1 & * \\ 0 & T_0 \end{bmatrix}$ оператора T по типу $\begin{bmatrix} C_{*1} & * \\ 0 & C_{*0} \end{bmatrix}$ и соответствующую (каноническую) факторизацию $\theta_T=\theta_0\theta_1$. Поскольку $T_1\in C_{11}$ функция $\theta_1\in H^\infty(E\to F)$ - двусторонне внешняя. Поэтому $\dim F=\dim E<\infty$, и операторная функция θ_1 обладает внешним скалярным кратным $\delta_1=\det\theta_1$: $\Omega_1\theta_1=\delta_1 I$, $\Omega_1\in H^\infty(F\to E)$.

Далее, пусть $V=V_1\oplus V_0$ - разложение Вольда, V_1 - унитарный оператор, V_0-односторонний сдвиг. Равенства $XT=VX$, $TY=YV$ приводят к соотношению $T_0 \overset{d}{\prec} V_0$. (В самом деле, равенство

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{10} \\ X_{01} & X_{00} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 & * \\ 0 & T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{10} \\ X_{01} & X_{00} \end{bmatrix},$$

(откуда $X_{01}T_1=V_0X_{01}$) и условия $T_1\in C_{*1}$, $V_0\in C_{*0}$ влекут $X_{01}=\mathbb{O}$; поэтому $X_{00}T_0=V_0X_{00}$ и оператор X_{00} имеет плотный образ. Аналогично проверяется соотношение $V_0 \overset{d}{\prec} T_0$). По лемме 2I отсюда вытекает существование внешнего левого скалярного кратного δ_0 для функции θ_0. Пусть $\Omega_0\in H^\infty(E_*\to F)$, $\Omega_0\theta_0=\delta_0 I$ и пусть $\Omega=\Omega_0\Omega_1$. Равенство $\Omega\theta=$

$= \Omega_0 \Omega_1 \theta_1 \theta_\theta = \delta_0 \delta_1 I$ завершает доказательство. ●

Полученные результаты объединяются в следующую теорему.

23. ТЕОРЕМА. Пусть T -сжатие с хотя бы одним конечным дефектным индексом или сжатие класса C_{*0} с конечной кратностью спектра.

1) Сжатие T квазиподобно изометрии если и только если функция θ_T имеет внешнее левое скалярное кратное.

2) Сжатие T квазиподобно прямой сумме изометрии и сжатия класса C_{*0}, если и только если $*$ -внешний сомножитель θ_1 в $*$ -канонической факторизации $\theta_T = \theta_1 \theta_0$ имеет внешнее левое скалярное кратное.

В обоих случаях рассматриваемые операторы при этом псевдоподобны. ●

КОММЕНТАРИИ.

Неявно техника псевдоподобия появилась в работах П.Ю.Ву (см. например, [30]) при обсуждении вопросов совпадения алгебр, порожденных сжатием. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы сжатие было подобно некоторой изометрии (теорема 17) получено Б.Секефальви-Надем и Ч.Фойяшем [12] . Вопрос о квазиподобии сжатия и изометрии рассматривался П.Ю.Ву в статье [27] . Частным случаем теоремы 23 является вопрос о квазиподобии сжатия класса C_{*0} своей так называемой жордановой модели (см. [29]).

§ 5. О свойстве бикоммутанта и коммутативности коммутанта

1. ОПРЕДЕЛИМ для линейных операторов отношение порядка $\prec$: $T_1 \prec T_2$, если

1) существует оператор $X: H_2 \to H_1$ с плотным образом, такой, что $XT_2 = T_1 X$.

2) существует семейство операторов $\{Y_\alpha\}$ такое, что $T_2 Y_\alpha = Y_\alpha T_1$ при всех α, и $\bigvee_\alpha \overline{Range\, Y_\alpha} = H_2$,

3) семейство операторов $\{XY_\alpha\}$ лежит в алгебре $Alg\, T_1$ и порожденный им идеал совпадает с ней,

4) существует (WOT -непрерывный) гомоморфизм $Alg\, T_1 \to Alg\, T_2$, переводящий I_{H_1} в I_{H_2}, и T_1 в T_2 .

2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $T \in C^{ac}$ и существует ненулевой оператор X такой, что $XT = SX$, где S - простой односторонний сдвиг. Тогда $S \prec T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности можно считать, что оператор X имеет плотный образ. (В самом деле, $\overline{XH} \in Lat\, S$, и, значит, $\overline{XH} = \vartheta H^2$ для некоторой внутренней функции ϑ. Замена оператора X на $\vartheta^{-1}X$ даст нам сплетение с плотным образом.) Из следствия I.6 вытекает $S \overset{cd}{\prec} T$. Обозначим соответствующее семейство сплетений $\{Y_\alpha\}$. Поскольку $XY_\alpha \in \{S\}' = H^\infty(S)$, получаем $XY_\alpha = \varphi_\alpha(S)$, $\varphi_\alpha \in H^\infty$. Из соотношения $\bigvee_\alpha \overline{Range\, XY_\alpha} = H^2$ вытекает, что наибольший общий делитель функций φ_α равен I, и поэтому выполняется 3). Наконец, гомоморфизм из условия 4) определяется H^∞-исчислением оператора T.

3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $T \in C_0$, m – минимальная функция оператора T. Тогда $M_m \prec T$.

В самом деле, первые два свойства следуют из рассмотрения жордановой модели оператора T. Свойства 3), 4) проверяются так же, как в предложении 2. ●

4. ТЕОРЕМА. Пусть $T_1 \prec T_2$, $\{T_1\}'' = Alg\, T_1$. Тогда $\{T_2\}'' = Alg\, T_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{Q}$ обозначает образ оператора Q при гомоморфизме из определения порядка $\prec$. Если $A \in \{T_2\}''$, то, по лемме 4.4, $XAY_\alpha \in \{T_1\}'' = Alg\, T_1$ при всех α. Из равенства

$$(\widetilde{XAY_\alpha})Y_\beta = Y_\beta XAY_\alpha = AY_\beta XY_\alpha = A\widetilde{XY_\alpha}\, Y_\beta$$

следует, что $A\widetilde{XY_\alpha} = \widetilde{XAY_\alpha} \in Alg\, T_2$. Но вместе с операторами $A\widetilde{XY_\alpha}$ алгебра $Alg\, T_2$ содержит и все операторы вида $A\widetilde{C}$, где оператор C принадлежит идеалу, порожденному операторами XY_α, то есть всей алгебре $Alg\, T_1$. Значит $A = A\widetilde{I} \in Alg\, T_2$. ●

5. ТЕОРЕМА. Пусть $T_1 \prec T_2$, $\{T_1\}'' = \{T_1\}'$. Тогда следующие условия равносильны:

I) $\{T_2\}'' = \{T_2\}'$.

2) Оператор X из определения порядка $\prec$ является деформацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Longrightarrow$ 2). Так как $Y_\alpha X \in \{T_2\}' = \{T_2\}''$ при всех α, то

$$(Y_\alpha X)(Y_\beta X) = (Y_\beta X)(Y_\alpha X) = Y_\beta (XY_\alpha)X = \widetilde{XY_\alpha}\, Y_\beta X,$$

и, поскольку $\bigvee_\beta Range(Y_\beta X) = H_2$, получаем $Y_\alpha X = \widetilde{XY_\alpha}$. Теперь, если $Xh = 0$ ($h \in H_2$), то $\widetilde{XY_\alpha}\, h = 0$ при всех α. Из условий 3) и 4) определения порядка $\prec$ следует, что $h = 0$.

2) $\Longrightarrow$ I). Из равенства $X\widetilde{XY_\alpha} = XY_\alpha X$ следует, что $Y_\alpha X = \widetilde{XY_\alpha} \in Alg\, T_2 \subset \{T_2\}''$. Пусть $A \in \{T_2\}'$. Из соотноше-

ний $XAY_\alpha \in \{T_1\}' = \{T_1\}''$ по лемме 5.4 получаем, что при любом β : $Y_\beta(XAY_\alpha)X \in \{T_2\}''$. Но $Y_\beta XAY_\alpha X = \widetilde{XY_\beta}\,\widetilde{AXY_\alpha}$, и, учитывая свойства 3) и 4) отношения порядка $\prec$, заключаем, что $A \in \{T_2\}''$. ●

Предложения 2,3 и теоремы 4,5 позволяют получить ряд важных результатов. Введем, следуя [I], класс N_T, состоящий из всех функций f ограниченной характеристики, представимых в виде $f = \varphi/w$, где $\varphi, w \in H^\infty$ – такие функции, что оператор $w(T)$ является деформацией и оператор $\varphi(T)\,w(T)^{-1}$ ограничен. Для такой функции f мы полагаем $f(T) = \varphi(T)\,w(T)^{-1}$. Ясно, что $N_T(T) \subset \{T\}''$.

6. ТЕОРЕМА. Если $T \in C_0$, то

I) $\{T\}'' = Alg\,T = N_T(T)$,

2) $\{T\}' = \{T\}'' \Longleftrightarrow \mu_T = 1$.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем полезную лемму.

7. ЛЕММА. Пусть $T_1 \in \mathcal{B}(H_1)$, $T_2 \in \mathcal{B}(H_2)$, $T_1 \overset{cd}{\prec} T_2$. Если g – непрерывный гомоморфизм алгебры $Alg\,T_2$ в алгебру $Alg\,T_1$ такой, что $g(T_2) = T_1$, $g(I_{H_2}) = I_{H_1}$, то $Ker\,g = \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{X_\alpha\}$ – семейство операторов, осуществляющее отношение $T_1 \overset{cd}{\prec} T_2$, и пусть $g(A_2) = 0$ для некоторого $A_2 \in Alg\,T_2$. Рассмотрим направленность $\{p_\lambda\}$ полиномов такую, что $p_\lambda(T_2) \xrightarrow{WOT} A_2$. Тогда $p_\lambda(T_1) = g(p_\lambda(T_2)) \xrightarrow{WOT} g(A_2) = 0$. Поэтому, для любого индекса α, $p_\lambda(T_2)X_\alpha = X_\alpha p_\lambda(T_1) \xrightarrow{WOT} 0$, откуда $A_2 | \overline{Range\,X_\alpha} = 0$. Остается заметить, что $\bigvee_\alpha Range\,X_\alpha = H_2$. ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. I) Пусть m – минимальная функция оператора T. По теореме Сарасона $\{M_m\}' = \{M_m\}'' = Alg\,M_m = H^\infty(M_m)$. Используя предложение 3 и теорему 4 получаем $\{T\}'' = Alg\,T$. Далее, теорема I.I о жордановой модели позволяет выделить подпространство $L \subset H$ такое, что $T|L \simeq M_m$. Пусть это псевдоподобие осуществляется операторами X и Y, причем $XY = w(M_m)$, $w \in H^\infty$, $w \wedge m = 1$. Заметим, что для любого оператора $A \in Alg\,T$,

$$XA\,w(T)|L = XAYX|L \in Alg\,M_m \cdot X|L = H^\infty(M_m)\cdot X|L = XH^\infty(T)|L,$$

откуда $Aw(T)|L = \varphi(T)|L$, $\varphi \in H^\infty$. Отображение

$q : A \to A|L$ является непрерывным гомоморфизмом алгебры $\mathrm{Alg}\,T$ в алгебру $\mathrm{Alg}\,T|L$; кроме того, $T|L \hookrightarrow M_m \overset{cd}{\prec} T$. Применяя лемму 7, получаем $\mathrm{Ker}\,q = \{0\}$, и, следовательно, $A w(T) - \varphi(T) = \mathbb{O}$. Таким образом, $\{T\}'' = \mathrm{Alg}\,T = N_T(T)$.

2) Пусть $\{T\}' = \{T\}''$. По теореме 5 получаем соотношение $T \prec M_m$, откуда $M_m^* \prec T^*$, и $\mu_T = \mu_{T^*} = 1$ (см. леммы I.4 и I.7).

Обратно, пусть $\mu_T = 1$. Тогда $T \simeq M_m$, $\{M_m\}' = \{M_m\}''$, и мы получаем $\{T\}' = \{T\}''$. ●

8. СЛЕДСТВИЕ. Если $T = M_{\vec{v}}$, $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_t)$, $t < \infty$ – жорданов оператор, то $\{T\}'' = H^\infty(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что жорданов оператор T имеет такое инвариантное подпространство L , что операторы $T|L$ и M_{v_1} унитарно эквивалентны. Поэтому в доказательстве теоремы 6 можно положить $w \equiv 1$, и мы получим $\{T\}'' = H^\infty(T)$. ●

9. ТЕОРЕМА. Пусть $T \in C^{ac}$, $XT = SX$ $(X \neq \mathbb{O})$. Тогда

I) $\{T\}'' = \mathrm{Alg}\,T = H^\infty(T)$,

2) $\{T\}' = \{T\}''$ если и только если $T \in C_{10}$ и каноническая изометрия V_* оператора T есть простой односторонний сдвиг.

Для доказательства нам потребуется следующая несложная лемма.

IO. ЛЕММА. Если $T \sim S$, то $\{T\}' = H^\infty(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что условие $T \sim S$ влечет $T \in C_{10}$, $\mu_T = 1$. По лемме 4.2I, каноническая изометрия V_* оператора T квазиподобна оператору S . Более того, отсюда следует, что $V_* \in C_{10}$ и $\mu_{V_*} = 1$, то есть $V_* \cong S$. Поэтому $\{V_*\}' = H^\infty(V_*)$. Остается заметить, что отображение $\{T\}' \to \{V_*\}'$, $F \mapsto \tau_*^* \mathcal{F} \tau_*$, где $\mathcal{F}$ – подъем оператора F, $F \in \{T\}'$, инъективно, поскольку $T \in C_{1*}$; ясно, что оператор $f(T)$ переходит в оператор $f(V_*)$, $f \in H^\infty$. Следовательно, $\{T\}' = H^\infty(T)$. ●

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. I) Равенство $\{T\}'' = \mathrm{Alg}\,T$ сразу следует из предложения 2 и теоремы 4. Покажем, что $\mathrm{Alg}\,T = H^\infty(T)$.

Пусть $\{Y_\alpha\}$ – семейство сплетений, осуществляющих отношение $S \overset{cd}{\prec} T$ (см. предложение 2). Фиксируем индекс α_0 , для которого $\overline{\mathrm{Range}\,Y_{\alpha_0}} \not\subset \mathrm{Ker}\,X$, и рассмотрим подпространство $L = \overline{\mathrm{Range}\,Y_{\alpha_0}}$. Очевидно, оператор $T_0 = T|L$ сплетается с оператором S : $S \underset{Y_{\alpha_0}}{\overset{d}{\prec}} T_0$ и $(X|L)T_0 = S(X|L)$. Оператор $X_0 = X|L$ отличен от $\mathbb{O}$; не умаляя общности можно считать, что его образ плотен (см. предложение 2). Таким образом, $T_0 \underset{X_0, Y_{\alpha_0}}{\overset{d}{\sim}} S$. Поскольку $X_0 Y_{\alpha_0} \in \{S\}'$ и $\overline{\mathrm{Range}\, X_0 Y_{\alpha_0}} = H^2$, то $X_0 Y_{\alpha_0} = \delta(S)$ для некоторой внешней функции $\delta \in H^\infty$. Отсюда сразу вытекает $Y_{\alpha_0} X_0 = \delta(T_0)$, и потому $T_0 \in C_{10}$ и $T_0 \underset{X_0, Y_{\alpha_0}}{\sim} S$. Согласно лемме 10, отсюда, в частности, вытекает $\mathrm{Alg}\, T_0 = H^\infty(T_0)$. Замечая, что $T_0 \rightsquigarrow S \overset{d}{\prec} T$, и что $q: A \longmapsto A|L$ – непрерывный гомоморфизм алгебры $\mathrm{Alg}\, T$ в алгебру $\mathrm{Alg}\, T_0$, и применяя лемму 7, получим $\mathrm{Ker}\, q = \{0\}$, откуда $\mathrm{Alg}\, T = H^\infty(T)$.

2) Пусть $\{T\}' = \{T\}''$. Из теоремы 5 следует, что сплетающий оператор X можно считать деформацией; соотношение $T \prec S$, ввиду леммы 1.3, влечет $T \in C_{10}$.

Далее, согласно результатам утверждения 1), имеем $\{T\}' = H^\infty(T)$, и значит, для оператора $Y_{\alpha_0} X \in \{T\}'$ найдется функция $\varphi \in H^\infty$ такая, что $Y_{\alpha_0} X = \varphi(T)$. Имеем

$$\overline{\mathrm{Range}\, \varphi(T)} = \overline{Y_{\alpha_0} H^2} = L .$$

Пусть $\begin{bmatrix} T_0 & * \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}$ – триангуляция оператора T, соответствующая подпространству L. Ввиду (1), $\varphi(T_1) = \mathbb{O}$. Значит, $T_1 \in C_0 \subset C_{0*}$, и указанная триангуляция оператора T имеет вид $\begin{bmatrix} C_{1*} & * \\ 0 & C_{0*} \end{bmatrix}$. Регулярность соответствующей ($*$ – канонической) факторизации $\theta_T = \theta_1 \theta_0$ означает, что $\tau_* \tau_*^* = \tau_{*1} \tau_{*1}^* \oplus \tau_{*0} \tau_{*0}^* = \mathbb{O} \oplus \tau_{*0} \tau_{*0}^*$; поэтому каноническая изометрия V_* оператора T совпадает с канонической изометрией V_{*0} оператора T_0. Остается заметить, что согласно лемме 4.21, $V_{*0} \rightsquigarrow S$, а следовательно, и $V_{*0} \cong S$.

Обратно, пусть $T \in C_{10}$, $V_* \underset{W}{\cong} S$. Оператор $X: H \longrightarrow H^2$, $X = W X_*$, где $X_* = \tau_* \tau_*^* | H$, является сплетающей деформацией для операторов T и S : $XT = SX$. По теореме 5 отсюда следует $\{T\}' = \{T\}''$. ●

Следующее предложение дает примеры сжатий, сплетающихся со сдвигом.

11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $T \in C_{1*}$ и $d_T < d_{T^*} \leqslant \infty$, то существует оператор $X: H \longrightarrow H^2$, $X \neq \mathbb{O}$, такой, что $XT = SX$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что уравнение $\theta^* h = 0$ имеет ненулевое решение $h \in H^2_-(E_*)$. В самом деле, фиксируем какие-либо ортонормированные базисы $\{e_1, \dots, e_m\}$ и $\{e_{*1}, \dots, e_{*n}\}$

пространств E и E_* (здесь $m=d_T$, $n=d_{T*}\leqslant\infty$) и запишем в них матрицу оператора θ :

$$\theta \longleftrightarrow \Xi = ((\theta_{jk}))_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,m}} .$$

Поскольку θ – $*$-внешняя функция, можно (не ограничивая общности) считать, что m верхних строк матрицы Ξ определяют невырожденную матрицу. Обозначим через Ξ_ℓ (где $\ell=1,\dots,m+1$) квадратную матрицу, образованную первыми $m+1$ строками матрицы Ξ за исключением (вычеркнутой) строки с номером ℓ. Положим $h_j(z)=(-1)^j\bar{z}\ \overline{\det\Xi_j(z)}$ при $j\leqslant m+1$ и $h_j\equiv 0$ при $j>m+1$. Ясно, что функция $h=\sum h_j e_{*j}$ принадлежит $H^2_-(E_*)$, отлична от нуля, и $\theta^*h=0$.

Итак, мы доказали, что $Ker\,\theta^*\cap H^2_-(E_*)\neq\{0\}$ и, как легко показать, отсюда следует, что образ оператора $X_*=\tau_*\tau_*^*|H$ не плотен в R_*. Поэтому каноническая изометрия $V_*:K_*\to K_*$ оператора T не является унитарным оператором. Фиксируем подпространство $L_*\subset K_*$, приводящее оператор V_* и такое, что $V_*|L_*\cong S$. Пусть эта унитарная эквивалентность осуществляется оператором $W:L_*\to H^2$ и пусть P_{L_*} – ортопроектор в пространстве K_* на подпространство L_*. Оператор $X=WP_{L_*}X_*$ отличен от нулевого, и $XT=SX$. ●

12. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $T\in C_{1*}$ и $d_T<\infty$.

1) Если $T\notin C_{11}$, то $\{T\}''=Alg\,T=H^\infty(T)$.

2) $T\in(CC)$, если и только если выполняется одно из двух условий:

а) $T\in C_{11}$ и $\mu_T=1$, б) $T\in C_{10}$ и $d_{T*}-d_T=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из теоремы 9 и предложения 11.

Для доказательства 2) покажем, что для сжатий $T\in C_{10}$ таких, что $d_T<\infty$, условия $d_{T*}-d_T=1$ и $V_*\cong S$ равносильны.

Действительно, если $d_{T*}-d_T=1$, то

$$\dim\Delta_*(\xi)E_*=\dim\Delta_*(\xi)\theta(\xi)E+1=\dim\theta(\xi)\Delta(\xi)E+1=1$$

при п.в. $\xi\in\mathbb{T}$, и $*$-остаточная часть U_* оператора T имеет простой спектр. Кроме того, как показано в доказательстве предложения 11, каноническая изометрия $V_*=U_*|K_*$ оператора T не совпадает с U_*. Поэтому $V_*\cong S$.

Обратно, если $V_* \cong S$, то, очевидно, $\mu_{V_*} = 1$ и, значит, $d_{T^*} = d_T + 1$.

Теперь утверждение 2) немедленно следует из теоремы 9 и предложения II. ●

КОММЕНТАРИИ

Введение отношения порядка $\prec$ позволяет сравнительно просто получить условия выполнимости свойств $(\mathcal{D}CP)$ и (CC) для операторов класса C_0 и операторов, сплетающихся с оператором сдвига. Впервые соответствующие результаты были получены Б.Секефальви-Надем и Ч.Фояшем ([13] и [33]) для операторов класса C_0 , и Х.Берковичем (см. [6]) - свойство $(\mathcal{D}CP)$ для операторов, сплетающихся с оператором сдвига. Утверждение 2) теоремы 9 (свойство (CC) для операторов, сплетающихся с оператором сдвига) в общем виде скорее всего является новым.

Литература

1. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., 1970.
2. Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М., 1980.
3. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: ЛГУ, 1980.
4. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. Новосибирск, 1983.
5. Васюнин В.И. Две классические теоремы о модели в бескоординатном изложении. - Наст.сборник, с. 5-22.
6. Bercovici H., Takahashi K. On the reflexivity of contractions on Hilbert space - J. London Math.Soc., 1985, (2), v.32, p.149-156.
7. Bercovici H. On the Jordan model of C_0 operators. II. - Acta Sci.Math., 1980, v.42, p.43-56.
8. Bercovici H., Foias C., Sz.-Nagy B. Reflexive and hyper-reflexive operators of class C_0 . - Acta Sci.Math., 1981, v.43, p.5-13.
9. Conway J.B., Wu P.Y. The splitting of $\mathfrak{A}(T_1 \oplus T_2)$ and related questions. - Indiana Univ.Math.J., 1977, v.26, p.41-56.
10. Foias C. On the scalar parts of a decomposable operator. - Rev.Roum.Math.Pures et Appl., 1972, v.17, p.1181-1198.

11. K e r c h y L. On the residual parts of completely non-unitary contractions. - Acta Math.Acad.Sci.Hungar., to appear.
12. S z . - N a g y B., F o i a s C. On the structure of intertwining operators. - Acta Sci.Math., 1973, v.35, p.225--254.
13. S z . - N a g y B., F o i a s C. Commutants and bicommutants of operators of class C_0 . - Acta Sci.Math., 1976, v.38, p.311-315.
14. N i k o l s k i i N.K., V a s y u n i n V.I. Unified approach to function models and the transcription problem - LOMI Prepr. E-5-86, Leningrad, 1986.
15. T a k a h a s h i K. The reflexivity of contractions with nonreductive *-residual parts. - Michigan Math.J., 1987, v.34, N 1, p.153-159.
16. U c h i y a m a M. Hyperinvariant subspaces of operators of class $C_0(N)$. - Acta Sci.Math., 1977, v.39, p.179-184.
17. W u P.Y. Commutants of $C_0(N)$ contractions - Acta Sci.Math. 1976, v.38, 193-202.
18. W u P.Y. Contractions with a unilateral shift summand are reflexive. - Integral Equations and Operator Theory, 1984, v.7, p.899-904.
19. W u P.Y. Hyperinvariant subspaces of C_{11} contractions, II.-Indiana Univ.Math.J., 1978, v.27, p.805-812.
20. W u P.Y. The hyperinvariant subspace lattice of a contraction of class C_0 . - Proc.Amer.Math.Soc., 1978, v.72, p.527-530.
21. W u P.Y. Hyperinvariant subspaces of C_{11} contractions. - Proc.Amer.Math.Soc., 1979, v.75, p.53-58.
22. W u P.Y. Hyperinvariant subspaces of weak contractions. Acta Sci.Math., 1979, v.41, p.259-266.
23. W u P.Y. Bi-invariant subspaces of weak contractions. - J.Operator Theory, 1979, v.1, p.261-272.
24. W u P.Y. On the weakly closed algebra generated by a weak contraction. - J.Operator Theory, 1979, v.2, p.141-148.
25. W u P.Y. On a conjecture of Sz.-Nagy and Foias. - Acta Sci.Math., 1980, v.42, p.331-338.
26. W u P.Y. C_{11} contractions are reflexive. II. - Proc.Amer. Math.Soc., 1981, v.82, p.226-230.
27. W u P.Y. When is a contraction quasi-similar to an isometry? - Acta Sci.Math., 1982, v.44, p.151-155.

28. W u P.Y. On the reflexivity of C_1 contractions and weak contractions. - J.Operator Theory, 1982, v.8, p.209-217.
29. W u P.Y. Which $C_{.0}$ contraction is quasi-similar to its Jordan model? - Acta Sci.Math., 1984, v.47, p.449-455.
30. W u P.Y. Toward a characterization of reflexive contractions. - J.Operator Theory, 1985, v.13, p.73-86.
31. Z a j a c M. The role of the singular unitary part of Hilbert space contractions. - Rev.Roum.Math.Pures et Appl., to appear.
32. C o l o j o a r a I., F o i a s C. Theory of generalized spectral operators. - Gordon and Breach, New York, 1968.
33. S z . - N a g y B., F o i a s C. Compléments à l'étude des opérateurs. - Acta Sci.Math., 1970, v.34, p.287-296.
34. T a k a h a s h i K. Contractions with the bicommutant property - Preprint.

V.V.Kapustin, A.V.Lipin. Operator algebras and invariant subspaces lattices. I.

Summary

Given a bounded linear operator T, we study the following questions: when the commutant $\{T\}'$ is commutative; when each operator in the bicommutant $\{T\}''$ can be approximated by polynomials of T in the weak operator topology, the problem of reflexivity and others. These questions are solved for some classes of operators.