В. Г. Пузаренко, О вычислимости над моделями разрешимых теорий,
*Алгебра и логика*, 2000, том 39, номер 2, 170–197

*Алгебра и логика, 39, N 2 (2000), 170—197*

УДК 510.5

# О ВЫЧИСЛИМОСТИ НАД МОДЕЛЯМИ РАЗРЕШИМЫХ ТЕОРИЙ*)

**В. Г. ПУЗАРЕНКО**

*Моему учителю*
*Юрию Леонидовичу Ершову*
*ко дню 60-летия*

Естественным обобщением вычислимости на $\mathbb{N}$ можно считать теорию рекурсии на наследственно конечных надстройках односортных моделей при естественном отождествлении понятий $\Delta$- и $\Sigma$-предикатов с рекурсивными и рекурсивно перечислимыми предикатами.

В этой работе рассматриваются только модели конечных сигнатур.

В § 1 вводятся понятия, обозначения и вспомогательные конструкции, используемые при доказательстве основных результатов. Терминология согласована с терминологией монографии [1].

В § 2 приводится критерий $\Sigma$-определимости подмножеств наследственно конечных надстроек над моделями конечных сигнатур. Он состоит в том, что любой $\Sigma$-предикат на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ произвольной модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры определяется некоторой вычислимой последовательностью множеств, состоящих из гёделевых номеров $\exists$-формул сигнатуры модели $\mathfrak{M}$. Критерий $\Sigma$-определимости лежит в основе доказательства бóльшей части результатов настоящей работы.

В § 3 дается характеризация простых теорий (в смысле определения

*) Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция", проект 274, и Российским фондом фундаментальных исследований, проект 99-01-00600.

из [1]) в терминах наследственно конечных надстроек над моделями данной теории.

В § 4 развивается идея нестандартной теории рекурсии (см. [2]): рассматривается обобщение понятия относительной рекурсивности подмножеств натуральных чисел, при этом роль оракула играет модель $\mathfrak{M}$, а натуральные числа отождествляются с ординалами надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

В § 5 приводится алгебраическое описание полурешетки $m\Sigma$-степеней подмножеств наследственно конечной надстройки с точки зрения обычной (классической) теории рекурсии.

## § 1. Понятия, обозначения, конструкции

Напомним некоторые понятия теории рекурсии на допустимых множествах. Пусть $\mathbb{A}$ — произвольная KPU-модель.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $\mathbb{A}$-*нумерацией множества* $S$ называется произвольное отображение $\nu$ некоторого $\Sigma$-подмножества $B \subseteq A$ на множество $S(\nu : B \overset{\text{на}}{\to} S)$; при этом $B$ будем называть *областью определения* $\mathbb{A}$-нумерации $\nu$ и обозначать $\delta_\nu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $S \subseteq \Sigma(A)$ — некоторое семейство $\Sigma$-подмножеств множества $A$, то $\mathbb{A}$-нумерацию $\nu : B \to S$ назовем *вычислимой*, если предикат $\{\langle a, b\rangle \mid b \in B, a \in \nu(b)\}$ является $\Sigma$-предикатом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $\mathbb{A}$-нумерацию $\nu : B \to S$ назовем *разрешимой*, если предикат $\{\langle b_0, b_1\rangle \in B^2 \mid \nu(b_0) = \nu(b_1)\}$ является $\Delta_B$-предикатом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $\mathbb{A}$-нумерацию $\nu : B \to S$ назовем *однозначной*, если отображение $\nu$ взаимно однозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\nu : B \to M$ является $\mathbb{A}$-нумерацией. Предикат $P \subseteq M^n$ на $M$ назовем

$\Sigma_\nu$-*предикатом*, если $\{\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \mid \bar{b} \in B^n, \langle \nu b_1, \ldots, \nu b_n\rangle \in P\}$ является $\Sigma$-предикатом;

$\Delta_\nu$-*предикатом*, если $P$ и $M^n \setminus P$ являются $\Sigma_\nu$-предикатами.

Функцию $F : M^n \to M$ назовем $\Sigma_\nu$-*функцией*, если график $\Gamma_F$ функции $F$ является $\Sigma_\nu$-предикатом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, P_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, P_n^{\mathfrak{M}}, F_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, F_k^{\mathfrak{M}}, c_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_p^{\mathfrak{M}} \rangle$ — модель сигнатуры $\langle P_0^{l_0}, \ldots, P_n^{l_n}, F_0^{m_0}, \ldots, F_k^{m_k}, c_0, \ldots, c_p \rangle$. $\mathbb{A}$-нумерацию $\nu : B \to M$ носителя модели $\mathfrak{M}$ назовем $\mathbb{A}$-*конструктивизацией* модели $\mathfrak{M}$, если предикат равенства и предикаты $P_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, P_n^{\mathfrak{M}}$ являются $\Delta_\nu$-предикатами, а $F_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, F_k^{\mathfrak{M}}, c_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_p^{\mathfrak{M}}$ — $\Sigma_\nu$-функциями (выделенные элементы рассматриваем как 0-местные функции).

Пару $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\nu : B \to M$ является $\mathbb{A}$-конструктивизацией модели $\mathfrak{M}$, назовем $\mathbb{A}$-*конструктивной* моделью.

Пусть $\varphi$ — формула сигнатуры $\sigma$ и $\mathrm{P}^1 \notin \sigma$ — одноместный предикатный символ. Определим формулу $\varphi^{\mathrm{P}}$ индукцией по построению формулы $\varphi$:

если $\varphi$ — атомарная формула, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \varphi$;

если $\varphi = \varphi_0 \circ \varphi_1$, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \varphi_0^{\mathrm{P}} \circ \varphi_1^{\mathrm{P}}$, где $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$;

если $\varphi = \neg\varphi_0$, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \neg\varphi_0^{\mathrm{P}}$;

если $\varphi = \forall v \varphi_0$, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \forall v(\mathrm{P}(v) \to \varphi_0^{\mathrm{P}})$;

если $\varphi = \exists v \varphi_0$, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \exists v(\mathrm{P}(v) \wedge \varphi_0^{\mathrm{P}})$, где $v$ — переменная.

Заметим, что если $\sigma$ — вычислимая сигнатура, то преобразование $\varphi \longmapsto \varphi^{\mathrm{P}}$ будет эффективным.

Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — это $\mathbb{A}$-конструктивная модель, где $\mathfrak{M} = \langle M, P_0^{\mathfrak{M}}, \ldots$ $\ldots, P_n^{\mathfrak{M}}, F_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, F_k^{\mathfrak{M}}, c_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_p^{\mathfrak{M}} \rangle$ является моделью сигнатуры $\langle P_0^{l_0}, \ldots, P_n^{l_n}, F_0^{m_0}, \ldots, F_k^{m_k}, c_0, \ldots, c_p \rangle$, $\mathbb{A}$ — некоторая KPU-модель сигнатуры $\sigma^*$. По определению существуют $\Sigma$-формулы $\varphi_{\mathrm{M}}$, $\varphi_{=}$, $\varphi_{\neq}$, $\varphi_{P_0}$, $\varphi_{\neg P_0}, \ldots, \varphi_{P_n}$, $\varphi_{\neg P_n}$, $\varphi_{F_0}, \ldots, \varphi_{F_k}$, $\varphi_{c_0}, \ldots, \varphi_{c_p}$, определяющие носитель модели, соответствующие отношения и их дополнения, функции и выделенные элементы в KPU-модели $\mathbb{A}$.

В качестве атомарных формул сигнатуры $\sigma$ можно рассматривать только формулы вида $(x = F(y_1, \ldots, y_m))$, $(x = c)$, $P(x_1, \ldots, x_n)$, где $x, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ — любые переменные языка, причем для произвольной атомарной формулы $\varphi$ существуют $\exists$- и $\forall$-формулы $\varphi_0$ и $\varphi_1$, эквивалентные формуле $\varphi$ и содержащие в качестве атомарных подформул только формулы вида $(x = F(y_1, \ldots, y_m))$, $(x = c)$, $P(x_1, \ldots, x_n)$ (см. лемму 1.2.2 [1]). Кроме того, используя эквивалентности

$$\neg(x = F(y_1, \ldots, y_m)) \Leftrightarrow \exists z((z = F(y_1, \ldots, y_m)) \wedge \neg(z = x)),$$

$$\neg(x = c) \Leftrightarrow \exists z((z = c) \wedge \neg(x = z)),$$

можно показать, что любая формула эквивалентна формуле, в которой отрицания встречаются только при атомарных формулах вида $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $(x = y)$, где $x, x_1, \ldots, x_n, y$ — переменные языка. Оформим вышеприведенные конструкции в виде следующего утверждения.

ЛЕММА 1. 1. *Пусть заданы* KPU-*модель* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{A}$-*конструктивизация* $\nu$ *модели* $\mathfrak{M}$ *сигнатуры* $\sigma$. *Тогда для любой формулы* $\varphi$ *сигнатуры* $\sigma$ *и для любого означивания* $\gamma : FV(\varphi) \to \varphi^{\mathbb{A}}_M[x_0]$ *выполняется следующее соотношение*

$$\mathbb{A} \models (\varphi^P)^{P,P_0,\ldots,P_n,F_0,\ldots,F_k,c_0,\ldots,c_p,=}_{\varphi_M,\varphi_{P_0},\ldots,\varphi_{P_n},\varphi_{F_0},\ldots,\varphi_{F_k},\varphi_{c_0},\ldots,\varphi_{c_p},\varphi_=}[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi[\nu\gamma].$$

*Если же* $\varphi(x_0, \ldots, x_{l-1})$ *является* $\exists$-*формулой, то*

$$((\varphi^P)^{P,P_0,\ldots,P_n,F_0,\ldots,F_k,c_0,\ldots,c_p,=}_{\varphi_M,\varphi_{P_0},\ldots,\varphi_{P_n},\varphi_{F_0},\ldots,\varphi_{F_k},\varphi_{c_0},\ldots,\varphi_{c_p},\varphi_=})^{\mathbb{A}}[x_0, \ldots, x_{l-1}]$$

*будет* $\Sigma_A$-*предикатом.*

2. *Пусть заданы* KPU-*модель* $\mathbb{A}$ *и транзитивное* $\Sigma$-*подмножество* $P$, *для которого* $\mathbb{A} \upharpoonright P$ *является* KPU-*моделью. Тогда любое* $\Sigma$-*подмножество* $\mathbb{A} \upharpoonright P$ *будет* $\Sigma$-*подмножеством* $\mathbb{A}$. *Если же* $P$ *является* $\Delta$-*подмножеством* $\mathbb{A}$, *то любое* $\Sigma_n$-*подмножество* $\mathbb{A} \upharpoonright P$ *будет* $\Sigma_n$-*подмножеством* $\mathbb{A}$, $n \geqslant 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbb{A}$ — некоторая KPU-модель. Подмножество $B \subseteq \mathbb{A}$ назовем *чистым*, если $B \subseteq \{x \in A \mid \mathrm{sp}(x) = \varnothing\}$. Если $\mathbb{A}$ — наследственно конечная надстройка, то чистую часть такой KPU-модели будем обозначать $\mathrm{HF}_\varnothing$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ *— наследственно конечная надстройка произвольной модели* $\mathfrak{A}$. *Тогда произвольный* $\Sigma_n$-*предикат на множестве натуральных чисел является* $\Sigma_n$-*предикатом на наследственно конечной надстройке* $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ *при естественном отождествлении натуральных чисел и ординалов надстройки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.1.1 [1] и леммы 1. □

Рассмотрим наследственно конечную надстройку $\mathbb{D} = \mathbb{HF}(\omega)$, множеством праэлементов которой является множество $\omega$ натуральных чисел. Определим конструктивизацию $\varepsilon$ этой надстройки (см. [3]):

$$\varepsilon(n) \leftrightharpoons \begin{cases} k(\in \omega), & \text{если } n = 2k+1, \\ \varnothing, & \text{если } n = 0, \\ \{\varepsilon(k_i) \mid n = 2(2^{k_0} + \ldots + 2^{k_s}), \ k_0 < \ldots < k_s\} \\ & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

По теореме о $\Sigma$-рекурсии функция $\varepsilon$ является $\Sigma_D$-функцией. Естественным образом с функцией $\varepsilon$ связана однозначная конструктивизация $\delta$ множества термов $T = \{t_\varkappa \mid \varkappa \in \omega\}$. Определение терма $t_\varkappa$ дано в [1]. Как там показано, это семейство термов определимо формулой в произвольной наследственно конечной надстройке (более того, $\Delta$-определимо). Сама конструктивизация термов отождествляется с $\Sigma$-функцией на $\mathbb{HF}(\omega)$, которая каждому числу $n$ сопоставляет элемент $\delta(n)$ такой, что $\mathrm{sp}(\delta(n))$ — начальный сегмент натуральных чисел. Обозначим через $n_\varkappa$ число элементов множества $\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa))$. Нетрудно убедиться в том, что функция $\varkappa \mapsto n_\varkappa$ рекурсивна. Более того, для надстройки $\mathbb{HF}(\omega)$ справедлива

**ЛЕММА 3.** *$P \subseteq (\mathrm{HF}(\omega))^n$ является $\Sigma$-предикатом на $\mathbb{HF}(\omega) \Leftrightarrow$ предикат $\varepsilon^{-1}(P) \leftrightharpoons \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathbb{N} \mid \langle\varepsilon(a_1), \ldots, \varepsilon(a_n)\rangle \in P\}$ рекурсивно перечислим. Кроме того, последовательность $A_n \leftrightharpoons \{m \in \mathbb{N} \mid \varepsilon(m) \in^{\mathbb{D}}$ $\in^{\mathbb{D}} \varepsilon(n)\}$ сильно вычислима.*

В этой работе неоднократно используется следующая

**ЛЕММА 4.** *Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, $\mathbb{B} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$ — наследственно конечные надстройки над моделями $\mathfrak{M}_0 = \langle M_0, \sigma_0\rangle$, $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \sigma_1\rangle$ соответственно, а $X_0 \subseteq M_0$, $X_1 \subseteq M_1$ — произвольные равномощные подмножества. Тогда любой изоморфизм $f$ между множествами $X_0$ и $X_1$ продолжается, причем единственным образом, до изоморфизма $f^\#$ наследственно конечных надстроек $\mathrm{HF}(X_0)(\subseteq A))$ и $\mathrm{HF}(X_1)(\subseteq B))$.*

*Более того, если $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ и $f$ является $\Sigma_A$-функцией, то и $f^{\#}$ также будет $\Sigma_A$-функцией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть леммы 4 доказывается индукцией по рангу, а вторая — методом $\Sigma$-рекурсии. □

Пусть $\mathbb{C}$ — KPU-модель и $\mathrm{FUN}(C)$ — множество всех $C$-конечных функций. Для функций $f$ и $g$ обозначим через $\mathrm{comp}(f,g) \rightleftharpoons g \circ f$ операцию композиции. Эта операция является $\Sigma$-функцией (более того, она определима $\Delta_0$-формулой).

**ЛЕММА 5.** *Пусть $\mathbb{A}_0 = \mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ — произвольная наследственно конечная надстройка. Тогда существует четырехместное $\Delta$-отношение* $\mathrm{Un}$ *на* $\mathbb{A}_0$ *такое, что*

$$\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \models (x_0 = t_\varkappa(x_1, \dots, x_k))[\gamma_{g_0'}], \\ \mathbb{HF}(\omega) \models (x_0 = t_\varkappa(x_1, \dots, x_k))[\gamma_{\varepsilon \circ g_1'}], \end{cases}$$

*где $g_0' = g_0 \cup \{\langle 0, a\rangle\}$, $g_1' = g_1 \cup \{\langle 0, \varkappa\rangle\}$; $g_0$ и $g_1$ — взаимно однозначные отображения между начальным сегментом натуральных чисел и $\mathrm{sp}(a)$, $\varepsilon^{-1}(\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa)))$ соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\Sigma$-формулу $\Phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$, выражающую следующее:

$$(U(x_0) \wedge N'(x_1) \wedge (x_2 = \{\langle 1, x_0\rangle\}) \wedge (x_3 = \{\langle 1, x_1\rangle\})) \vee (\neg U(x_0) \wedge \neg N'(x_1) \wedge N(x_1)) \wedge \exists f(\mathrm{fun}(f) \wedge (f : \langle TC(x_0), \in^{\mathbb{A}_0}\rangle \overset{\sim}{\to} \langle TC(\varepsilon(x_1)), \in^{\mathbb{HF}(\omega)}\rangle) \wedge (\rho(f \restriction x_0) = \varepsilon(x_1)) \wedge (x_2 : ((n_{x_1} + 1) \setminus \{\varnothing\}) \longrightarrow \mathrm{sp}(x_0)) \wedge (x_3 : ((n_{x_1} + 1) \setminus \{\varnothing\}) \longrightarrow \varepsilon^{-1}\mathrm{sp}(\varepsilon(x_1))) \wedge (x_2 - \text{биекция}) \wedge (x_3 - \text{биекция}) \wedge (\mathrm{comp}(x_3, \varepsilon \restriction \rho x_3) = \mathrm{comp}(x_2, f)))), \qquad (*)$$

где $N$ и $N'$ — множество ординалов и “нечетных” ординалов соответственно. Нетрудно убедиться в том, что формула $\Phi$ эквивалентна некоторой $\Pi$-формуле, поэтому предикат $\Phi^{\mathbb{A}_0}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ является $\Delta$-определимым.

Докажем индукцией по построению терма $t_\varkappa$, что этот предикат удовлетворяет условию леммы.

*a*) Если $\varepsilon(\varkappa) \in \mathrm{HF}_\varnothing$, то $(\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un} \Leftrightarrow ((a = \varepsilon(\varkappa)) \wedge (g_0 = g_1) \wedge (g_0 = \varnothing)))$. Действительно, если $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$, то индукцией по рангу элемента $\varepsilon(\varkappa)$ легко показать, что $a = \varepsilon(\varkappa)$. Выполнимость условия $g_0 = g_1 = \varnothing$ следует из существования биекции между $\mathrm{sp}(a)$ и $\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa))$.

*b*) Если $\varepsilon(\varkappa) \in \omega$, то $(\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un} \Leftrightarrow ((a = t_\varkappa(a)) \wedge (\varepsilon(\varkappa) = t_\varkappa(\varepsilon(\varkappa))) \wedge (g_0 = \{\langle 1, a\rangle\}) \wedge (g_1 = \{\langle 1, \varkappa\rangle\})))$.

*c*) Рассмотрим случай, когда $\varepsilon(\varkappa) = \{\varepsilon(\varkappa')\}$ и $\varepsilon(\varkappa') \notin \omega$. Если $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$, то $\langle a', \varkappa', g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$ и $a = \{a'\}$. Тогда из индукционного предположения и определения терма $t_\varkappa$ заключаем, что $a = t_\varkappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\varkappa))$ и $\varepsilon(\varkappa) = t_\varkappa(\varepsilon(g_1(1)), \ldots, \varepsilon(g_1(n_\varkappa)))$. Покажем достаточность. Если $a = t_\varkappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\varkappa))$ и $\varepsilon(\varkappa) = t_\varkappa(\varepsilon(g_1(1)), \ldots \ldots, \varepsilon(g_1(n_\varkappa)))$, то по индукционному предположению $\langle a', \varkappa', g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$, а из определения предиката Un следует, что найдется $A_0$-конечная функция $f_0$, осуществляющая изоморфизм между $\langle TC(a'), \in\rangle$ и $\langle TC(\varepsilon(\varkappa')), \in\rangle$, причем $\varepsilon \circ g_1 = f_0 \circ g_0$. Тогда $f(\leftrightharpoons f_0 \cup \{\langle a', \varkappa'\rangle\})$ — функция из $(*)$ такая, что кортеж $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle$ удовлетворяет предикату Un.

*d*) Случай $\varepsilon(\varkappa) = \{\varepsilon(\varkappa')\} \subset \omega$ рассматривается аналогично п. *b*.

*e*) Рассмотрим случай, когда $\varepsilon(\varkappa) = \varepsilon(\varkappa_0) \cup \varepsilon(\varkappa_1)$. Установим сначала необходимость. Так как $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$, то найдется $A_0$-конечная функция $f_0$, осуществляющая изоморфизм между $\langle TC(a), \in\rangle$ и $\langle TC(\varepsilon(\varkappa)), \in\rangle$ такая, что $\varepsilon \circ g_1 = f_0 \circ g_0$. Рассмотрим $a_0 \leftrightharpoons f_0^{-1}(\varepsilon(\varkappa_0))$ и $a_1 \leftrightharpoons f_0^{-1}(\varepsilon(\varkappa_1))$. Из определения функции $TC$ следует, что $TC(a) = TC(a_0) \cup TC(a_1)$, вследствие чего $\langle a_i, \varkappa_i, g_0^i, g_1^i\rangle \in \mathrm{Un}$, в качестве функции $f$ можно взять функцию $f_0 \upharpoonright TC(a_i)$, при этом элементы $g_0$ и $g_1$ определяются следующим образом: $g_0^i \leftrightharpoons g_0 \circ \varphi_i$, где $\varphi_i$ — это $A_0$-конечная биекция начального сегмента натуральных чисел без нуля на $g_0^{-1}(\mathrm{sp}(a_i))$; $g_1^i \leftrightharpoons \varepsilon^{-1} \circ f_0 \circ g_0^i$, $i = 0, 1$. Тогда по предположению индукции и определению терма $a = t_{\varkappa_0}(g_0^0(1), \ldots \ldots, g_0^0(n_{\varkappa_0})) \cup t_{\varkappa_1}(g_0^1(1), \ldots, g_0^1(n_{\varkappa_1})) = t_\varkappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\varkappa))$.

Покажем достаточность. Если $a = t_\varkappa(u_1, \ldots, u_{n_\varkappa})$, то $a = a_0 \cup a_1$ и $a_i = t_{\varkappa_i}(u_1^i, \ldots, u_{n_{\varkappa_i}}^i)$, $i = 0, 1$. По индукционному предположению $\langle a_i, \varkappa_i, g_0^i, g_1^i\rangle \in \mathrm{Un}$ для подходящих функций $g_0^i$, $g_1^i$, $i = 0, 1$, причем функции $f_0$ и $f_1$, участвующие в определении предиката, можно выбрать такими, что $f_0 \cup f_1$ будет функцией. Рассмотрим функции $h_0 \leftrightharpoons \varepsilon \circ g_1^0 \circ (g_0^0)^{-1}$ и $h_1 \leftrightharpoons \varepsilon \circ g_1^1 \circ (g_0^1)^{-1}$. Тогда $h_0 : \mathrm{sp}(a_0) \overset{\sim}{\to} \mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa_0))$ и $h_1 : \mathrm{sp}(a_1) \overset{\sim}{\to} \mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa_1))$. По определению терма $t_\varkappa$ функция $h \leftrightharpoons h_0 \cup h_1$ взаимно однозначно отображает $\mathrm{sp}(a)$ на $\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa))$. Тогда существует единственный изоморфизм $h^{\#}$ между $\mathrm{HF}(\mathrm{sp}(a))$ и $\mathrm{HF}(\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa)))$, продолжающий изоморфизм $h$. Отсюда $f_0 = h^{\#} \upharpoonright TC(a_0)$, $f_1 = h^{\#} \upharpoonright TC(a_1)$, $f \leftrightharpoons f_0 \cup f_1$ — функция из $(*)$ и такая, что $\langle a, \varkappa, g_0, g_1 \rangle \in \mathrm{Un}$ для подходящих функций $g_0$, $g_1$. □

Для модели $\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, \{\mathrm{P}_i^{\mathfrak{M}}\}_{i \in I}, \{\mathrm{F}_j^{\mathfrak{M}}\}_{j \in J}, \{c_k^{\mathfrak{M}}\}_{k \in K} \rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle \{\mathrm{P}_i^{n_i}\}_{i \in I}, \{\mathrm{F}_j^{n_j}\}_{j \in J}, \{c_k^{n_k}\}_{k \in K} \rangle$ будем использовать обозначение $\langle \mathrm{M}, \sigma \rangle$, а через $\langle \mathrm{HF}(\mathrm{M}), \sigma^* \rangle$ обозначим надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над моделью $\mathfrak{M}$.

## § 2. Критерий $\Sigma$-определимости и его следствия

HF-язык является определимой (в некотором смысле) частью языка $\mathrm{L}_{\omega_1, \omega}$. В данном параграфе содержится ответ на вопрос о том, какие формулы бесконечного языка соответствуют $\Sigma$-формулам.

Для простоты изложения результатов этого параграфа будем различать два сорта переменных: прапеременные и общие переменные. Прапеременные обозначим символами $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, а общие переменные — символами $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$.

Прежде чем перейти к изложению основного результата, приведем пример надстроек, в котором каждая формула языка $\mathrm{L}_{\omega_1, \omega}$ эквивалентна некоторой конечной формуле.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Пусть* $\mathfrak{M}_0 = \langle \mathrm{M}_0, \sigma_0 \rangle$ *— модель $\omega$-категоричной теории $T$ и* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) = \langle \mathrm{HF}(\mathrm{M}_0), \sigma_0^* \rangle$ *— наследственно-конечная надстройка над моделью $\mathfrak{M}_0$. Тогда для любой формулы* $\Phi(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$, $m \geqslant 0$, *(если $m = 0$, то $\Phi$ является предложением) сигнатуры $\sigma_0^*$ (возможно с параметрами из $\mathrm{M}_0$) существует формула* $\varphi(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$ *сигнатуры $\sigma_0$ (с теми же параметрами) такая, что*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \models \Phi(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{M}_0 \models \varphi(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})[\gamma]$$

*для любого означивания* $\gamma : \{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\} \longrightarrow \mathrm{M}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.4.5 [1] и теореме 3.4.1 [1] для элементов $\bar{a}\ (= a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, $\bar{b}\ (= b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathrm{M}$ выполняется следующее соотношение:

$$(t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)}(\bar{a}) = t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)}(\bar{b})) \Leftrightarrow (t^{\mathfrak{M}_0}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = t^{\mathfrak{M}_0}(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})).$$

По теореме Рылль-Нардзевского (см. [4]) любая формула сигнатуры $\sigma_0$ $T$-эквивалентна конечной дизъюнкции полных формул теории $T$. Рассматривая всевозможные полные формулы, выполнимые в $\mathfrak{M}_0$ на кортежах $\bar{a}$, для которых $\Phi \in t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)}(\bar{a})$, получаем требуемое. □

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, \sigma \rangle$, $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) = (\mathrm{HF}(\mathrm{M}), \sigma^*)$ — произвольная модель конечной сигнатуры и наследственно конечная надстройка над этой моделью соответственно.

Рассмотрим произвольную формулу $\Phi(x_0)$ от одной переменной (возможно, с параметрами из M) сигнатуры $\sigma^*$. Тогда существуют формулы $\Phi_\varkappa$, $\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$, такие, что имеет место эквивалентность:

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(x_0)^{x_0}_{t_\varkappa(u_0, \ldots, u_{n_\varkappa - 1})}[\gamma] \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi_\varkappa(u_0, \ldots, u_{n_\varkappa - 1})[\gamma] \qquad (2)$$

для любого означивания $\gamma : \{u_0, \ldots, u_{n_\varkappa - 1}\} \to \mathrm{M}$. Формулу $\Phi_\varkappa$ по формуле $\Phi$ и номеру $\varkappa$ можно найти эффективно.

ЛЕММА 6. *Существует рекурсивная функция* $G$ : $\mathrm{RQFor}^1_{\sigma^*} \times \times \mathrm{HF}(\omega) \longrightarrow \mathrm{RQFor}_{\sigma^*}$ ($\mathrm{RQFor}^1$ — *это* RQ-*формулы с одной свободной переменной*) *такая, что для любого означивания* $\gamma$ *выполняется*:

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models (G(\Phi, \varkappa)(u_0, \ldots, u_{n_\varkappa - 1}) \leftrightarrow \Phi_\varkappa(u_0, \ldots, u_{n_\varkappa - 1}))[\gamma].$$

Пусть $\mathrm{nt}(n) \leftrightharpoons 2n + 1, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $T_\omega$ предикат

$$\{\langle a, b, c \rangle \mid \mathrm{Un}(a, \varepsilon^{-1}\delta(b), c, (\mathrm{nt} \restriction (|\mathrm{sp}(\delta(b))| \setminus \{\langle 0, 1 \rangle\})) \cup \{\langle |\mathrm{sp}(\delta(b))|, 1 \rangle\}\}.$$

Заметим, что $T_\omega$ является $\Delta$-предикатом и для него справедливо

$$(a, \delta^{-1}\varepsilon(\varkappa), g) \in T_\omega \Leftrightarrow (a = t_\varkappa^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(g_1, \ldots, g_{n_\varkappa})).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $f$ и $g$ — две конечные функции, определенные на начальных сегментах натуральных чисел. Определим операцию *конкатенации* $\mathrm{concat}(f, g)$ следующим образом:

$$\mathrm{concat}(f, g)(n) \leftrightharpoons \begin{cases} f(n), & \text{если } n \in \delta f; \\ g(k), & \text{если } n = \delta f + k, k \in \delta g; \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Применяя метод $\Sigma$-рекурсии, легко установить, что эта операция $\Sigma$-определима. Будем использовать следующие обозначения:

если $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1} \in \mathrm{M}$, то $\hat{s} \leftrightharpoons \{\langle i, s_i \rangle \mid i < m\}$;

если $g$ — конечная функция с областью определения $\delta g$, не содержащей 0, то $\tau(g) \leftrightharpoons \{\langle i-1, g(i) \rangle \mid i \in \delta g\}$ (нетрудно убедиться в том, что операция $\tau$ является $\Sigma$-определимой).

**ТЕОРЕМА 1.** *Пусть* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *— наследственно конечная надстройка произвольной модели* $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma \rangle$. *Тогда подмножество* $A \subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M})$ *определимо некоторой* $\Sigma$*-формулой* $\Phi(x_0, u_0, \ldots, u_{m-1})$ *с параметрами* $s_0, \ldots, s_{m-1}$ *в том и только в том случае, если существует вычислимая последовательность* $A_n^\Phi$ *гёделевых номеров* $\exists$*-формул сигнатуры* $\sigma$ *такая, что*

$$A = \{a \mid \exists n \exists g (T_\omega(a, n, g) \wedge \exists \varphi((\varphi \in A_n^\Phi) \wedge \ (\mathfrak{M} \models \varphi[\gamma_{\mathrm{concat}(\tau(g), \hat{s})}])))\}.$$

*При этом существует эффективная процедура перехода от* $\Sigma$*-формулы (вычислимой последовательности) к некоторой вычислимой последовательности (*$\Sigma$*-формуле).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку предикат $\mathrm{Tr}_\Sigma$ истинности $\Sigma$-формул $\Sigma$-определим, то $A$ является $\Sigma$-предикатом. Покажем достаточность. По лемме 6 найдется рекурсивная функция $G$, осуществляющая эффективный переход к формуле от прапеременных с определенными свойствами. Согласно принципу $\Sigma$-рефлексии (предложение 2.3.1 [1]) существует эффективная процедура $\zeta$ перехода от $\Sigma$-формулы к некоторой эквивалентной ей $\Sigma_1$-формуле. Таким образом, $G' \rightleftharpoons \zeta G(\Phi, \varepsilon^{-1}\delta(n))$ является рекурсивной функцией. Из конструкции, описанной в [1, §3.4], следует наличие рекурсивной функции $H(\Phi, k)$ с областью определения $\mathrm{Dom}(H) = \{\langle \Phi, k \rangle \mid k \in \mathbb{N}, \Phi$ — $\Sigma_1$-формула от прапеременных сигнатуры $\sigma^*\}$ и с областью значений $\mathrm{Range}(H) \subseteq \mathrm{For}_\sigma$, причем имеет место следующее соотношение:

$$\Phi \equiv \bigvee_{k \in \omega} H(\Phi, k).$$

Для завершения доказательства осталось только заметить, что вычислимая последовательность $A_n^\Phi \leftrightharpoons \{m \in \omega \mid \exists k(m = H(G'(\Phi, n), k)\}$ удовлетворяет условию теоремы. □

Для случая $\Sigma$-формул над праэлементами теорема 1 была доказана Вайценавичюсом [5].

Слабым вариантом свойства униформизации является свойство редукции. К сожалению, как свойство униформизации, так и свойство редукции не имеют места в общем случае. Однако при наложении на теорию естественных условий в наследственно конечной надстройке над моделью этой теории свойство редукции будет выполняться.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Теорию $T$ назовем *регулярной*, если она разрешима и модельно полна.

При доказательстве следующей леммы введем в рассмотрение ряд рекурсивных конструкций.

ЛЕММА 7. *Последовательность конечных множеств $S_n$, состоящая из перестановок множества* $\mathrm{sp}(\delta(n))$, *продолжение которых действует тождественно на* $\delta(n)$, *сильно вычислима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим естественную нумерацию $\rho$ всех конечных подмножеств допустимого множества $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\omega)$, состоящих из упорядоченных пар элементов из $\omega$:

$$\rho(k) = \begin{cases} \varnothing, \quad \text{если } k = 0; \\ \{\langle \varepsilon(\mathrm{nt}(l(x_0))), \varepsilon(\mathrm{nt}(r(x_0)))\rangle, \ldots, \langle \varepsilon(\mathrm{nt}(l(x_s))), \varepsilon(\mathrm{nt}(r(x_s)))\rangle\}, \\ \qquad \text{если } k = 2^{x_0} + \ldots + 2^{x_s}, \ x_0 < \ldots < x_s. \end{cases}$$

Эту нумерацию можно определить $\Sigma$-рекурсией, а поэтому она $\Sigma$-определима, вследствие чего бинарное отношение $\rho(k) \in S(n)$ рекурсивно, где $S(n)$ — множество всех перестановок множества $[n] = \{0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1\}$ ($[0] = \varnothing$). Действительно, $\Sigma$-формула $\Phi(y, z)$, выражающая следующее:

$$\mathrm{fun}(\rho(y)) \wedge \forall x \in \mathrm{dom}(\rho(y))(x < z) \wedge \exists g(\mathrm{fun}(g) \wedge (g - \text{инъекция})$$
$$\wedge (g : z \longrightarrow \mathrm{dom}(\rho(k)))) \wedge \mathrm{Ord}(z) \wedge (\mathrm{dom}(\rho(k)) = \mathrm{range}(\rho(k))),$$

эквивалентна некоторой $\Pi$-формуле (в определении используется тот факт, что "отождествление" элементов из $\omega$ и ординалов является

$\Sigma$-функцией), поэтому предикат $\Phi^{\mathbb{HF}(\omega)}[y,z]$ $\Delta$-определим, а следовательно, рекурсивен. Отсюда (учитывая, что номера всех перестановок из $S(n)$ ограничены рекурсивной функцией $n \cdot 2^{c(n,n)}$) $\Pi = \{S(n) \mid n \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})\}$ является $\Delta_A$-подмножеством, а $n \longmapsto S(n)$ будет $\Sigma_A$-функцией.

Пусть $\mathrm{csk}(n)$ — мощность множества $\mathrm{sp}(\delta(n))$ и $S_n$ — множество номеров всех перестановок, лежащих в $S(\mathrm{csk}(n))$, продолжение которых действует тождественно на $\delta(n)$. Тогда

$$k \in S_n \Leftrightarrow ((\rho(k) \in S(\mathrm{csk}(n)))\wedge$$
$$\mathrm{Un}(\delta(n), \varepsilon^{-1}\delta(n), \tau^{-1}(\rho(k)), \tau^{-1}(\mathrm{nt} \restriction \mathrm{csk}(n))),$$

откуда следует, что отношение $k \in S_n$ рекурсивно, и аналогично (с рекурсивной мажорантой $\mathrm{csk}(n) \cdot 2^{c(\mathrm{csk}(n),\mathrm{csk}(n))}$) получаем, что $\Pi_\omega \leftrightharpoons \{S_n \mid n \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})\}$ является $\Delta_A$-подмножеством, а $s : n \longmapsto S_n$ будет $\Sigma_A$-функцией. Осталось только заметить, что рекурсивная функция $\gamma^{-1}s$ сводит нумерацию $s$ к нумерации $\gamma$, т. е. последовательность $S_n$ действительно является сильно вычислимой. □

Пусть $\varphi \in \mathrm{For}_\sigma$, $\pi \in \bigcup \Pi = (\bigcup \Pi_\omega)$, где $\mathrm{For}_\sigma$ — множество гёделевых номеров формул некоторой конечной фиксированной сигнатуры $\sigma$, а $\Pi_\omega$ — множество из доказательства леммы 7. Тогда обозначим через $\varphi^\pi$ результат преобразования формулы $\varphi$ путем замены переменных по следующему правилу:

$$\pi^*(u_i) = \begin{cases} u_{\pi(i)}, & i \in \delta\pi, \\ u_i, & i \notin \delta\pi. \end{cases}$$

Функция $(\varphi, \pi) \longmapsto \varphi^\pi$ может быть определена $\Sigma$-рекурсией, а поэтому является частично рекурсивной функцией с областью определения $\mathrm{For}_\sigma \times$ $\times (\bigcup \Pi_\omega)$.

**ТЕОРЕМА 2 (о редукции).** *Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наследственно конечная надстройка модели $\mathfrak{M}$ регулярной теории $T$. Тогда для любых $R_0, R_1 \in \Sigma(A)$ существуют $\Sigma_A$-подмножества $F_0 \subseteq R_0$ и $F_1 \subseteq R_1$ такие, что $F_0 \cup F_1 = R_0 \cup R_1$, $F_0 \cap F_1 = \varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R_0$ и $R_1$ — некоторые $\Sigma$-подмножества (не ограничивая общности, можно считать, что они определяются формулами от одних и тех же параметров). Пусть $A_n$ и $B_n$ — вычислимые последовательности из теоремы 1, определяющие $R_0$ и $R_1$ соответственно. Тогда существуют сильно вычислимые последовательности возрастающих по $s$ множеств $A_n^s$ и $B_n^s$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$A_n^0 = B_n^0 = \varnothing,\ |A_n^{s+1} \setminus A_n^s| \leqslant 1,\ |B_n^{s+1} \setminus B_n^s| \leqslant 1,\ A_n = \cup A_n^s,\ B_n = \cup B_n^s.$$

Обозначим символом $e$ рекурсивную функцию, которая номеру формулы сигнатуры $\sigma$ сопоставляет номер эквивалентной ей $\exists$-формулы. Существование этой функции следует из разрешимости и модельной полноты теории $T$. Ниже приводится построение вычислимых последовательностей $C_n$ и $D_n$, которые и будут определять множества $F_0$ и $F_1$ из условия.

КОНСТРУКЦИЯ. Шаг 0. $C_n^0 \leftrightharpoons D_n^0 \leftrightharpoons \varnothing$.

Шаг $s+1$. Если существует $\varphi_0 \in A_n^{s+1} \setminus A_n^s$, то $C_n^{s+1} \rightleftharpoons C_n^s \cup \{e(\varphi_0 \wedge \wedge \bigwedge_{\varphi\in C_n^s} \bigwedge_{\pi\in S_n} \neg\varphi^\pi \wedge \bigwedge_{\psi\in D_n^s} \bigwedge_{\pi\in S_n} \neg\psi^\pi)\}$; $C_n^{s+1} \rightleftharpoons C_n^s$, в противном случае.

Если существует $\psi_0 \in B_n^{s+1} \setminus B_n^s$, то $D_n^{s+1} \rightleftharpoons D_n^s \cup \{e(\psi_0 \wedge \wedge \bigwedge_{\varphi\in C_n^{s+1}} \bigwedge_{\pi\in S_n} \neg\varphi^\pi \wedge \bigwedge_{\psi\in D_n^s} \bigwedge_{\pi\in S_n} \neg\psi^\pi)\}$; $D_n^{s+1} \rightleftharpoons D_n^s$, в противном случае.

Описание конструкции завершено.

Легко проверить, что построенные вычислимые последовательности удовлетворяют теореме 1. Покажем, что множества $F_0$ и $F_1$, определенные вычислимыми последовательностями $C_n$ и $D_n$ соответственно, удовлетворяют условиям теоремы.

Включения $F_0 \subseteq R_0$ и $F_1 \subseteq R_1$ справедливы, поскольку все элементы вычислимых последовательностей заменяются мѐньшими относительно естественного порядка на алгебре Линденбаума-Тарского $\langle F_n(T)/_\equiv, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$.

Из конструкции следует, что любые две формулы, принадлежащие $C_n \cup D_n$, либо совпадают, либо не пересекаются с точностью до перестановки, продолжение которой действует тождественно на элементе $\delta(n)$, поэтому $F_0 \cap F_1 = \varnothing$.

Выполняется равенство $F_0 \cup F_1 = R_0 \cup R_1$. Действительно, пусть $a \in R_0 \cup R_1$. Тогда $a = t_\varkappa^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(u_0, u_1, \ldots, u_{n_\varkappa - 1})$, и существует формула $\varphi \in A_n \cup B_n$, $n = \delta^{-1}\varepsilon(\varkappa)$, такая, что $\mathfrak{M} \models \varphi[\gamma_{\mathrm{concat}(g,\hat{s})}]$, где $g = \{\langle 0, u_0\rangle, \langle 1, u_1\rangle, \ldots, \langle n_\varkappa - 1, u_{n_\varkappa - 1}\rangle\}$ и $\hat{s}$ — некоторые параметры. Выберем наименьший номер $i_0$ такой, что формула $\bar{\varphi}$, для которой выполняется вышеприведенное условие, принадлежит множеству $A_n^{i_0} \cup B_n^{i_0}$. Если $\bar{\varphi} \in A_n^{i_0}$, то $a \in F_0$; в противном случае, $a \in F_1$. □

В заключение этого параграфа приведем пример равномерно определенного (в некотором смысле) неуниформизуемого предиката на наследственно конечной надстройке над моделью регулярной $\omega$-категоричной теории. Известно [6], что надстройка над моделью регулярной теории $T$ обладает свойством униформизации в том и только в том случае, если $T$ имеет $\Sigma$-определимые скулемовские функции.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечная модель разрешимой модельно полной $\omega$-категоричной теории. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не имеет места теорема об униформизации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим несколько свойств.

$\langle 1\rangle$ *Для каждой полной формулы $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ теории $Th(\mathfrak{M})$ существует полная формула $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ той же теории, для которой выполняется следующее соотношение:*

$$\mathfrak{M} \models \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1}((\psi \leftrightarrow \exists x_n \varphi) \wedge (\exists x_n \varphi \to \exists^\infty x_n \varphi)).$$

Свойство $\langle 1\rangle$ непосредственно следует из $\omega$-категоричности и полноты теории $Th(\mathfrak{M})$ (существует лишь конечное число полных формул от переменных $x_0, \ldots, x_{n-1}$, неэквивалентных в теории $Th(\mathfrak{M})$).

$\langle 2\rangle$ *Существует бинарный $\Sigma$-предикат* NegUnif, *который не униформизуем.*

Рассмотрим следующее выражение от переменных $x$ и $u$:

$$\begin{aligned}&\exists n \exists h((x = \langle n, h\rangle) \wedge (n \text{ — номер } \exists\text{-формулы}) \wedge (\rho h \subset M)\\ &\wedge (h \text{ - инъекция}) \wedge \exists h_1 \exists h_2((h_1 \neq h_2) \wedge (\delta h_1 = \delta h_2)\\ &\wedge (\delta h_1 = \delta h + 1) \wedge (h_1 \restriction \delta h = h_2 \restriction \delta h) \wedge (h_1 \restriction \delta h = h)\\ &\wedge Tr_\Sigma(n, h_1) \wedge Tr_\Sigma(n, h_2) \wedge Tr_\Sigma(n, h \cup \{\langle \delta h, u\rangle\}))).\end{aligned}$$

Это выражение может быть записано $\Sigma$-формулой. Докажем, что предикат, определяемый этой формулой, не униформизуем. Предположим противное, т.е. пусть существует $\Sigma$-функция nuf, униформизующая этот предикат. Пусть $\psi(x_0, x_1, s_0, \ldots, s_{k-1})$ — формула с параметрами из $M$, определяющая функцию nuf. Согласно свойству $\langle 1 \rangle$ функция nuf определена, в частности, на элементе $\bar{x} = \langle \varphi, h_0 \rangle$, где $\varphi$ — полная $\exists$-формула, $h_0 \leftrightharpoons \{\langle i, s_i \rangle \mid i < k\}$ такие, что $\mathfrak{M} \models \exists x_k \varphi[\gamma_{h_0}]$, и, кроме того, формула $\varphi$ удовлетворяет свойству $\langle 1 \rangle$. Предположим, что $\mathrm{nuf}(\bar{x}) = u_0$. Согласно определению предиката существует элемент $u_0' \neq u_0$ такой, что

$$t^{\mathfrak{M}}(u_0, s_0, \ldots, s_{k-1}) = t^{\mathfrak{M}}(u_0', s_0, \ldots, s_{k-1}).$$

Тогда по предложению 3.4.5 [1] и теореме 3.4.1 [1] выполняется

$$t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(\mathrm{nuf}(\bar{x}), s_0, \ldots, s_{k-1}) = t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(\mathrm{nuf}(\bar{x})^{u_0}_{u_0'}, s_0, \ldots, s_{k-1}),$$

что противоречит тому, что nuf — определимая функция. □

## § 3. О характеризации простых теорий

Наследственно конечная надстройка не только является объектом исследования вычислимых свойств модели, но и позволяет описывать в ряде случаев свойства самой теории этой модели. Один из таких примеров приводится в данном параграфе. Прежде, чем перейти к основному объекту изучения, приведем несложный результат из теории конструктивных моделей.

ЛЕММА 8. *Пусть $T$ — разрешимая $\omega$-категоричная теория. Тогда $T$ имеет разрешимое множество полных формул в том и только в том случае, если существует сильно вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$, где $A_n$ — множество, содержащее все с точностью до $T$-эквивалентности полные формулы от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Теорию $T$ назовем *простой*, если она регулярна, полна, $\omega$-категорична и имеет разрешимое множество полных формул.

Теорема 3 является своеобразной характеризацией простых теорий в терминах наследственно конечных надстроек над моделями таких теорий.

**ТЕОРЕМА 3.** *Пусть $T$ — полная $\omega$-категоричная теория. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *теория $T$ разрешима и для произвольных модели $\mathfrak{M} \models T$ и вычислимого семейства всех типов $\{p_n \mid n \in \omega\}$ теории $T$ предикат*

$$\{\langle n, a\rangle \mid a \in \mathrm{M}^k \text{ реализует тип } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

$\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$*-определим;*

2) *для некоторых модели $\mathfrak{M} \models T$ и вычислимого семейства всех типов $\{p_n \mid n \in \omega\}$ теории $T$ предикат*

$$\{\langle n, a\rangle \mid a \in \mathrm{M}^k \text{ реализует тип } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

$\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$*-определим;*

3) *теория $T$ разрешима и для произвольных вычислимого семейства всех типов $\{p_n \mid n \in \omega\}$ теории $T$ и модели $\mathfrak{M} \models T$ предикат*

$$\eta_{\mathfrak{M}} \leftrightharpoons \{\langle n, m, x\rangle \mid \exists a \in \mathrm{M}^{n\varkappa}((x = t_\varkappa(a)) \wedge (\mathfrak{M} \models p_n(a))) \text{ для } \varkappa = \varepsilon^{-1}\delta(m)\}$$

$\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$*-определим;*

4) *существуют обогащение $\sigma'$ сигнатуры $\sigma$ конечным числом констант $c_0, \ldots, c_{n-1}$ и полная формула $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$ такие, что $T'$ ($\leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons Th(T \cup \{\varphi_0(c_0, \ldots, c_{n-1})\})$) — простая теория.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация ($1 \Rightarrow 2$) и эквивалентность ($1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3$) очевидны. Установим сначала импликацию ($2 \Rightarrow 4$). Разрешимость теории $T$ следует из вычислимости семейства всех типов теории $T$ (замкнутые формулы, принадлежащие типу $p_0$, образуют теорию $T$) и полноты теории (полная перечислимо аксиоматизируемая теория разрешима). Отсюда для любой полной формулы $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$ теория $Th(T \cup \{\varphi_0(c_0, \ldots, c_{n-1})\})$ сигнатуры $\sigma'$ является разрешимой полной $\omega$-категоричной теорией.

Пусть $\Psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ — это $\Sigma$-формула, определяющая предикат

$$\{\langle n, a\rangle \mid a \in \mathrm{M}^k \text{ реализует тип } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

и $s_0, \ldots, s_{n-1}$ — параметры из M, участвующие в определении. По теореме Рылль-Нардзевского существует полная формула $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$

такая, что $\mathfrak{M} \models \varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})[\gamma_g]$, где $g = \{\langle i, s_i\rangle \mid i < n\}$. По теореме 1 существует соответствующая вычислимая последовательность $B_n$ гёделевых номеров $\exists$-формул сигнатуры $\sigma$. Рассмотрим вычислимую последовательность $C_n \leftrightharpoons B'_n \setminus \{\varphi \mid \mathfrak{M} \models \neg\varphi\}$, где $B'_n \leftrightharpoons \{\exists x_k \ldots \exists x_{k+n-1}(\varphi \wedge \wedge(\varphi_0)^{x_0,\ldots,x_{n-1}}_{x_k,\ldots,x_{k+n-1}}) \mid \varphi \in B_n\}$. Из теоремы Рылль-Нардзевского следует, что элементами множеств $C_n$ являются номера полных $\exists$-формул, вследствие чего множество

$$C \leftrightharpoons \left\{\varphi \,\middle|\, \exists\varphi_0 \left((T \vdash (\varphi_0 \leftrightarrow \varphi)) \wedge \left(\varphi_0 \in \bigcup_{n\in\omega} C_n\right)\right)\right\}$$

состоит из полных формул, и, очевидно, перечислимо, а перечислимость для множества полных формул разрешимой теории равносильна разрешимости. Последнее влечет разрешимость множества полных формул теории $T'$. Модельная полнота следует из определения семейства множеств $B_n$ и теоремы Рылль-Нардзевского (любая выполнимая формула эквивалентна конечной дизъюнкции полных формул).

Осталось установить импликацию $(4 \Rightarrow 1)$. Теории $T$ разрешима, поскольку разрешимой является и теория $T'$. Пусть $\mathfrak{M} \models T$ — модель теории $T$ и $\{p_n \mid n \in \omega\}$ — вычислимое семейство всех типов теории $T$. Рассмотрим вспомогательную $\Sigma$-формулу $\Psi(x_0, x_1)$, выражающую следующее:

$$\exists\varphi\exists\varphi'((\varphi \in p_{x_0}) \wedge (\varphi' \in \mathrm{ComFor}_{\sigma'}) \wedge (T' \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi')) \wedge Tr_\Sigma(\varphi', \mathrm{concat}(x_1, \hat{s})),$$

где $\mathrm{ComFor}_{\sigma'}$ — множество всех $\exists$-формул сигнатуры $\sigma'$, эквивалентных некоторым полным формулам теории $T$ (оно разрешимо, поскольку разрешимо множество полных формул теории $T'$), а $\hat{s} \leftrightharpoons \{\langle i, s_i\rangle \mid i < n\}$. Тогда $\Sigma$-формула $\Psi'(x_0, x_1)$, для которой выполняется эквивалентность

$$\Psi'(n, \langle g(0), \ldots, g(\delta g - 1)\rangle) \Leftrightarrow \Psi(n, g),$$

определяет предикат из условия. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле, предикат $\eta_{\mathfrak{M}}$ из последней теоремы определяет "кодировку" типов, реализующихся в надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ элементами некоторого двуместного $\Delta$-предиката на $\mathbb{N}$. К тому же, используя следующее соотношение

$$\langle n, m, a\rangle \notin \eta_{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow \forall g \in (n_{\varkappa}+1) \times \mathrm{sp}(a) \urcorner T_{\omega}(a, m, g)$$

$$\vee \exists g (T_{\omega}(a, m, g) \wedge \forall \pi \in S_m \exists \varphi \in p_n \exists \varphi_0 \in \mathrm{ComFor}_{\sigma'}((T' \vdash (\varphi \leftrightarrow \urcorner \varphi_0))$$

$$\wedge (\mathfrak{M}' \models \varphi_0^{\pi}[\gamma_{\tau(g)}])))$$

(где $\varkappa = \varepsilon^{-1}\delta(m)$, $\mathfrak{M}' \models T'$ — обогащение модели $\mathfrak{M}$), заключаем, что $\eta_{\mathfrak{M}}$ является $\Delta$-предикатом.

## §4. О нестандартной теории рекурсии

В данном параграфе рассматривается вопрос о взаимосвязях вычислимости на множестве натуральных чисел (что эквивалентно, как показано в [1], вычислимости на $\mathbb{HF}(\varnothing)$) и на наследственно конечных надстройках. Основным результатом является теорема о соответствии между подполями поля вещественных чисел и семейством идеалов верхней полурешетки $\mathbb{L}_T \leftrightharpoons \langle \mathrm{L}_T, \leq\rangle$ тьюринговых степеней.

Из леммы 2 следует, что $\Sigma_n(\mathbb{HF}(\varnothing)) \subseteq \Sigma_n(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$. Обратное утверждение в общем случае не выполняется (примеры таких моделей приведены в основной теореме данного параграфа). Тем не менее, для надстроек над моделями специального класса теорий имеет место

ЛЕММА 9. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель разрешимой категоричной в некоторой бесконечной мощности теории. Тогда*

а) *любое чистое $\Delta_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$-подмножество является $\Delta$-подмножеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$;*

б) *любое чистое $\Sigma_n$-подмножество на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ является $\Sigma_n$-подмножеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$, $n \geqslant 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модель $\mathfrak{M}$ $\omega$-насыщенна, то по предложению 3.4.5 [1] и теореме 3.4.2 [1] выполняется соотношение $f : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \preccurlyeq \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ для разрешимой насыщенной модели $\mathfrak{M}'$. Далее, если множество $A \subseteq \mathrm{HF}_{\varnothing}$ определяется формулой $\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ с параметрами $s_0, \ldots, s_{k-1}$ из M и $\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle$ — кортеж элементов M$'$, элементарно эквивалентный кортежу $\langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle$, то согласно теореме 3.4.1 [1] имеет место следующее соотношение:

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})[\gamma_{\mathrm{concat}(g,\hat{s})}] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \models \Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})[\gamma_{\mathrm{concat}(g,\hat{n})}]$$

при $g = \langle 0, a\rangle$, $a \in \mathrm{HF}_{\varnothing}$.

Осталось применить принцип $\Sigma$-рефлексии и следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Любая $\Delta_0$-формула в надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')$ разрешимой модели $\mathfrak{M}'$ эквивалентна некоторым $\Sigma$-формуле и $\Pi$-формуле в надстройке $\mathbb{HF}(\varnothing)$.

Если же модель $\mathfrak{M}$ не $\omega$-насыщенна, то по теореме из [7] она сильно конструктивизируема, и данное утверждение следует из замечания 2. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Модель $\mathfrak{M}$ назовем *локально конструктивизируемой*, если при любых кортежах $\bar{a} \in \mathrm{M}^{\omega}$ $\exists$-теории $Th_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{a})$ являются перечислимыми.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** *Для модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры $\sigma$ следующие условия эквивалентны:*

а) *модель $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема;*

б) *любое чистое $\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$-подмножество является $\Sigma$-подмножеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация а)$\Rightarrow$б) является следствием теоремы 1 и определения локальной конструктивизируемости. В обратную сторону, достаточно заметить, что предикат

$$A \leftrightharpoons \{n \mid (n - \text{номер } \exists\text{-формулы}) \wedge Tr_{\Sigma}(n, g)\},$$

где $g(i) = a_i$ — элементы произвольного фиксированного кортежа из M, будет $\Sigma$-определимым. □

Введем обобщение понятия локальной конструктивизируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Модель $\mathfrak{M}$ назовем *локально конструктивизируемой с оракулом $A$*, если $\exists$-теории $Th_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{a})$ являются $A$-перечислимыми при любых кортежах $\bar{a} \in \mathrm{M}^{\omega}$.

Имеет место следующий релятивизованный вариант последнего предложения.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.** *Для модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры $\sigma$ эквивалентны следующие условия:*

а) *модель $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема с оракулом $A$;*

б) *любое чистое $\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$-подмножество является $\Sigma$-подмножеством $(\mathbb{HF}(\varnothing), P)$, где $\gamma^*(P) = A$ и*

$$\gamma^*(x) \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & \text{если } x = \varnothing, \\ \sum\limits_{i=0}^{s} 2^{\gamma^*(x_i)}, & \text{если } x = \{x_0, \dots x_s\}, x_{j_0} \neq x_{j_1} \text{ при } j_0 \neq j_1 \end{cases} \tag{3}$$

*является $\Sigma$-определимой биекцией между $\mathbb{HF}(\varnothing)$ и $\mathbb{N}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $\mathbb{L} = \langle L, \leq, 0 \rangle$ — верхняя полурешетка с нулем (наименьшим элементом). Подмножество $I \subseteq L$ назовем *идеалом*, если выполняются следующие условия:

1) $a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$;

2) $a \in I, b \leq a \Rightarrow b \in I$.

Обозначим символом $\mathfrak{J}(\mathbb{L})$ семейство всех идеалов верхней полурешетки $\mathbb{L}$ со следующими операциями на нем:

$I \leq^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} J \Leftrightarrow I \subseteq J$; $I \wedge^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} J \leftrightharpoons I \cap J$;

$I \vee^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} J \leftrightharpoons \{c \mid \exists a \in I \exists b \in J (c \leqslant^{\mathbb{L}} a \vee b)\}$; $0^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} \leftrightharpoons \{0\}$; $1^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} \leftrightharpoons L$.

Тогда относительно введенных операций семейство $\mathfrak{J}(\mathbb{L})$ образует решетку с наибольшим и наименьшим элементами. К тому же, верхняя полурешетка $\mathbb{L}$ изоморфно вкладывается в решетку $\mathfrak{J}(\mathbb{L})$ (если рассматривать ее как верхнюю полурешетку). При этом в качестве изоморфного вложения выбирается отображение $a \in \mathrm{L} \mapsto \hat{a} \in \mathrm{J}(\mathrm{L})$ между элементами полурешетки $\mathbb{L}$ и главными идеалами полурешетки $\mathbb{L}$, порожденными соответствующими элементами.

В дальнейшем множество натуральных чисел отождествляется с множеством $\mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ ординалов наследственно конечной надстройки над моделью $\mathfrak{M}$. Для любого множества $A \subseteq \mathbb{N}$ обозначим через $d_T(A)$ *тьюрингову степень*, содержащую множество $A$ в качестве элемента.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.** *Пусть $\mathbb{A}_0 = \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наследственно конечная надстройка над моделью $\mathfrak{M}$. Тогда множество* $\mathrm{Ideal}(\mathfrak{M}) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \{d_T(B) \mid B \in \Delta(\mathbb{A}_0) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ *образует идеал верхней полурешетки $\mathbb{L}_T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [8] выполняется соотношение $d_T(A \oplus B) = d_T(A) \vee d_T(B)$, где $A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}$. Очевидно, что если $A$ и $B$ являются $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножествами, то и $A \oplus B$ будет $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножеством.

Пусть $A$ образует $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножество и $B \leq_T A$. Покажем, что $B$ является $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножеством. Воспользуемся формализацией из [8]. Поскольку $B$ рекурсивно относительно оракула $A$, существует регулярное рекурсивно перечислимое множество $W$, для которого выполняется следующее соотношение:

$$\chi_B(x) = y \Leftrightarrow \exists u \exists v(\langle x, y, u, v\rangle \in W \wedge (D_u \subseteq A) \wedge (D_v \subseteq \bar{A})), \qquad (4)$$

где $\chi_B$ — характеристическая функция множества $B$, а $D_u$ — конечное подмножество натуральных чисел с номером $u$ в стандартной нумерации. Из соотношения 4 и леммы 1 следует, что $\chi_B$ является $\Sigma_{\mathbb{A}_0}$-функцией, а $B$ будет $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножеством. □

Определим нумерацию множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел следующим образом:

$$\nu_{\mathbb{Q}}(c(n,m)) \leftrightharpoons (-1)^{\mathrm{odd}((n,m+1))}\frac{n}{m+1},$$

где $c(n,m)$ — канторовская нумерация упорядоченных пар, $(n,m)$ — наибольший общий делитель, а $\mathrm{odd}(n)$ — характеристическая функция нечетных чисел.

ЛЕММА 10. *Нумерация $\nu_{\mathbb{Q}}$ является конструктивизацией модели $\langle \mathbb{Q}, +, *, -, \leqslant, 0, 1\rangle$. Кроме того, существует частично рекурсивная функция $h_1$ с областью определения $\delta h_1 = \{n \mid \nu_{\mathbb{Q}}(n) \neq 0\}$ такая, что*

$$\forall n \in \delta h_1(\nu_{\mathbb{Q}}(h_1(n)) = (\nu_{\mathbb{Q}}(n))^{-1}).$$

Для произвольного действительного числа $a \in \mathbb{R}$ определим *сечение* $B_a|C_a$ следующим образом:

$$B_a \leftrightharpoons \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_{\mathbb{Q}}(n) \leqslant a\},\ C_a \leftrightharpoons \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_{\mathbb{Q}}(n) > a\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.Число $a \in \mathbb{R}$ назовем *конструктивным* (*$A$-конструктивным*), если сечение $B_a|C_a$ состоит из рекурсивных (относительно оракула $A$) множеств.

Следующий результат является релятивизованным вариантом аналога для конструктивных элементов.

**ЛЕММА 11.** *$A$-конструктивные элементы образуют вещественно замкнутое подполе поля $\mathbb{R}$.*

Для любого $x \in [0;1)$ определим множество $A_x \leftrightharpoons \{n \in \mathbb{N} \mid [2 \cdot \{2^n x\}] = 1\}$. Отметим, что отображение $x \mapsto A_x$ является однозначной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$-нумерацией семейства всех кобесконечных подмножеств натуральных чисел (семейство всех коконечных подмножеств натуральных чисел, очевидно, обладает такой нумерацией). Для введенных понятий имеет место следующая

**ЛЕММА 12.** $A_x \equiv_T B_x$.

**СЛЕДСТВИЕ.** *$A_x$ рекурсивно (относительно оракула $A$) $\Leftrightarrow$ число $x$ конструктивно (относительно оракула $A$).*

Для каждого идеала $I \in \mathrm{J}(\mathrm{L}_T)$ обозначим через $\mathbb{R}_I$ вещественное замыкание множества $\widetilde{I} \leftrightharpoons \{x \in [0;1) \mid d_T(A_x) \in I\}$. По лемме и последнему следствию $\mathbb{R}_I = \mathbb{Z} + \widetilde{I}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Теперь покажем, что поле $\mathbb{R}_{\hat{a}}$ для $a = d_T(A)$ локально конструктивизируемо относительно оракула $A$. Так как локальная конструктивизируемость модели $\mathfrak{M}$ относительно оракула $A$ равносильна условию "для любого $n \geqslant 0$ и любых элементов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ из $\mathfrak{M}$ существует $A$-конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}'$ такая, что для некоторых элементов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ из $\mathfrak{M}'$ выполняется следующее соотношение $Th_\exists(\mathfrak{M}, \bar{a}) = Th_\exists(\mathfrak{M}', \bar{b})$," достаточно убедиться в том, что для любых элементов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ из $\mathbb{R}_{\hat{a}}$ поле $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ ($\preccurlyeq \mathbb{R}_{\hat{a}}$, что следует из модельной полноты и критерия Робинсона) $A$-конструктивизируемо ($\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ — алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$ с помощью элементов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ в поле вещественных чисел). Последнее утверждение является следствием релятивизации теоремы о ядре (см. [9]).

Таким образом, справедлива

**ТЕОРЕМА 4.** 1) *Решетки $\langle \mathrm{J}(\mathrm{L}_T), \subseteq\rangle$ и $\langle\{\mathbb{R}_I \mid I \in \mathrm{J}(\mathrm{L}_T)\}, \preccurlyeq\rangle$ изоморфны, при этом выполняются следующие условия:*

а) $\mathbb{R}_{\{0\}}$ — *поле, состоящее из конструктивных элементов*;

б) $\mathbb{R}_{L_T} = \mathbb{R}$;

в) $\mathbb{R}_{I \wedge J} = \mathbb{R}_I \cap \mathbb{R}_J$;

г) $\mathbb{R}_I = \cup\{\mathbb{R}_{\hat{a}} \mid a \in I\}$.

2) $\mathrm{Ideal}(\mathbb{R}_I) = I$.

3) *Пусть* $\mathbb{R}'$ — *произвольное вещественно замкнутое подполе поля* $\mathbb{R}$. *Тогда* $\mathbb{R}' \preccurlyeq \mathbb{R}_I \Leftrightarrow \mathrm{Ideal}(\mathbb{R}') \subseteq I$. *В частности,* $\mathbb{R}' \preccurlyeq \mathbb{R}_{\mathrm{Ideal}(\mathbb{R}')}$.

4) *Пусть* $\mathbf{A}_I \leftrightharpoons \mathbb{HF}(\mathbb{R}_I)$. *Тогда существует разрешимая (даже однозначная) вычислимая* $\mathbf{A}_I$*-нумерация семейства* $\Delta(\mathbf{A}_I) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

**СЛЕДСТВИЕ.** Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ и $a = d_T(A)$. Тогда поле $\mathbb{R}_{\hat{a}}$, состоящее из $A$-конструктивных элементов, не является $A$-конструктивным.

## § 5. Алгебраические свойства $m\Sigma$-степеней

В этом параграфе изучаются свойства $m\Sigma$-степеней. Понятие $m\Sigma$-степени является обобщением понятия $m$-степени на случай произвольной KPU-модели $\mathbf{A}$. Одна из основных проблем, с которой пришлось столкнуться при изучении полурешеток $m\Sigma$-степеней надстроек над моделями простых теорий, чья теория вычислимости совпадает с классической теорией рекурсии, — наличие в несчетном случае несчетного семейства атомов полурешетки $\mathbb{L}(\mathrm{S})$ ($\mathrm{S}$ — множество без структуры; по праву можно считать, что такая модель имеет самую простую структуру), причем каждое подсемейство можно поместить в некоторый главный идеал. Из указанного свойства следует отсутствие изоморфизма между полурешетками $m$-степеней и $m\Sigma$-степеней для надстроек над несчетными моделями простых теорий. Тем не менее, вопрос об изоморфизме полурешеток перечислимых и определимых степеней для моделей таких теорий решается положительно. Сначала введем понятия, касающиеся общей теории $m\Sigma$-степеней произвольной KPU-модели $\mathbf{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $B, C \subseteq A$. Будем говорить, что $B$ *$m\Sigma$-сводится* к $C$ ($B \leq_{m\Sigma} C$), если существует $\Sigma$-предикат $R \subseteq A^2$ такой, что $\delta R = A$ и для любой пары $\langle a_0, a_1 \rangle \in R$ выполняется $(a_0 \in B) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (a_1 \in C)$ .

Как и в классическом случае, дадим определение $m\Sigma$-сводимости, используя понятие сводимости нумераций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Будем говорить, что $\mathbb{A}$-нумерация $\nu : B \to S_0$ *сводится* к $\mathbb{A}$-нумерации $\mu : B' \to S_1$ (и обозначать $\nu \le \mu$), если существует $\Sigma$-предикат $R \subseteq A^2$ такой, что $\delta R = B_0$ и для любой пары $\langle a_0, a_1 \rangle \in R$ выполняется $\nu(a_0) = \mu(a_1)$.

Легко заметить, что $B \le_{m\Sigma} C \Leftrightarrow \chi_B \le \chi_C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве предиката сводимости $R$ можно рассматривать предикат с прежним условием на пары такой, что $\delta R$ — $\Delta$-предикат, содержащий $B$.

Естественным образом определяются понятия $m\Sigma$-эквивалентности, $m\Sigma$-степени и порядка $\le$ на $m\Sigma$-степенях, индуцированного предпорядком $\le_{m\Sigma}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $B, C \subseteq A$. Будем говорить, что $B$ *$m\Sigma$-эквивалентно* $C$ ($B \equiv_{m\Sigma} C$), если $B \le_{m\Sigma} C$ и $C \le_{m\Sigma} B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Пусть $\varnothing \ne B \subset A$, *$m\Sigma$-степенью* множества $B$ назовем

$$\mathbf{b} = d_{m\Sigma}(B) \leftrightharpoons \{B' \subset A \mid B' \equiv_{m\Sigma} B\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $\varnothing \ne B, C \subset A$. Тогда $d_{m\Sigma}(C) \le$ $\le d_{m\Sigma}(B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} C \le_{m\Sigma} B$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.** *Множество $m\Sigma$-степеней $\langle L_m(\mathbb{A}), \le \rangle$ произвольной* KPU-*модели* $\mathbb{A}$ *образует дистрибутивную верхнюю полурешетку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1, предл. 2.8.1] показано, что $L_m(\mathbb{A})$ является верхней полурешеткой, причем $d_{m\Sigma}(B) \vee d_{m\Sigma}(C) = d_{m\Sigma}(B \oplus C)$.

Покажем, что $L_m(\mathbb{A})$ дистрибутивна. Пусть $\varnothing \ne B, C_0, C_1 \subset A$ такие, что $B \le_{m\Sigma} C_0 \oplus C_1$. Тогда существует бинарный $\Sigma_A$-предикат $R$ из определения. Обозначим $\Phi(x_0, x_1)$ $\Sigma$-формулу такую, что $R = \Phi^{\mathbb{A}}[x_0, x_1]$.

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\mathbf{A} \models \forall x_0 \forall x_1 (\Phi(x_0, x_1) \to \exists x_2((x_1 = \langle x_2, 0\rangle) \vee (x_1 = \langle x_2, 1\rangle))).$$

Действительно, пусть $a \in A \setminus C_0$. Тогда $\Sigma$-формула

$$(\exists x_2((x_1 = \langle x_2, 0\rangle) \vee (x_1 = \langle x_2, 1\rangle)) \wedge \Phi(x_0, x_1))$$
$$\vee \exists x_3 \forall x_2 \in TC(x_3)(x_3 \neq \langle x_2, 0\rangle) \wedge (x_3 \neq \langle x_2, 1\rangle) \wedge \Phi(x_0, x_3) \wedge (x_1 = \langle a, 0\rangle))$$

обладает этим свойством.

По принципу $\Sigma$-рефлексии существует $\Delta_0$-формула такая, что $\Phi(x_0, x_1) \equiv_{\mathrm{KPU}} \exists x_2 \Phi'(x_0, x_1, x_2)$. Покажем, что для множеств

$$B_i \leftrightharpoons \{\langle a, b, c\rangle \mid \Phi'(a, b, \langle c, i\rangle) \text{ для некоторого } c \in C_i\}, \ i = 0, 1,$$

выполняются условия из определения дистрибутивной полурешетки, а именно, $B_0 \oplus B_1 \equiv_{m\Sigma} B$ и $B_i \leq_{m\Sigma} C_i, i = 0, 1$. Зафиксируем произвольные элементы $b' \notin B$, $c'_0 \notin C_0$, $c'_1 \notin C_1$. Тогда предикат

$$F \leftrightharpoons \left\{ \langle a, b\rangle \;\middle|\; \bigvee_{i=0}^{1} \exists u \exists c(\Phi'(u, a, \langle c, i\rangle) \wedge (b = \langle\langle u, a, c\rangle, i\rangle)) \right\}$$

осуществляет $m\Sigma$-сводимость множества $B$ к множеству $B_0 \oplus B_1$.

Также легко убедиться в том, что предикаты

$$R_i \leftrightharpoons \{\langle a, b\rangle \mid \exists u \exists c((a = \langle u, c, b\rangle) \wedge \Phi'(u, c, \langle b, i\rangle)$$
$$\vee \exists d((a = \langle u, c, d\rangle) \wedge \neg\Phi'(u, c, \langle d, i\rangle) \wedge (b = c'_i))$$
$$\vee \forall u \in TC(a) \forall c \in TC(a) \forall d \in TC(a)((a \neq \langle u, c, d\rangle) \wedge (b = c'_i))\},$$

$$Q_i \leftrightharpoons \{\langle a, b\rangle \mid \exists u \exists c((a = \langle u, b, c\rangle) \wedge \Phi'(u, b, \langle c, i\rangle)$$
$$\vee \exists d((a = \langle u, d, c\rangle) \wedge \neg\Phi'(u, d, \langle c, i\rangle) \wedge (b = b'))$$
$$\vee \forall u \in TC(a) \forall c \in TC(a) \forall d \in TC(a)((a \neq \langle u, c, d\rangle) \wedge (b = b'))\}$$

осуществляют $m\Sigma$-сводимость множества $B_i$ к $C_i$ и $B$ соответственно, где $i = 0, 1$. □

В дальнейшем будем использовать обозначение $L_m(\mathfrak{M})$ для верхней полурешетки $L_m(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ $m\Sigma$-степеней наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

ЛЕММА 13. *Пусть $\gamma^*$ является $\Sigma$-определимой биекцией между* $\mathbb{HF}(\varnothing)$ *и* $\mathbb{N}(3)$, *а* $A, B \subset \mathrm{HF}(\varnothing)$. *Тогда выполняются следующие условия:*

а) $((A \leq_{m\Sigma} B) \Leftrightarrow (\gamma^*(A) \leq_m \gamma^*(B)))$;

б) $\gamma^*(A) \equiv_{m\Sigma} A$.

ЛЕММА 14. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель простой теории $T$ и $Q$ — произвольное формульное подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Тогда $Q \equiv_{m\Sigma} Q_0$ для некоторого подмножества $Q_0 \subseteq \mathrm{HF}_{\varnothing}$ $(\subseteq \mathrm{HF(M)})$ того же класса в иерархии, что и множество $Q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi(x_0, s_0, \ldots, s_{k-1})$ — формула с параметрами из M такая, что $Q = \Phi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x_0]$. Рассмотрим обогащение $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, c_0, \ldots, c_{k-1}\rangle$ модели $\mathfrak{M}$. По теореме 3 и замечанию 1 предикат $\eta_{\mathfrak{M}'}$ является $\Delta_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')}$-предикатом. Из определения $\Delta$-предиката сразу следует, что предикат $\eta_{\mathfrak{M}'}$ будет $\Delta_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$-определим. Тогда множество

$$Q_0 \rightleftharpoons \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \langle n, m, x, \rangle \in \eta_{\mathfrak{M}'} \text{ для некоторого } x \in Q\} \qquad (5)$$

удовлетворяет условию леммы, причем предикат $\eta^{-1}_{\mathfrak{M}'}$ осуществляет $m\Sigma$-сводимость множества $Q$ к множеству $Q_0$; эквивалентность следует из замечаний 3 и 1. То, что множества лежат в одном классе иерархии, следует из определения $m\Sigma$-сводимости. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (об идеале). *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель простой теории и $\mathcal{HF}_{\varnothing}$ — множество всех $m\Sigma$-степеней, содержащих подмножества $\mathrm{HF}_{\varnothing}$ $(\subseteq \mathrm{HF(M)})$. Тогда $\mathcal{HF}_{\varnothing}$ является идеалом полурешетки $m\Sigma$-степеней допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{HF}_{\varnothing}$ справедливо $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \in \mathcal{HF}_{\varnothing}$.

Проверим, что второе условие определения идеала также выполняется. Предположим, что $\mathbf{b} \in \mathcal{HF}_{\varnothing}$ и $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Необходимо показать, что существует множество $Q_0 \in \mathcal{P}(\mathrm{HF}_{\varnothing}) \cap \mathbf{a}$. Пусть $Q$ — произвольное множество, принадлежащее степени $\mathbf{a}$, и $H_0 \subseteq \mathrm{HF}_{\varnothing}$ — множество, принадлежащее степени $\mathbf{b}$. Тогда согласно определению существует $\Sigma$-предикат $R$, который сводит множество $Q$ к множеству $H_0$. Пусть $\Phi(x_0, x_1)$ — это $\Sigma$-формула с параметрами $s_0, \ldots, s_{m-1}$ из M, для которой выполняется соотношение

$R = \Phi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x_0, x_1]$. Рассмотрим обогащение $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, c_0, \ldots, c_{k-1} \rangle$ модели $\mathfrak{M}$. Нетрудно убедиться в том, что если $x \in Q$ и $t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')}(x) = t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')}(y)$, то $y \in Q$. Тогда в силу замечания 1 и последнего факта множество $Q_0$, построенное по правилу (5), принадлежит $\mathcal{P}(\mathrm{HF}_{\varnothing}) \cap \mathbf{a}$ (дальнейшие рассуждения совпадают с доказательством леммы 14). □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Пусть $\mathbb{A}$ — некоторая KPU-модель и $\mathbf{b} \in L_m(\mathbb{A})$. Будем говорить, что $\mathbf{b}$ — *перечислимая* (*определимая*) $m\Sigma$-степень, если существует $\Sigma_A$-подмножество (формульное подмножество) $B \in \mathbf{b}$.

**ТЕОРЕМА 5.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель простой теории. Тогда выполняются следующие условия:*

а) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ (посредством отождествления натуральных чисел с ординалами надстройки) индуцирует изоморфизм между полурешетками $L^0_m$ рекурсивно перечислимых $m$-степеней и $L^0_m(\mathfrak{M})$ перечислимых $m\Sigma$-степеней допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$;*

б) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ индуцирует изоморфизм между полурешетками $L'_m$ арифметических $m$-степеней и $L'_m(\mathfrak{M})$ определимых $m\Sigma$-степеней допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$;*

в) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ индуцирует изоморфизм множества $m$-степеней на идеал $\mathcal{HF}_{\varnothing}$ множества $m\Sigma$-степеней наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из предложения 7, лемм 9, 12, 14 и 13. □

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. Л. Ершов*, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1996.

2. *В. А. Руднев*, О существовании неотделимой пары в рекурсивной теории допустимых множеств, Алгебра и логика, **27**, N 1 (1988), 48–56.

3. *В.А. Руднев*, Универсальная рекурсивная функция на допустимых множествах, Алгебра и логика, **25**, N 4 (1986), 425—435.
4. *Г. Кейслер , Ч. Ч. Чен*, Теория моделей, М., Мир, 1977.
5. *Р. Ю. Вайценавичюс*, Вычислимые нумерации вычислимых функционалов на $RL$-допустимых множествах, Матем. логика и ее прим., Вильнюс, Ин-т мат. и киб. АН Лит. ССР, N 5, 1987, 123—132.
6. *А. И. Стукачев*, Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках, в сб.: "Обощенная вычислимость и определимость" (Вычислительные системы, **161**), Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 1998, 3—14.
7. *Н. Г. Хисамиев*, О сильно конструктивизируемых моделях разрешимой теории, Изв. Акад. наук Каз. ССР, сер. физ.-матем., N 1, 1974, 83—84.
8. *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972.
9. *Ю. Л. Ершов*, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.


Адрес автора:

Поступило 14 мая 1999 г.

ПУЗАРЕНКО Вадим Григорьевич,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
просп. акад. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН.
e-mail: vagrig@math.nsc.ru