

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Макаров, М. Я. Сафин, Определение видимых участков непрозрачных поверхностей пространственных объектов,  
*Исслед. по информ.*, 2007, выпуск 12, 131–140

<https://www.mathnet.ru/ipi193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

27 апреля 2025 г., 09:36:36



# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМЫХ УЧАСТКОВ НЕПРОЗРАЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

И. И. Макаров, М. Я. Сафин

## Введение

Рассматриваемый в данной статье метод может быть использован на предварительных шагах во всех системах генерации двумерных проекций трехмерных объектов, основанных на известных алгоритмах визуализации [1] (as Z-buffer, Ray casting and scan-line). Он позволяет предварительно обработать все множество поверхностей трехмерных объектов с целью определения тех из них, которые являются видимыми. Другим применением этого метода является получение теней (shadows). Так как предлагаемый метод определения видимых поверхностей из точки наблюдения (далее "точка зрения") может быть использован для определения поверхностей, видимых из источника света, то поверхности, невидимые из точки источника света, определяются как затененные.

Для решения этих задач предлагаемый метод допускает различные варианты разбиения области проецирования на подобласти. Одним из основных моментов метода является выбор условий, при выполнении которых можно по характеру распределения видимых поверхностей вдоль контура подобласти определить все видимые участки поверхностей, проекции которых (участков) целиком лежат внутри этой подобласти. Главное назначение этих условий – это замена процедуры обработки всех внутренних точек подобласти на процедуру обработки только точек, лежащих на контуре этой подобласти. Эта замена позволяет существенно сократить объем вычислений, необходимых для определения видимых участков поверхностей.

Для определения распределения видимых поверхностей вдоль контура подобластей применяются алгоритмы, подобные алгоритмам сканирования линий [2, 3]. В этих алгоритмах необходимо определить точки пересечения этого контура с границами проекций поверхностей. В настоящей статье предполагается, что для определения точек пересечения контура области с границами проекций поверхностей может быть использован метод, который позволяет существенно сократить объем вычислений. Предварительно для каждого сегмента границы проекции поверхности определяется та часть контура области, с которой он точно пересекается, т.е. для каждого контура заранее можно сформировать множество сегмен-

тов, с которыми он точно пересекается. Это позволяет сократить (приблизительно в 10 раз) количество операций тестирования, необходимых для определения точек пересечения контура подобласти с границами проекций поверхностей. Описание процедуры формирования множества сегментов, пересекающих контуры областей, см. в [4].

### Основные понятия и определения

Предлагаемый метод может быть применен для получения видимых участков непрозрачных поверхностей взаимно-непересекающихся пространственных объектов, проецируемых двумя возможными способами на плоскость проецирования.

Первый способ – это перспективное проецирование. Для его осуществления в пространстве выбирается точка, из которой выходят все лучи проецирования. Далее, эта точка будет называться точкой зрения. Для каждой точки поверхности пространственного объекта проводится луч, выходящий из точки зрения и проходящий через эту точку. Точка пересечения этого луча с плоскостью проецирования называется проекцией исходной точки. Под направлением проецирования понимается направление от проецируемой точки к точке зрения. Совокупность точек пересечения лучей проецирования с плоскостью проецирования называется проекцией совокупности исходных точек.

Второй способ проецирования – это параллельное проецирование. При использовании этого способа все лучи проецирования параллельны друг другу и направлены в одну сторону. Все остальные определения те же, что и при перспективном способе проецирования.

Предлагаемый метод формирования плоского изображения применим к трехмерным объектам, поверхности которых имеют внутреннюю и внешнюю стороны. Сами поверхности образованы множеством граней, которые также имеют внутреннюю и внешнюю стороны. Далее предполагается, что грани – это плоские выпуклые многоугольники. Так как поверхности трехмерных объектов не пересекаются, следовательно, грани, образующие их, также не могут пересекаться.

Проекция вершины грани – это точка пересечения луча проецирования, проходящего через вершину, с плоскостью проецирования (точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $R'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $Q'$  на рис. 1); проекция ребра грани – это отрезок, лежащий в плоскости проецирования и соединяющий проекции вершин грани, соответствующие этому ребру (отрезки  $A'B'$ ,  $B'R'$ ,  $R'A'$ ,  $C'D'$ ,  $D'Q'$ ,  $Q'C'$  на рис. 1); проекция грани – это внутренняя часть плоскости проецирования, ограниченная замкнутой ломаной линией, состоящей из всех проекций ребер грани (треугольники  $A'B'R'$  и  $C'D'Q'$  на рис. 1).

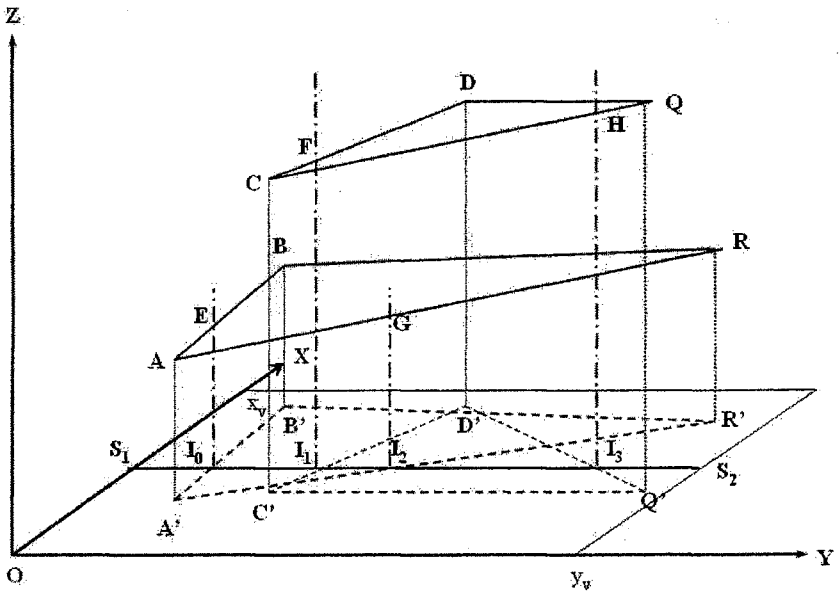


Рис. 1

Для реализации метода первоначально среди всех непрозрачных граней определяется множество граней, которые обращены своей внешней стороной к точке зрения, так как не может существовать изображения непрозрачных граней, обращенных своей внутренней стороной к точке зрения (в литературе это известно как *back-face culling* процедура). Сделать это можно, например, при помощи вычисления скалярного произведения любого вектора, перпендикулярного этой грани, расположенного с внешней стороны грани и выходящего из точки, лежащей в грани, с вектором, выходящим из точки зрения и оканчивающимся в точке, из которой выходит перпендикулярный вектор. Если это скалярное произведение больше нуля, то грань обращена своей внешней стороной к точке зрения.

Далее, для определения области плоскости проецирования, содержащей проекции всех оставшихся граней целиком, используются координаты вершин всех граней. Способ определения охватывающей области на базе используемых координат зависит от области применения описываемого метода, наиболее удобный и часто применяемый – это прямоугольная область, внутри которой лежат проекции всех граней, а стороны параллельны осям  $X$  и  $Y$  (например, пунктирная область на рис. 2).

Участок поверхности является видимым внутри охватывающей проекции, если видима хотя бы одна его точка, т.е. луч проецирования, про-

ходящий через нее и входящий в точку зрения, не пересекается ни с одной непрозрачной поверхностью.

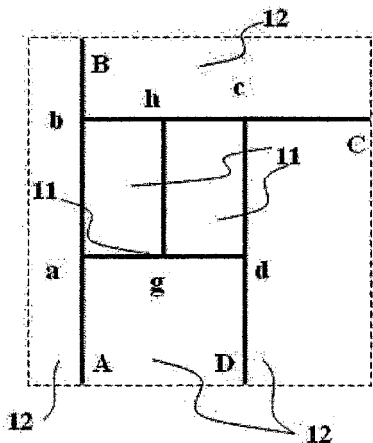


Рис. 2

### Иерархическое разделение областей плоскости проецирования

Для решения задач визуализации, как правило, необходимо определить видимые участки поверхностей, проекции которых на плоскость проецирования целиком лежат внутри некоторых подобластей, имеющих замкнутый контур. Например, подобласть, соответствующая плоскости экрана дисплея, или подобласть, в которой целиком лежат проекции видимых участков поверхностей (для задачи получения теней).

Ниже для простоты изложения предполагается, что процесс последовательного деления охватывающей области начинается с прямоугольной области и осуществляется прямыми линиями, параллельными осям  $X$  и  $Y$  (рис. 2), причем каждая последующая линия перпендикулярна предшествующей. В случае формирования плоского изображения на дисплей в качестве первых четырех разделительных линий используются прямые линии, проходящие через стороны экрана дисплея (предполагается, что область  $abcd$  на рис. 2 соответствует плоскости экрана дисплея).

Процесс рекурсивного деления области начинается с проверки двух условий прекращения процесса деления. Первое условие – это минимальное количество граней, видимых вдоль контура области, и отсутствие видимых граней, проекции которых целиком лежат внутри рассматриваемой области. Второе условие – это достижение областью определенных заранее минимальных размеров (минимальное количество граней, видимых вдоль контура области, и минимальный размер области оп-

ределяются заранее и являются параметрами метода). Хотя для исходной охватывающей области первая часть первого условия выполняется (так как не существует ни одной грани видимой вдоль этого контура, все проекции граней, по определению, лежат внутри этой области), вторая часть первого условия не выполняется (так как, по определению, проекции всех граней целиком лежат внутри рассматриваемой области). Поэтому разделение исходной охватывающей области определяется только вторым условием. Если размеры исходной охватывающей области превышают определенные заранее минимальные размеры, то проводится первая разделительная линия, разбивающая исходную область на две подобласти, для каждой из которых проверяются два вышеопределенных условия. Если эти условия не выполняются, то процесс разделения продолжается рекурсивно для всех вновь получаемых подобластей.

В общем случае, предлагаемый метод допускает различные варианты разбиения плоскости проецирования на подобласти. На рис. 2 показаны подобласти, полученные различными линиями деления (разделительными линиями). Подобласти 11  $abcd$ ,  $abchg$  и  $ghd$ , полученные в результате проведения линий деления  $AB$ ,  $bC$ ,  $cD$ ,  $da$  и  $gh$ , ограничены контурами, составленными частями этих линий деления. А подобласти 12, полученные в результате проведения линий деления  $AB$ ,  $bC$ ,  $cD$  и  $da$ , имеют контуры, составленные частями этих линий деления и частями контуров охватывающей области. Одним из основных моментов метода является выбор условий, при выполнении которых можно по характеру распределения видимых поверхностей вдоль контура подобласти определить все видимые участки поверхностей, проекции которых целиком лежат внутри этой подобласти.

### **Определение видимых граней вдоль контуров областей плоскости проецирования**

Для дальнейшего изложения понадобятся следующие определения.

**О п р е д е л е н и е 1.** Грань видима относительно точки, лежащей в плоскости проецирования, если луч проецирования, проходящий через эту точку, пересекается с этой гранью в точке, лежащей ближе к точке зрения, чем любые другие точки пересечения этого луча проецирования с любыми другими гранями (грань  $CDQ$  видима относительно точки  $I_1$  на рис. 1).

**О п р е д е л е н и е 2.** Грань видима вдоль линии (отрезка), лежащей в плоскости проецирования, если она видима относительно всех точек этой линии (отрезка) (грань  $CDQ$  видима вдоль отрезка  $I_1I_3$  на рис. 1).

**О п р е д е л е н и е 3.** Грань видима, если существует точка, лежащая в плоскости проецирования, относительно которой видна эта грань (грань ABR видима, например, относительно точки  $I_0$  на рис. 1).

**О п р е д е л е н и е 4.** Последовательность расположения граней в направлении проецирования относительно точки, лежащей в плоскости проецирования, — это последовательность пересечения граней лучом проецирования, проходящим через эту точку. Отметим, что первой гранью в этой последовательности идет грань, которая видима относительно упомянутой точки. На рис. 1 для точки  $I_0$  — это {ABR}, для точек  $I_1$  и  $I_2$  — это {CDQ; ABR}, для точки  $I_3$  — это {CDQ}.

**О п р е д е л е н и е 5.** Последовательность расположения граней в направлении проецирования относительно линии (отрезка), лежащей в плоскости проецирования, — это последовательность расположения граней в направлении проецирования относительно всех точек этой линии (отрезка). На рис. 1 для отрезка  $I_0I_1$  — это {ABR}, для отрезка  $I_1I_2$  — это {CDQ; ABR}, для отрезка  $I_2I_3$  — это {CDQ}. Определение видимых поверхностей вдоль контура области основывается на свойствах взаимно-непересекающихся поверхностей. Из этих свойств вытекает очевидная лемма.

**Л е м м а 1.** Если линия (отрезок), лежащая в плоскости проецирования, целиком лежит внутри проекций всех граней, то вдоль этой линии (отрезка) видима только одна грань.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Это свойство следует из того, что рассматриваются только взаимно-непересекающиеся пространственные объекты. Поэтому изменение видимости поверхностей вдоль линии (отрезка) области могут происходить только в точках пересечения этой линии (отрезка) с проекциями ребер граней поверхностей. На рис. 1 для отрезка  $I_1I_2$  — это грань CDQ.

Еще одна очевидная лемма следует из свойств взаимно-непересекающихся поверхностей.

**Л е м м а 2.** Если линия (отрезок), расположенная в плоскости проецирования, целиком лежит внутри проекций всех граней, то последовательность расположения граней в направлении проецирования относительно всех точек этой линии (отрезка) одинакова.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Это свойство следует из того, что рассматриваются только взаимно-непересекающиеся пространственные объекты. Поэтому изменение последовательности расположения граней в направлении проецирования относительно линии (отрезка) области могут происходить только в точках пересечения этой линии (отрезка) с проекциями ребер граней поверхностей. На рис. 1 для отрезка  $I_1I_2$  — это {CDQ; ABR}.

Эти леммы в предположении о наличии процедуры для определения всех точек пересечения линии (отрезка), лежащей в плоскости проецирования, с проекциями ребер граней, позволяют применить следующий алгоритм определения видимых поверхностей вдоль контура области.

Описание алгоритма является рекурсивным, поэтому, первоначально, будет описан переход от контура области, вдоль которого известно распределение видимых поверхностей, к двум контурам подобластей, полученным в результате проведения разделительной линии.

Шаг 1. Определяются все точки пересечения линии деления с проекциями ребер граней (рис. 3). Точки пересечения разбивают разделительную линию на отрезки, ограниченные двумя смежными точками пересечения (отрезок может быть также ограничен одной точкой пересечения и точкой пересечения разделительной линии с другой разделительной линией, используемой на предыдущих этапах). На рис. 3 это отрезки  $S_1 I_0$ ,  $I_0 I_1$ , ...,  $I_n S_2$ .

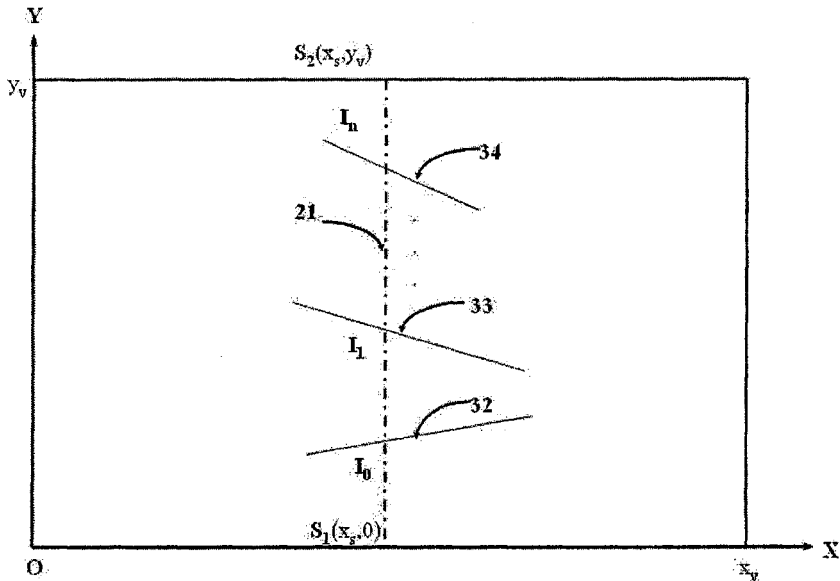


Рис. 3

Шаг 2. Любым способом определяется последовательность расположения граней в направлении проецирования для одного из этих отрезков. Для этого, в силу леммы 2, достаточно определить такую последовательность только для одной точки отрезка. Самый простой способ определения последовательности расположения граней в направлении проецирования – это взятие соответствующей последовательности для отрезка



предшествующей разделительной линии, с которым пересекается текущая разделительная линия (для точки  $S_1$  на рис. 3). В этом случае не надо будет производить никаких вычислений.

Шаг 3. Имея последовательность расположения граней в направлении проецирования для одного отрезка разделительной линии, соответствующая последовательность для всей разделительной линии определяется следующим образом: берется точка пересечения, соответствующая концу отрезка, и определяется ребро, проекция которого пересекается в этой точке. Если грань, соответствующая этому ребру, включена в последовательность расположения граней в направлении проецирования для рассматриваемого отрезка, то эта грань либо удаляется из этой последовательности, если ребро принадлежит только этой грани (на рис. 1 для точки  $I_2$ , конца отрезка  $I_1I_2$ , из  $\{CDQ; ABR\}$  удаляется  $ABR$ , получается  $\{CDQ\}$ ), либо заменяется на другую грань в этой последовательности, если ребро еще принадлежит этой другой грани (на рис. 4 для точки  $I_k$  грань 46 заменяется на грань 47, так как ребро 48 принадлежит двум смежным граням).

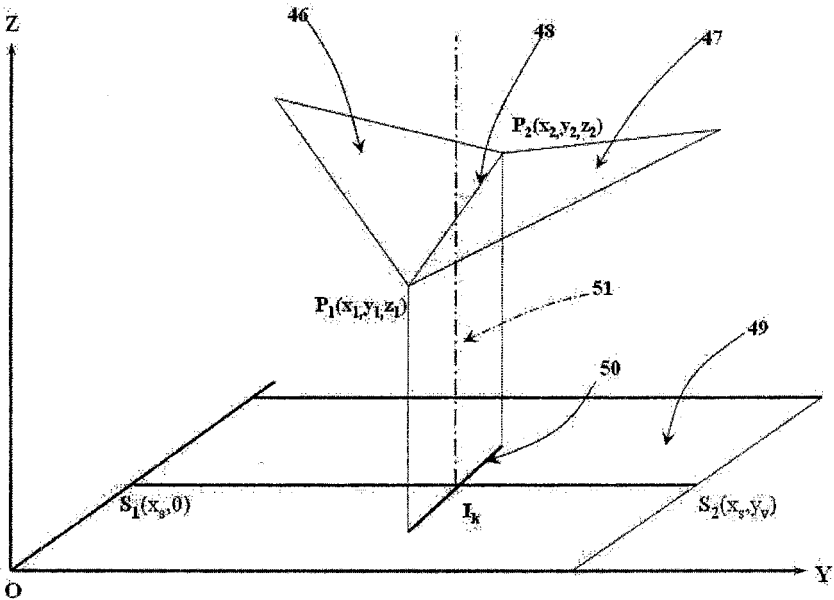


Рис. 4

Если ребро принадлежит грани, которая не включена в последовательность расположения граней в направлении проецирования для рассматриваемого отрезка, то эта грань включается в эту последовательность (на рис. 1 для точки  $I_1$ , конца отрезка  $I_0I_1$  в  $\{ABR\}$  вставляется  $CDQ$ , получается  $\{CDQ; ABR\}$ ). Полученная последовательность будет соответствовать последовательности расположения граней в направлении проецирования для следующего отрезка (на рис. 1 отрезка  $I_1I_2$ ) разделительной линии. Таким образом, последовательно переходя от одного отрезка к другому, определяется последовательность расположения граней в направлении проецирования для всей разделительной линии.

Шаг 4. Последовательность видимых граней вдоль рассматриваемой разделительной линии определяется как последовательность первых граней в последовательностях расположения граней в направлении проецирования для всех отрезков разделительной линии (на рис. 1 для разделительной линии  $S_1S_2$  на отрезке  $S_1I_0$  видимая грань пустая, на отрезке  $I_0I_1$  видима грань  $ABR$ , на отрезке  $I_1I_2$  видима грань  $CDQ$ , на отрезке  $I_2I_3$  видима грань  $CDQ$ , на отрезке  $I_3S_2$  видимая грань пустая).

Шаг 5. Теперь последовательность видимых граней вдоль контуров полученных подобластей формируется как совокупность определенной выше последовательности и частей последовательности видимых граней вдоль контура области, которая делится на этом этапе.

Алгоритм начинает работу с контура охватывающей области. Для этого контура известно распределение видимых граней и последовательность расположения граней в направлении проецирования для любой его точки (все эти множества пусты).

Одновременно с работой алгоритма, перед каждым делением области выполняется проверка следующих двух условий.

Первое условие – это минимальное количество граней, видимых вдоль контура области (как правило, одна грань), и отсутствие видимых граней, проекции которых целиком лежат внутри рассматриваемой области. На рис. 5 вдоль контура области 53 видима только одна грань 55 и внутри этой области не лежит целиком проекция ни одной грани. Второе условие – это достижение областью определенных заранее минимальных размеров (минимальное количество граней, видимых вдоль контура области, и минимальный размер области определяются заранее и являются параметрами метода). Если хотя бы одно из условий выполняется, то процесс деления данной области прекращается, а грани, видимые вдоль контура этой области, отмечаются как видимые. После окончания работы алгоритма все видимые грани будут отмечены.

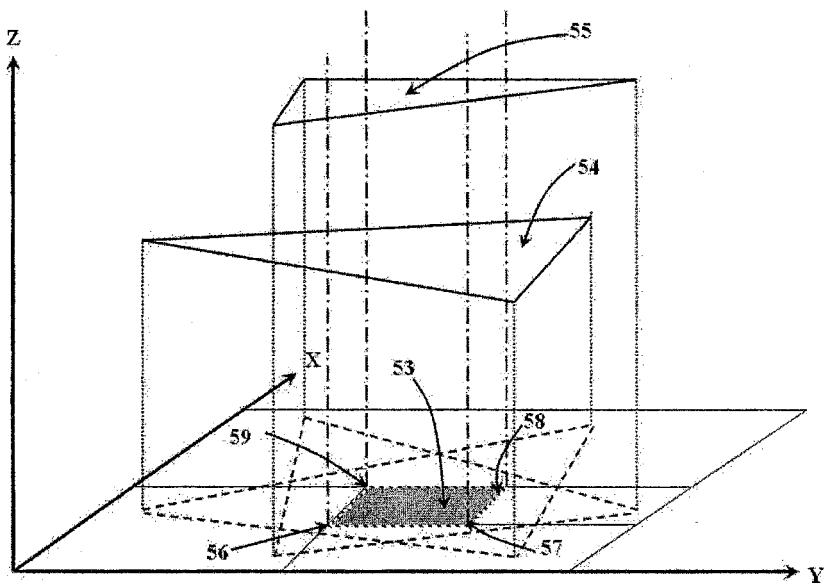


Рис. 5

### Заключение

В статье представлен обзор метода определения видимых участков непрозрачных поверхностей, который позволяет существенно сократить объем вычислений. Отметим, что большим преимуществом рассматриваемого метода является возможность реализации основного алгоритма метода на системах с параллельной обработкой информации. Для этого не потребуются специальных модификаций предлагаемого метода.

### Литература

1. Tang W. et al. An Efficient Hidden-Line Removal Method Based on Z-Buffer Algorithm // Image Processing. IEEE Int'l Conference. – 1994. – Vol. 1. – P. 20-27.
2. James D. Foley and others. Introduction to Computer Graphics. – Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1997. – P. 583-588.
3. James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner, John F. Hughes. Computer Graphics Principles and Practice. Second Edition. – Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1992. – P. 649-686.
4. Сафин М.Я. Прямой метод локализации объектов в двумерном пространстве // Настоящий сборник.