

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Ковалёв, Б. Н. Четверушкин, О группе Галилея для балансных соотношений, порождающих кинетические схемы, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2006, том 46, номер 3, 485–489

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

14 января 2025 г., 00:33:03



УДК 519.634

О ГРУППЕ ГАЛИЛЕЯ ДЛЯ БАЛАНСНЫХ СООТНОШЕНИЙ, ПОРОЖДАЮЩИХ КИНЕТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ¹⁾

© 2006 г. В. Ф. Ковалёв, Б. Н. Четверушкин

(125047 Москва, Миусская пл., 4а, ИММ РАН)

e-mail: kovalev@imamod.ru; hq@imamod.ru

Поступила в редакцию 07.10.2005 г.

Рассматриваются условия инвариантности балансных соотношений, используемых в кинетически-согласованных разностных схемах, относительно группы преобразований Галилея. Библ. 8. Фиг. 1.

Ключевые слова: группа Галилея, инвариантность балансных соотношений, разностные схемы.

Одним из современных алгоритмов решения задач газовой динамики являются кинетически согласованные разностные схемы (см. [1]). Близкими по своему подходу к кинетическим схемам являются становящиеся все более популярными в высокопроизводительных многопроцессорных вычислениях Lattice Boltzmann схемы (см. [1]–[3]).

Вывод кинетически согласованных схем использует соотношение баланса для функции распределения, которое наиболее наглядно можно представить в пространственно-одномерном случае (1D-геометрия). Примем следующую модель изменения функции распределения.

1. На момент времени t^j на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ расчетной области, расположенной на оси x (см. фигуру), существует своя постоянная по пространству (на отрезке $x \in [x_i, x_{i+1}]$) одночастичная функция распределения, совпадающая с максвелловской:

$$f_i \equiv f_{i,M} = \frac{\rho_i}{(2\pi RT_i)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\xi - u_i)^2}{2RT_i}\right]. \quad (1)$$

Здесь ξ – скорость молекулы в направлении оси x , газодинамические параметры ρ_i, u_i, T_i – постоянны на отрезке $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

2. За отрезок времени $\Delta t = t^{j+1} - t^j$ газ совершает бесстолкновительный разлет.

3. На момент времени t^{j+1} происходит мгновенная максвеллизация функции распределения. При переходе к моменту времени t^{j+2} вся процедура повторяется вновь. Важным обстоятельством здесь является выполнение при $t = t^{j+1}$ соотношения

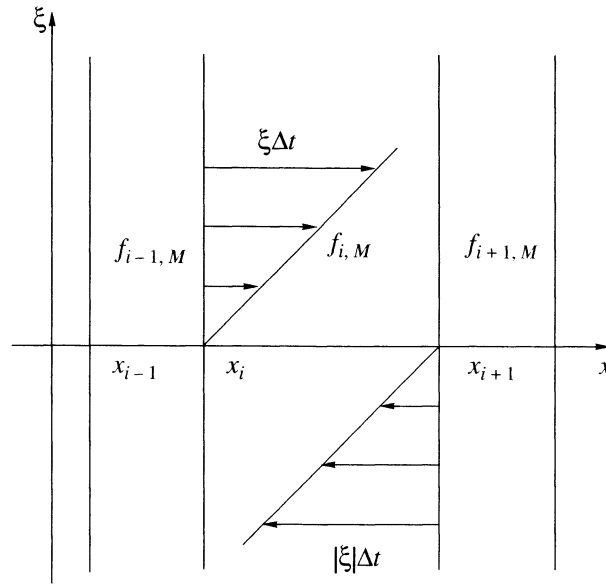
$$\int f_i^{j+1} \phi(\xi) d\xi = \int f_{i,M}^{j+1} \phi(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где $\phi(\xi) = 1, \xi, \xi^2/2$ – сумматорные инварианты, f_i^{j+1} – значение функции распределения при $t = t^{j+1}$ до максвеллизации, $f_{i,M}^{j+1}$ – значение функции распределения, описываемой выражением (1), после мгновенной максвеллизации.

Обоснованность этих предположений обоснуется в [1].

Представим процесс изменения одночастичной функции распределения на отрезке $x \in [x_i, x_{i+1}]$ за время $\Delta t = t^{j+1} - t^j$ с помощью схемы, изображенной на фигуре. Слева в центральную ячейку $x \in [x_i, x_{i+1}]$ попадают частицы с положительным направлением молекулярной скорости $\xi > 0$ и имеющие максвелловское распределение $f_{i-1,M}^j$, которое, согласно (1), зависит от газодинамических параметров $\rho_{i-1}, u_{i-1}, T_{i-1}$. Справа в ячейку попадут частицы, имеющие скорость $\xi < 0$ и максвелловское распределение $f_{i+1,M}^j$. Площадь в центральной ячейке, занятая вновь пришед-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 03-01-00606, 05-01-00631).



Фигура.

шими частицами (см. фигуру), пропорциональна модулю их скорости и времени бесстолкновительного разлета Δt .

Учитывая вышесказанное, представим соотношение баланса, описывающего изменения функции распределения в процессе бесстолкновительного разлета для центральной ячейки, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 f_i^{j+1}(\xi)\Delta x &= f_{i, M}^j(\xi)\Delta x - (f_{i, M}^j(\xi) - f_{i-1, M}^j(\xi))\xi\Delta t, \quad \xi > 0, \\
 f_i^{j+1}(\xi)\Delta x &= f_{i, M}^j(\xi)\Delta x - (f_{i+1, M}^j(\xi) - f_{i, M}^j(\xi))\xi\Delta t, \quad \xi < 0.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Здесь мы для простоты предположили, что все отрезки имеют одинаковый размер Δx . Заметим, что по окончании разлета функция $f_i^{j+1}(\xi)$, стоящая в левой части (3), уже не является максвелловской. Таковой она становится только после выполнения при t^{j+1} этапа 3, моделирующего переход к равновесному состоянию за счет столкновений.

Разностные уравнения, описывающие изменение газодинамических параметров, определяющих вид максвелловской функции распределения в ячейке x_i в момент времени t_j , получаются интегрированием балансных соотношений (3) с сумматорными инвариантами. При этом в левой части появятся моменты

$$\int f_i^{j+1} d\xi, \quad \int f_i^{j+1} \xi d\xi, \quad (1/2) \int f_i^{j+1} \xi^2 d\xi,
 \tag{4}$$

которые, согласно определению функции распределения, соответственно равны ρ_i^{j+1} , $(\rho u)_i^{j+1}$, E_i^{j+1} .

Рассмотрим, как изменятся балансные соотношения (3) под действием группы преобразований Галилея.

Предположим вначале, что под действием этой группы функции распределения f_i^j и $f_{i, M}^j$ остаются инвариантными. Тогда инфинитезимальный оператор, задающий преобразования Галилея имеет вид

$$X = t\partial_x + \partial_\xi.
 \tag{5}$$

Продолжим действие этого оператора на моменты от функции распределения или, иными словами, на интегралы от f с сумматорными инвариантами. Способ такого продолжения известен

(см. [4]), и его использование приводит к следующим дополнительным вкладам в оператор группы X:

$$X = t\partial_x + \partial_\xi + \rho_i^j \partial_{(\rho u)_i^j} + (\rho u)_i^j \partial_{E_i^j}. \quad (6)$$

Легко убедиться, что инвариантами этого оператора, помимо функций распределения f_i^j и $f_{i,M}^j$, являются следующие величины (индексы i и j здесь опущены):

$$t, \quad \xi - x/t, \quad \rho, \quad \rho(u - x/t), \quad E - (\rho u)^2/2\rho. \quad (7)$$

Инвариантное многообразие группы с оператором (6) задается в виде произвольной комбинации от $f_i^j, f_{i,M}^j$ и инвариантов (7). В частности, такой комбинацией инвариантов (7) являются максвелловские функции распределения (1).

Рассмотрим действие оператора (6) в сеточном пространстве $(t, x, \xi, f, f_M, f_t, f_{M,t}, \dots)$, включающем помимо переменных t, x, ξ и шагов на равномерной сетке $\tau \equiv \Delta t$ и $h \equiv \Delta x$ по координатам t и x соответственно, также значения функций f и f_M и их разностных производных:

$$f_t = \frac{\hat{f} - f}{\tau} \equiv \frac{Sf - f}{\tau}, \quad f_x = \frac{f^+ - f}{h} \equiv \frac{Sf - f}{h}, \quad f_{\bar{x}} = \frac{f - f^-}{h} \equiv \frac{f - Sf}{-h}. \quad (8)$$

Оператор (5), продолженный на разностные производные, имеет вид

$$X = t\partial_x + \partial_\xi - \frac{S}{\tau}(f_x)\partial_{f_t} - \frac{S}{\tau}(f_{M,x})\partial_{f_{M,t}}. \quad (9)$$

Здесь используются стандартные обозначения для операторов дискретного сдвига, например,

$$S_h = \exp^{h\mathcal{D}_x} \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{h^s}{s!} \mathcal{D}_x^s, \quad \mathcal{D}_x = \partial_x + f_x \partial_f + f_{tx} \partial_{f_t} + f_{xx} \partial_{f_x} + \dots, \quad (10)$$

преобразующих значение функции в заданной точке в соседнюю точку сетки. Результат такого смещения вверх по оси t обозначается значком $\hat{}$, а смещение по оси x вправо или влево значками $^+$ и $^-$. Соответственно, $\frac{S}{\tau}(f_x)$ обозначает “непрерывную” производную $f_x = \partial f / \partial x$, вычисленную в точке, смещенной вверх по временной оси на шаг τ (подробнее см. [5, с. 58]). Перепишем балансные соотношения (4) в виде, содержащем значения функции f и ее производных в узле $\{i, j\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\tau f_t}{\tau} + \xi \frac{\tau f_{M,\bar{x}}}{h} + f - f_M &= 0, \quad \xi > 0, \\ \frac{\tau f_t}{\tau} + \xi \frac{\tau f_{M,x}}{h} + f - f_M &= 0, \quad \xi < 0, \end{aligned} \quad (11)$$

и проверим выполнение условия инвариантности многообразия (11) под действием оператора (9). Очевидно, что оператор (9) не меняет равномерность сетки (но ее ортогональность нарушается!), и условие инвариантности (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \{-\frac{S}{\tau}(f_x) + \frac{f_{M,\bar{x}}}{h}\}_{(11)} &= 0, \quad \xi > 0, \\ \{-\frac{S}{\tau}(f_x) + \frac{f_{M,x}}{h}\}_{(11)} &= 0, \quad \xi < 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$, т.е. при переходе от дискретного представления к непрерывному, условия (12) выполняются, поскольку при этом $f \rightarrow f_M$ и дискретная производная заменяется на непрерывную производную в точке. Таким образом, непрерывный аналог разностных соотношений (11) допускает группу Галилея с оператором (5), а дискретные балансные соотношения (3) эту группу не допускают. В этом можно убедиться также, переходя от инфинитезимальных к конечным преобразованиям группы с параметром a :

$$t' = t, \quad x' = x + at, \quad \xi' = \xi + a, \quad \tau' = \tau, \quad h' = h, \quad f'_M = f_M, \quad f' = f. \quad (13)$$

Поставляя (13) в (3), перепишем балансные соотношения в “штрихованных” переменных

$$(\hat{f}' - f'_M)h' - \xi' \tau' ((f'_M)' - f'_M) = a \tau' ((f'_M)' - f'_M), \quad \xi > 0,$$

$$(\hat{f}' - f'_M)h' + \xi' \tau' ((f_M^+)' - f'_M) = a \tau' (f'_M - (f_M^+)', \quad \xi < 0. \quad (14)$$

Уравнения (14) отличаются от исходных наличием в правой части слагаемых, пропорциональных групповому параметру a , что также свидетельствует об отсутствии инвариантности балансных соотношений (3) относительно преобразований Галилея с оператором (5).

Обычным при исследовании групповых свойств конечно-разностных уравнений является стремление сохранить в них инвариантность по отношению к непрерывной группе преобразований, изоморфной группе исходных дифференциальных уравнений. В нашем случае ситуация выглядит несколько иначе: непрерывный аналог балансного соотношения сводится просто к уравнению свободного разлета, которое с очевидностью допускает группу Галилея с оператором (5). Попытка сохранить эту группу при переходе к конечно-разностному уравнению требует либо замены исходного балансного соотношения (3), либо отказа от равномерной и ортогональной сетки. Примеры таких модификаций разностных аналогов дифференциальных уравнений можно найти в [5].

В обсуждаемой здесь модели исходным является как раз не дифференциальное уравнение, а балансное соотношение на равномерной и прямоугольной сетке (3), которое описывает физическое поведение частиц при движении внутри временного слоя τ . Поэтому мы попытаемся так изменить оператор группы преобразований Галилея, чтобы при стремлении величин шагов по координате и времени к нулю осуществлялся бы непрерывный переход в оператор (5). Вместе с тем, нашей целью является сохранение инвариантности балансного соотношения (3). Здесь мы непосредственно исходим из интегральной формулировки описания поведения сплошной среды, когда в основу заложены балансы изменения в конечном объеме массы, импульса и полной энергии.

Рассмотрим вместо (13) следующие конечные преобразования:

$$\begin{aligned} t' &= t, \quad f'_M = f_M, \\ x' &= x + at, \quad \hat{f}' = \hat{f} - (a\tau/h)(f_M^- - f_M), \quad \xi > 0, \\ \xi' &= \xi + a, \quad \hat{f}' = \hat{f} - (a\tau/h)(f_M - f_M^+), \quad \xi < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя эти соотношения в (3) можно убедиться, что они сохраняют инвариантность балансных соотношений. Переходя к пределу $a \rightarrow 0$, запишем координаты инфинитезимального оператора группы, отвечающего этим преобразованиям:

$$\begin{aligned} X &= t\partial_x + \partial_\xi - (\tau/h)S_{-\tau}(f_M^- - f_M)\partial_f, \quad \xi > 0, \\ X &= t\partial_x + \partial_\xi - (\tau/h)S_{-\tau}(f_M - f_M^+)\partial_f, \quad \xi > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Координата этого оператора, которая задает преобразование функции f зависит от значений максвелловской функции распределения в соседних точках, т.е. от разностных производных:

$$\begin{aligned} X &= t\partial_x + \partial_\xi + \tau S_{-\tau}^h(f_{M,\bar{x}})\partial_f, \quad \xi > 0, \\ X &= t\partial_x + \partial_\xi + \tau S_{-\tau}^h(f_{M,x})\partial_f, \quad \xi > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку координаты оператора (17) зависят от конечно-разностных производных, то он не является оператором группы точечных преобразований, а представляет собой нелокальный оператор группы неточечных (двухточечных) преобразований, т.е. при переходе от непрерывного аналога к дискретным соотношениям происходит изменение типа допускаемой группы. Такое изменение алгебры допускаемой группы получило название деформации алгебры (см. [6], [7]).

Рассмотрим, возможна ли запись точечной группы симметрии вида (5) на равномерной и прямоугольной сетке. Запишем набор переменных, входящих в балансные соотношения (3):

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t + \tau, \quad x^+ = x + h^+, \quad x^- = x - h^-, \quad \hat{f} = f + \tau f_t, \\ f^+ &= f + h f_x, \quad f^- = f - h f_x + h^2 f_{xx}, \end{aligned}$$

и продолжим действие оператора (5) на эти переменные:

$$X = t\partial_x + \partial_\xi + t\partial_{x^+} + t\partial_{x^-} - \tau S_{-\tau}(f_x)\partial_f - \tau S_{-\tau}(f_{M,x})\partial_{\hat{f}_M}. \quad (18)$$

Действуя этим оператором на балансные соотношения (3) приходим к условиям инвариантности (12), записанным на прямоугольной сетке $\{t, x\}$. Перейдем от переменных $\{t, x, \xi\}$ к переменным $\{t, \chi = x - \xi t, \xi\}$, и введем прямоугольную ортогональную сетку на плоскости $\{t, \chi\}$. В новых переменных уравнение свободного разлета для функции распределения частиц принимает вид $f_t = 0$, а оператор (18) принимает вид оператора трансляций по переменной ξ . Этот оператор сохраняет инвариантность равномерной ортогональной сетки $\omega_\tau \times \omega_\mu$, где $\mu = S\chi - \chi$, а балансное соотношение на каждом временном слое сводится к условию равенства $f_i^j = f_{i,M}^j$. Таким образом, для реализации галилеевской инвариантности балансных соотношений последние надо рассматривать либо на ортогональной и равномерной сетке в пространстве переменных $\{t, \chi\}$, либо на сетке в пространстве переменных $\{t, x\}$ с одновременным переходом к нелокальному оператору двухточечных преобразований.

Подчеркнем, что переход от ортогональной сетки $\omega_\tau \times \omega_h$ к ортогональной сетке $\omega_\tau \times \omega_\mu$, реализующей галилеевскую инвариантность, затрагивает только независимые переменные, входящие в балансные соотношения для функции распределения и не затрагивает самой функции распределения, которая входит в балансные соотношения линейным образом. Такая ситуация не является типичной. Действительно, если подобные балансные соотношения записать не для функций распределения, а для функций ρ , u и E (см., например, [8, § 1]), то условие галилеевской инвариантности в пространстве $\{x, t\}$ реализуется лишь на неортогональной сетке, зависящей от входящей в балансные соотношения зависимой переменной (скорости u), подобно тому, как это имеет место, например, для уравнений Бюргера и КдВ (см. [5]). “Выпрямляющая” сетка замена переменных сводится к введению массовой лагранжевой переменной s согласно соотношению $ds = \rho dx - \rho u dt$ и записи балансных соотношений на ортогональной сетке в пространстве независимых переменных $\{s, t\}$.

Завершая обсуждение инвариантности соотношений (3) относительно преобразований группы Галилея отметим, что все приведенные рассуждения характеризовали изменение функции распределения на временном интервале, не превышающем шаг по времени τ . Это означает, что галилеевская инвариантность балансного соотношения на j -м шаге по времени не означает глобальной его инвариантности при всех j , поскольку переход от шага j к $j + 1$ сопровождается переходом к другим максвелловским функциям, через которые выражается искомая функция распределения f , т.е. при переходе к следующим шагам происходит переформулирование балансных условий (3). Такое мгновенное изменение функции распределения не описывается балансным соотношением (3), т.е. не является предметом нашего рассмотрения.

В заключение отметим, что инвариантность разностных схем, несмотря на инвариантность порождающих их дифференциальных уравнений, как правило не выполняется. Для кинетически согласованных разностных схем с учетом использования либо сетки на плоскости $\{t, \chi\}$, либо естественных требований (15), дополняющих условия трансформации Галилея по сохранению балансов функции распределения, это сделать удается. Подобная же процедура для газодинамических переменных к успеху не приводит.

Авторы признательны проф. В.А. Дородницыну за интерес к работе и плодотворное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазидинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. Succi S. The Lattice Boltzmann equation. Oxford: Clarendon Press, 2001.
3. Мачин Д.Е., Четверушкин Б.Н. Кинетические и Lattice Boltzmann схемы // Матем. моделирование. 2004. V. 16. № 3. С. 87–94.
4. Kovalev V. F., Krivenko S. V., Pustovalov V. V. Symmetry group of Vlasov-Maxwell equations in plasma theory // J. Nonlinear Math. Phys. 1996. V. 3. № 1–2. P. 175–180.
5. Дородницын В.А. Групповые свойства разностных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2000.
6. Levi D., Winternitz P. Continuous symmetries of discrete equations // Phys. Lett. A. 1991. V. 152. № 7. P. 335–338 (см. также nlin.SI/0502004).
7. Levi D., Winternitz P. Symmetries and conditional symmetries of differential-difference equations // J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 8. P. 3713–3730.
8. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва–Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003.