



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Круглов, О. В. Починка, Графовый критерий топологической эквивалентности  $\Omega$ -устойчивых потоков на поверхностях,  
*Журнал СВМО*, 2016, том 18, номер 3, 41–48

<https://www.mathnet.ru/svmo605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

30 апреля 2025 г., 15:48:42



УДК 517.9

# Графовый критерий топологической эквивалентности $\Omega$ -устойчивых потоков на поверхностях

© В.Е. Круглов<sup>1</sup>, О.В. Починка<sup>2</sup>

**Аннотация.** Изучение динамики потока на поверхностях путем разбиения фазового пространства на ячейки с одинаковым предельным поведением траекторий внутри ячейки восходит к классическим работам А. А. Андронова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович, А. Г. Майера. Типы ячеек (которых конечное число) и их примыкание друг к другу полностью определяют класс топологической эквивалентности потока с конечным числом особых траекторий. Если в каждой ячейке грубого потока без периодических орбит выбрать по одной траектории, то ячейки распадаются на, так называемые, треугольные области, которые имеют один единственный тип. Комбинаторное описание такого разбиения приводит к трехцветному графу А. А. Ошемкова и В. В. Шарко, вершины которого соответствуют треугольным областям, а ребра — связывающим их сепаратрисам. Ими доказано, что два таких потока топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их трехцветные графы изоморфны. В той же работе дана полная топологическая классификация потоков Морса-Смейла на языке атомов и молекул. В настоящей работе динамика  $\Omega$ -устойчивых потоков на поверхностях дана с помощью особых ориентированных графов с использованием четырехцветных графов.

**Ключевые слова:** многоцветный граф, топологический инвариант,  $\Omega$ -устойчивый поток

## 1. Введение

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях состоит в выделении на несущем многообразии областей с предсказуемым поведением траекторий — *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1] 1937 года, в которой они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \quad (*)$$

где  $v(x)$  —  $C^1$ -векторное поле, заданное в круге на плоскости, граница которого является кривой без контакта, и нашли критерий грубости системы (\*).

В работах Е. А. Леонтович-Андроновой и А. Г. Майера [5], [6] рассматривался более общий класс динамических систем, и их классификация также была основана на идеях о выделении множества специальных траекторий, относительно положение которых (схема Леонтович-Майера) полностью определяет качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения — незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А. Г. Майером [7] в 1939 году. В 1971 в работе [10] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, опять-таки изучив все допустимые ячейки для них и введя комбинаторный инвариант — *ориентированный граф*, обобщающий схему Леонтович-Майера. В 1976 году Д. Нейманом и Т. О'Брайеном [8] на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые *регулярные потоки* — потоки

<sup>1</sup> Студент ННГУ им. Н. И. Лобачевского; kruglovslava21@mail.ru

<sup>2</sup> Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией. В 1998 году А. А. Ошемков и В. В. Шарко [9] ввели новый инвариант для потоков Морса на поверхностях – *трехцветный граф*, и описали алгоритм распознавания изоморфности таких графов, который, однако, не является *эффективным*, то есть время его работы не ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. В той же работе они получили полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях в терминах атомов и молекул, введённых в работе А. Т. Фоменко [2].

В настоящей работе рассматривается класс  $G$ , состоящий из  $\Omega$ -устойчивых потоков  $\phi^t$  на поверхностях  $S$ . Каждому потоку из класса  $G$  ставится в соответствие ориентированный граф с вершинами четырёх цветов, соответствующих областям, на которые поверхность  $S$  делится граничными окружностями окрестностей предельных циклов; каждое ребро графа соответствует общей границе этих областей и ориентировано в соответствии с положительным направлением движения по траекториям, пересекающим эту границу. Вершинам, соответствующим областям без особых траекторий, присвоен *вес*, характеризующий поведение траекторий в этих областях; для описания областей, содержащих седловые точки, соответствующие этим областям вершины оснащаются *четырёхцветным графом*. Устанавливается, что изоморфность оснащенных графов является критерием топологической эквивалентности  $\Omega$ -устойчивых потоков.

## 2. Ориентированный граф $\Omega$ -устойчивого потока

Из критерия  $\Omega$ -устойчивости [11] следует, что потоки класса  $G$  имеют неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических неподвижных точек и замкнутых траекторий и не имеют *циклов*, то есть наборов неподвижных точек

$$x_1, \dots, x_k, x_{k+1} = x_1$$

со свойством

$$W_{x_i}^s \cap W_{x_{i+1}}^u \neq \emptyset, i = 1, \dots, k.$$

При этом в классе  $G$  системы могут быть как структурно устойчивыми, так и нет, а определяется это отсутствием или наличием *связок* – сепаратрис, идущих из седла в седло. Условие  $\Omega$ -устойчивости влечет тот факт, что связки потока из класса  $G$  не образуют замкнутых кривых.

Если поток  $\phi^t \in G$  не имеет ни седловых неподвижных точек, ни предельных циклов, то он имеет в точности две неподвижные точки: источник и сток, все такие потоки топологически эквивалентны. Поэтому везде далее мы будем предполагать, что поток  $\phi^t \in G$  имеет либо хотя бы одну седловую точку, либо хотя бы один предельный цикл.

Согласно [1], любой предельный цикл потока  $\phi^t \in G$  имеет окрестность, гомеоморфную кольцу либо плёнке Мёбиуса, с границей, трансверсальной траекториям потока  $\phi^t$ , не содержащей других циклов и неподвижных точек. Выберем вокруг каждого предельного цикла потока  $\phi^t$  такую окрестность. Будем обозначать элементы множества граничных окружностей этих окрестностей как  $R_i, i = \overline{1, l}$ . Набор всех  $R_i$  для данного  $\phi^t$  назовём *разрезающим набором*, а его элементы – *разрезающими окружностями*.

Положим  $\hat{S} = S \setminus \bigcup_{i=1}^l R_i$ . Компоненту связности множества  $\hat{S}$  назовём *элементарной областью*. Элементарные области очевидно могут быть четырёх типов:

- 1) Область типа  $\mathcal{S}$ , содержащая единственный предельный цикл и не содержащая неподвижных точек;
- 2) Область типа  $\mathcal{A}$ , содержащая единственный источник или единственный сток и не содержащая предельных циклов и других неподвижных точек;
- 3) Область типа  $\mathcal{M}$ , содержащая хотя бы одну седловую неподвижную точку и не содержащая предельных циклов.
- 4) Область типа  $\mathcal{E}$ , не содержащая особых траекторий.

**О п р е д е л е н и е 2.1.** Ориентированный граф  $\Upsilon_{\phi^t}$  назовем графом потока  $\phi^t \in G$ , если

- (1) вершины графа взаимно однозначно соответствуют элементарным областям и, соответственно, раскрашены в один из четырёх цветов  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{E}$  или  $\mathcal{M}$ ;
- (2) ребра графа взаимно однозначно соответствуют разрезающим окружностям, и каждое ребро соединяет те вершины, которым соответствуют области, имеющие общей соответствующую этому ребру разрезающую окружность; ориентация на ребре соответствует положительному направлению движения траекторий, пересекающих окружность.

При этом из структуры потока  $\phi^t$  и структуры разрезающего набора следует, что

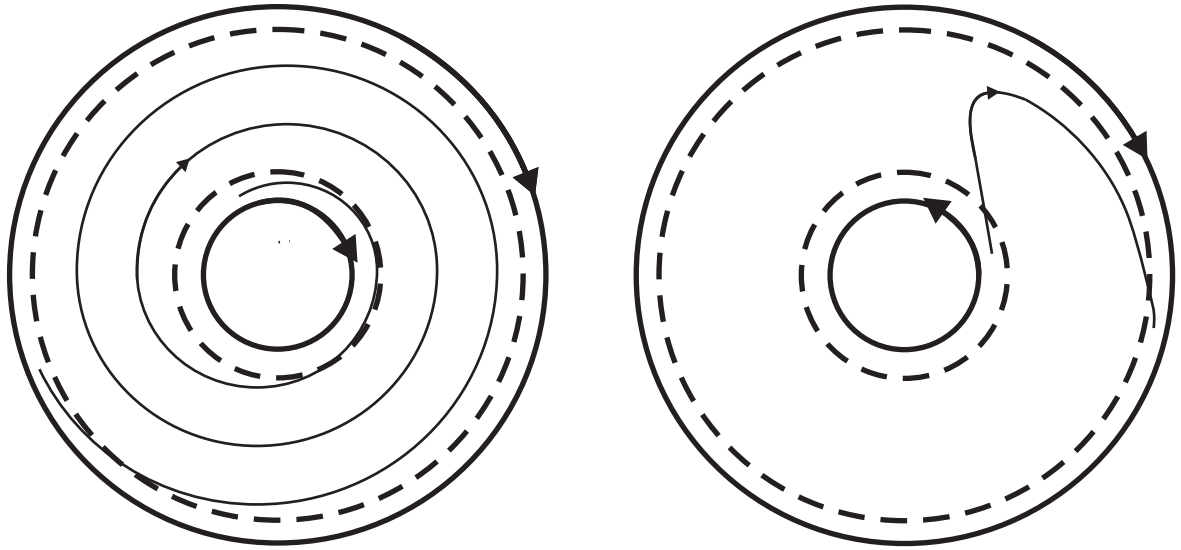
- 1)  $\mathcal{M}$ -вершина может быть соединена только с  $\mathcal{S}$ -вершинами, причём единственным ребром с каждой из этих вершин;
- 2)  $\mathcal{E}$ -вершина может быть инцидентна только двум рёбрам, которые соединяют её с двумя различными  $\mathcal{S}$ -вершинами, причём одно из этих рёбер входит в  $\mathcal{E}$ -вершину, другое выходит;
- 3)  $\mathcal{A}$ -вершина может быть соединена только с  $\mathcal{S}$ -вершиной, причём единственным ребром;
- 4)  $\mathcal{S}$ -вершина имеет степень либо 1, либо 2, причём если её степень 2, то оба ребра либо входят в вершину, либо выходят из неё.

Разумеется, изоморфности ориентированных графов недостаточно в общем случае для эквивалентности рассматриваемых потоков. Однако, оснатив ориентированный граф  $\Upsilon_{\phi^t}$  дополнительной информацией, мы получим оснащенный граф  $\Upsilon_{\phi^t}^*$ , класс изоморфности которого уже есть полный топологический инвариант для  $\Omega$ -устойчивых потоков.

### 3. Оснащение ориентированного графа

Потоки в областях, соответствующих вершине типа  $\mathcal{A}$ , бывают из двух классов эквивалентности (бассейн стока или бассейн источника), и на графе это видно по направлению ребра, которому инцидентна эта вершина. Потоки в областях, соответствующих вершине типа  $\mathcal{S}$ , бывают из четырёх классов эквивалентности (кольцо с устойчивым предельным циклом, кольцо с неустойчивым, плёнка Мёбиуса с устойчивым, плёнка Мёбиуса с неустойчивым предельным циклом), на графе это видно по направлениям рёбер и количеству рёбер, которым инцидентна эта вершина. Потоки в областях, соответствующих вершине типа  $\mathcal{E}$ , бывают из двух классов эквивалентности, соответствующих согласованной и несогласованной ориентации предельных для траекторий  $\mathcal{E}$ -области циклов (см. рисунок 3.1). Однако структура  $\mathcal{E}$ -области не определяется ориентированным графом, поэтому соответствующей ей вершине мы будем приписать вес «+» в согласованном случае и вес «-» – в не согласованном. Потоки же в  $\mathcal{M}$ -областях могут быть из счётного числа классов, и это не определяется ориентированным графом, поэтому для описания

топологической структуры потока в этих областях мы будем оснащать соответствующую им вершину *четырёхцветным графом*.



Р и с у н о к 3.1

Случаи согласованной (слева) и не согласованной (справа) ориентации циклов, предельных для траекторий некоторой  $\mathcal{E}$ -области. Жирным нарисованы предельные циклы, пунктиром – разрезающие окружности

Более детально.

Рассмотрим некоторую  $\mathcal{M}$ -область; это либо многообразие с краем, либо вся поверхность  $S$ . Продолжим поток  $\varphi^t|_{\mathcal{M}}$  до  $\Omega$ -устойчивого потока  $f^t|_{\mathcal{M}}$ , где  $\mathcal{M}$  – замкнутая поверхность такая, что  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}$  состоит из конечного числа дисков, на каждом из которых  $f^t$  имеет в точности одну неблуждающую точку – сток или источник.

Обозначим через  $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$  множество всех стоков, сёдел, источников потока  $f^t$  соответственно. По определению области  $\mathcal{M}$  поток  $f^t$  имеет хотя бы одну седловую точку. Положим

$$\tilde{M} = M \setminus (\Omega_{f^t}^0 \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup \Omega_{f^t}^2).$$

Компонента связности множества  $\tilde{M}$  называется *ячейкой*. Согласно работе [4], в границу каждой ячейки  $J$  входит единственный источник  $\alpha$  и единственный сток  $\omega$ , а вся ячейка является объединением траекторий, идущих из  $\alpha$  в  $\omega$ . Выберем одну траекторию  $\theta_J$  в каждой ячейке  $J$  и будем называть её *t-кривой*. Положим

$$\mathcal{T} = \bigcup_{J \subset \tilde{S}} \theta_J, \quad \bar{M} = \tilde{M} \setminus \mathcal{T}.$$

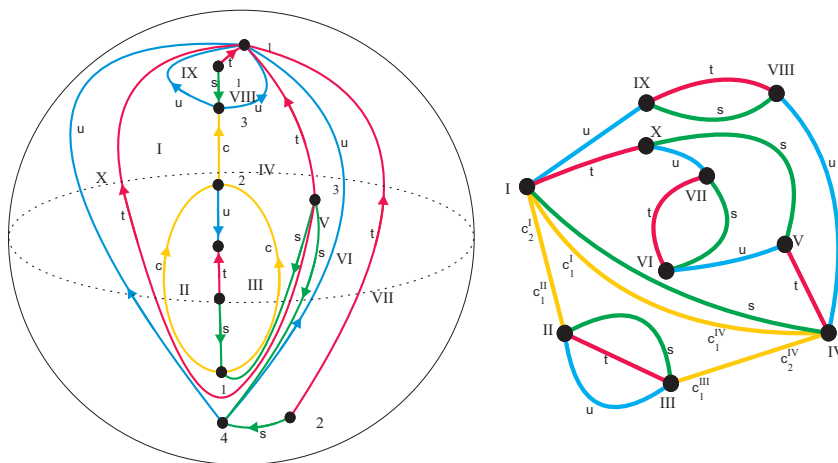


Обозначим через  $\Delta_{f^t}$  множество всех многоугольных областей потока  $f^t$ . Поставим в соответствие потоку  $f^t$  граф  $\Gamma_{\mathcal{M}}$  следующим образом (см. для примера рисунок 3.4):

1) вершины графа  $\Gamma_{\mathcal{M}}$  взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям множества  $\Delta_{f^t}$ ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета  $s$ ,  $t$ ,  $u$  или  $c$ , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую  $s$ -,  $t$ -,  $u$ - или  $c$ -кривую, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между ребрами графа и  $s$ -,  $t$ -,  $u$ - и  $c$ -кривыми;

3) при наличии более чем одного  $c$ -ребра, выходящего из некоторой вершины графа  $\Gamma_{\mathcal{M}}$ ,  $c$ -рёбра считаются упорядоченными согласно порядку появления  $c$ -кривых при обходе границы соответствующей области.



Р и с у н о к 3.4

Пример потока  $f^t$  для некоторого  $\phi^t \in G$  и его четырёхцветный граф

Назовём  $st$ -циклом ( $tu$ -циклом) цикл графа  $\Gamma_{\mathcal{M}}$ , состоящий только из рёбер цветов  $s$  и  $t$  ( $t$  и  $u$ ).

Два четырёхцветных графа  $\Gamma_{\mathcal{M}}$  и  $\Gamma_{\mathcal{M}'}$ , соответствующие  $\phi^t|_{\mathcal{M}}$  и  $\phi^{t'}|_{\mathcal{M}'}$  соответственно, назовём *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение  $\psi$  вершин и рёбер одного графа соответственно в вершины и рёбра другого графа с сохранением цветности всех рёбер и нумерации  $c$ -рёбер.

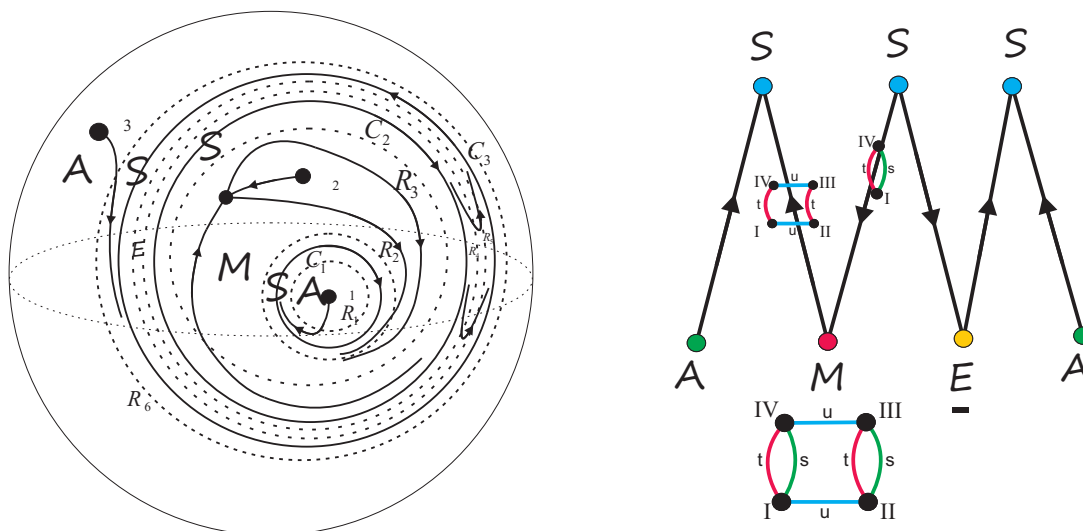
Справедлива следующая теорема, непосредственно следующая из [3].

**Т е о р е м а 3.1.** *Графы  $\Gamma_{\mathcal{M}}$  и  $\Gamma_{\mathcal{M}'}$  изоморфны тогда и только тогда, когда  $\phi^t|_{\mathcal{M}}$  и  $\phi^{t'}|_{\mathcal{M}'}$  топологически эквивалентны.*

## 4. Формулировка результатов

**О п р е д е л е н и е 4.1.** *Оснащённым графом  $\Upsilon_{\phi^t}^*$  потока  $\phi^t \in G$  называется его ориентированный граф  $\Upsilon_{\phi^t}$ , дополненный следующими данными:*

- (1) каждой  $\mathcal{E}$ -вершине приписан вес «+» или «-»;
- (2) каждой  $\mathcal{M}$ -вершине приписан четырёхцветный граф  $\Gamma_{\mathcal{M}}$ ;
- (3) каждому ребру  $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$  ( $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$ ) приписан  $tu$ -цикл ( $st$ -цикл)  $P_{\mathcal{M}, \mathcal{S}}$  графа  $\Gamma_{\mathcal{M}}$ , рёбра которого соответствуют цветным кривым потока  $f^t$ , пересекающим граничную окружность окрестности устойчивого (неустойчивого) предельного цикла (см. рисунок 4.1).



Р и с у н о к 4.1

Поток  $\phi^t$  и граф  $\Upsilon_{\phi^t}^*$ . Через  $\alpha_i, i = \overline{1,3}$  обозначены источники, через  $\sigma$  – седло, через  $C_i, i = \overline{1,3}$  – предельные циклы, через  $R_i, i = \overline{1,6}$  и пунктиром – граничные окружности элементарных областей

**О п р е д е л е н и е 4.2.** Два графа  $\Upsilon_{\phi^t}^*$  и  $\Upsilon_{\phi^{t'}}^*$  назовём изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие  $\xi$  ребер и вершин графа  $\Upsilon_{\phi^t}^*$  ребрам и вершинам графа  $\Upsilon_{\phi^{t'}}^*$  такое, что:

- 1)  $\xi$  сохраняет цветность вершин, направление рёбер и веса  $\mathcal{E}$ -вершин;
- 2) для вершин  $M$  и  $\xi(M)$  существует изоморфизм  $\psi$  графов  $\Gamma_M, \Gamma_{\xi(M)}$  такой, что  $\psi(P_{M,s}) = P_{\xi(M),\xi(s)}$ .

**Т е о р е м а 4.1.** Поток  $\phi^t$  и  $\phi^{t'}$  из класса  $G$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их оснащенные графы  $\Upsilon_{\phi^t}^*$  и  $\Upsilon_{\phi^{t'}}^*$  изоморфны.

*Благодарности:* Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект № 98 «Топологические методы в динамике») и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-03689-а, 16-51-10005-Ко\_а).

Дата поступления 30.11.2016

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., «Грубые системы», *Доклады Академии наук СССР*, **14:5** (1937), 247-250.
2. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т., «Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности», *УМН*, **45:2**(272) (1990), 49-77.
3. Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В., «Графовый критерий топологической эквивалентности  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях и эффективный алгоритм для его применения», *Журнал СВМО*, **18:2** (2016), 47-58.



4. Круглов В. Е., Митрякова Т. М., Починка О. В., “О типах ячеек Омега-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях”, *Динамические системы*, **5(33)**:1-2 (2015), 43-49.
5. Леонтович Е. А., Майер А. Г., “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251-257.
6. Леонтович Е. А., Майер А. Г., “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557-560.
7. Майер А. Г., “Грубые преобразования окружности”, *Уч. Зап. ГГУ. Горький, публикации. ГГУ*, **12** (1939), 215-229.
8. Neumann D., O'Brien T., “Global structure of continuous flows on 2-manifolds”, *J. Diff. Eq.*, **22**:1 (1976), 89-110.
9. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93-140.
10. Peixoto M., *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971.
11. Pugh C., Shub M., “ $\Omega$ -stability for flows”, *Inven. Math.*, **11** (1970), 150-158.

## Graph topological equivalence criterion for $\Omega$ -stable flows on surfaces

© V. E. Kruglov<sup>3</sup>, O. V. Pochinka<sup>4</sup>

**Abstract.** Study of flow dynamics on surfaces by dividing a phase space into cells with the same limit behavior of trajectories within the cell goes back to the classical works of A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, E. A. Leontovich and A. G. Mayer. Types of cells (which are finite in number) and their adjacency to each other fully determine the class of topological equivalence of a flow with finite number of singular trajectories. If we select one trajectory in each cell of the rough stream without periodic orbits, the cells break up into so-called triangular regions which have the same single type. Combinatorial description of such a partition leads to three-colored graph of A. A. Oshemkov and V. V. Sharko; the vertices of that graph correspond to the triangular areas and edges correspond to separatrices that link them. These scientists demonstrated that two such flows are topologically equivalent if and only if their three-colored graphs are isomorphic. In the same paper they gave full topological classification of the Morse-Smale flows in terms of atoms and molecules. In present paper the dynamics of  $\Omega$ -stable flows on surfaces is described with help of special oriented graphs and four-colored graphs.

**Key Words:** multicolored graph, topological invariant,  $\Omega$ -stable flow

<sup>3</sup> Student of Lobachevsky State University, Nizhni Novgorod; kruglovlava21@mail.ru

<sup>4</sup> Professor of Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru