Ш. Ярмухамедов, О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 1, 228–239

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 517.5

О ГАРМОНИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА КУСКЕ ГРАНИЦЫ

Ш. Ярмухамедов

Аннотация: Устанавливается явная формула восстановления гармонической функции в области по ее известным значениям и известным значениям ее нормальной производной на части границы, т. е. приводится в явном виде решение задачи Коши для уравнения Лапласа. Библиогр. 14.

Введение

Пусть D — односвязная ограниченная область в комплексной плоскости z с границей ∂D, состоящей из отрезка $[A, B]$ действительной оси и гладкой дуги S кривой, лежащей в верхней замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\partial D = \{z : A \leq z \leq B\} \cup S$. Обозначим через S_0 внутренние точки дуги S, $S_0 = S/\{A, B\}$. Пусть $f(z) \in C(S_0)$,

$$\int\limits_S |f(\zeta)|\,|d\zeta| < \infty.$$

При $\sigma \geq 0$ введем обозначения:

$$I_\sigma(f) = \int\limits_S f(\zeta) e^{-i\sigma\zeta}\,d\zeta, \quad 2\pi i f_\sigma(z) = \int\limits_S e^{-i\sigma(\zeta - z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

$$2\pi i f_0(z) = \int\limits_S \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \notin S,$$

где функция $f_\sigma(z)$ дифференцируема по параметру σ ($\sigma \geq 0$) при каждом фиксированном $z \notin S$ и имеет место формула

$$2\pi i \frac{df_\sigma(z)}{d\sigma} = -i \int\limits_S e^{-i\sigma(\zeta - z)} f(\zeta)\,d\zeta = -i e^{i\sigma z} I_\sigma(f).$$

В этих условиях В. А. Фок и Ф. М. Куни [1] установили следующий интересный результат.

Для существования функции $F(z)$, голоморфной в D и такой, что $F(z) = f(z)$, $z \in S_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\sigma \to \infty} \sigma^{-1} \ln |I_\sigma(f)| = 0.$$

Если это условие выполнено, то аналитическое продолжение в область D осуществляется формулой

$$2\pi i F(z) = 2\pi i \lim_{\sigma\to\infty} f_\sigma(z) \equiv \lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_S f(\zeta) e^{-i(\zeta-z)\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z\in D, \tag{1}$$

которую можно преобразовать в такую:

$$2\pi i F(z) = \int\limits_S \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - i\int\limits_0^\infty e^{i\sigma z} I_\sigma(f)\,d\sigma, \quad z\in D. \tag{2}$$

Эквивалентность формул продолжения (1) и (2) вытекает из формулы

$$\lim_{\sigma\to\infty} f_\sigma(z) = \int\limits_0^\infty \frac{df_\sigma(z)}{d\sigma}\,d\sigma + f_0(z), \tag{3}$$

где существование предела слева влечет за собой сходимость несобственного интеграла справа.

Формула восстановления голоморфной в области функции по ее заданным значениям на куске границы была получена впервые Т. Карлеманом еще в 1926 г. [2]. Далеко идущие обобщения формулы Карлемана получили Г. М. Голузин и В. И. Крылов [3]. Они впервые заметили эквивалентность формул (1) и (2). Различные одномерные и многомерные обобщения формулы Карлемана приведены в [4].

Проследим бегло основную идею доказательства теоремы Фока — Куни [1]. Подынтегральная функция в (1) состоит из произведения двух функций. Первый множитель — это $f(\zeta)$, а второй, как легко видеть, представляет собой регулярную функцию, кроме точки $\zeta = z$, в которой она имеет простой полюс с вычетом, равным единице, стремящуюся к нулю при $\sigma\to\infty$, когда $\operatorname{Im}\zeta = 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. Функция с указанными свойствами согласно М. М. Лаврентьеву [5], называется функцией Карлемана для рассматриваемой области D и части S. Теперь формула (1) немедленно следует из интегральной формулы Коши. Отсюда в силу (3) получаем формулу (2) и вместе с ней необходимость условия теоремы. С другой стороны, второе слагаемое в правой части (2) изображает регулярную функцию в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, а первое слагаемое как интеграл типа Коши — различные аналитические функции в D и в $\{\operatorname{Im} z > 0\}/D\cup\partial D$ соответственно, поэтому $F(z)$ распадается на две регулярные функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ соответственно. Из (2) видно, что $F^-(z) = 0$, когда $\operatorname{Im} z > \sup\operatorname{Im}\zeta$, $\zeta\in\overline{D}$. Это вытекает из того, что повторные интегралы перестановочны и имеют место равенства

$$\int\limits_0^\infty e^{i\sigma z} I_\sigma(f)\,d\sigma = \int\limits_0^\infty e^{i\sigma z}\left[\int\limits_S e^{-i\sigma\zeta} f(\zeta)\,d\sigma\right]d\zeta$$
$$= \int\limits_S f(\zeta)\left[\int\limits_0^\infty e^{-i\sigma(\zeta-z)}\,d\sigma\right]d\zeta = -i\int\limits_S \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Теперь полное доказательство формулы (1) следует из теоремы единственности и формулы скачка для граничных значений интеграла типа Коши, а также из теоремы о продолжимости $F^+(z)$ на S_0 как функции класса $C(D\cup S_0)$ [4].

Здесь приводим аналогичный результат для гармонических функций многих переменных. Доказанные формулы продолжения основаны на постановке М. М. Лаврентьева конструкции многомерной функции Карлемана [6]. Введем обозначения: $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, — m-мерное вещественное евклидово пространство; $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $x' = (0, x_2, \ldots, x_m)$, $y' = (0, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $\alpha^2 = |y' - x'|^2$, $r^2 = \alpha^2 + (y_1 - x_1)^2$, $s = \alpha^2$, $R_+^m = \{y = (y_1, y') : y' \in \mathbb{R}^{m-1},\ y_1 > 0\}$; D — односвязная ограниченная область с границей, состоящей из компактной части гиперплоскости $y_1 = 0$ (при $m = 2$ — отрезок $a_1 \leq y \leq b$) и гладкого куска поверхности S (гладкой дуги кривой, когда $m = 2$), лежащей в полупространстве $y_1 \geq 0$; $\overline{D} = D \cup \partial D$; S_0 — внутренние точки S, т. е. поверхность S без края; ω_m — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^m$, $C_2 = -2\pi$, $C_3 = 2\pi^{-1}\omega_3$,

$$C_m = \begin{cases} (-1)^{n-1}(m-2)(n-2)!\omega_m, & m = 2n, \\ (-1)^n 2^{-n}(2n-3)!!(m-2)\pi\omega_m, & m = 2n+1, \end{cases} \quad n \geq 2;$$

$H(D)$ обозначает совокупность вещественных функций $U(y)$ класса $C^2(D)$, гармонических в D.

В § 1 приводится конструкция фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра и исчезающего в пределе вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на той части границы, где $y_1 = 0$. Выписывается в явном виде функция Карлемана для области D. Для гармонической функции устанавливается справедливость классической формулы Грина, в которой в качестве фундаментального решения присутствует построенная функция Карлемана. Из полученной формулы легко выводятся многомерный аналог формулы Карлемана и удобный критерий разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа. Эти результаты изложены в § 2.

§ 1. Функция Карлемана

Функцию $\Phi_\sigma(y - x)$ при $\alpha > 0$, $\sigma \geq 0$ определим следующими равенствами. Если $m = 2$, то

$$C_2\Phi_\sigma(y-x) = 4a^2 \int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{e^{\sigma w}}{w(w-2a)^2}\right] \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_1 - x_1, \tag{4}$$

где $a = \max\limits_{y \in \overline{D}} y_1$, $0 \leq y_1 \leq a$. Если $m = 2n$, $n \geq 2$, то

$$C_m\Phi_\sigma(y-x) = \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \operatorname{Im}\left[\frac{e^{\sigma w}}{\alpha w}\right], \quad w = i\alpha + y_1 - x_1. \tag{5}$$

Если $m = 2n+1$, $n \geq 1$, то

$$C_m\Phi_\sigma(y-x) = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{e^{\sigma w}}{w}\right] \frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_1 - x_1. \tag{6}$$

При $\sigma = 0$ интегралы в (4) и (6) вычисляются и для $\Phi_0(y - x)$ получаем

$$\Phi_0(y-x) = \begin{cases} (m-2)^{-1}\omega_m^{-1} r^{-m+2}, & m \geq 3, \\ (2\pi)^{-1}\ln\frac{1}{r} + (2\pi)^{-1}\ln\frac{1}{r_1} - \frac{8a^2}{\pi}\frac{y_1 - x_1 - 2a}{r_1^2}, & m = 2, \end{cases} \tag{7}$$

где $r_1^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_1 - x_1 - 2a)^2$. Обозначим

$$e^{\sigma x_1} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \sigma}(y - x) = F_\sigma(y, x). \tag{8}$$

Тогда из (4)–(6) для $F_\sigma(y, x)$ находим

$$C_2 F_\sigma(y, x) = 4a^2 e^{\sigma y_1} \int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{e^{i\sigma\sqrt{u^2+\alpha^2}}}{(w - 2a)^2}\right] \frac{u\, du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad m = 2,$$

$$C_m F_\sigma(y, x) = e^{\sigma y_1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[\frac{\sin \sigma\alpha}{\alpha}\right], \quad m = 2n,\ n \geq 1,$$

$$\frac{2}{\pi} C_m F_\sigma(y, x) = e^{\sigma y_1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} J_0(\sigma\alpha), \quad m = 2n + 1,\ n \geq 1,$$

где $J_0(\alpha)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Основная лемма. *Функция $\Phi_\sigma(y - x)$, определенная при $\sigma \geq 0$, $\alpha > 0$ равенствами (4)–(6), представима в виде*

$$\Phi_\sigma(y - x) = \varphi(r) + G_\sigma(y - x), \quad \varphi(r) = \Phi_0(y - x),\ m \geq 3, \quad \varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r},\ m = 2, \tag{9}$$

где функция $G_\sigma(y - x)$ определена и гармонична в $\mathbb{R}^m$, включая точку $y = x$, когда $m \geq 3$. Если $m = 2$, то представление справедливо в замкнутой области $\overline{D} \ni y$ для любого $x \in \mathbb{R}^m_+$, где $G_\sigma(y - x)$ гармонична в D, включая точку $y = x$. При этом функция $G_\sigma(y - x)$ гармонична по $x \in R^m_+$, когда $y \in \overline{D}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем положить $x = 0$, $s = \alpha^2 = y_2^2 + \cdots + y_m^2$. Из (4)–(6) видим, что $\Phi_\sigma(y) = f(y, s)$ зависит от координат y_1, s точки (y_1, s).

Сначала докажем два предложения.

Предложение 1. *Уравнение Лапласа в координатах y_1, s точки (y_1, s) имеет вид*

$$4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 2(m - 1) \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0. \tag{10}$$

Действительно, пусть $U(y) = f(y, s)$ — решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{dy_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{dy_m^2} = 0.$$

Вычислим вторые производные:

$$\frac{\partial U}{\partial y_k} = \frac{df}{ds} \frac{ds}{dy_k} = \frac{df}{ds} 2y_k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_k^2} = \frac{d^2 f}{ds^2} 4y_k^2 + 2\frac{df}{ds}, \quad k = 2, \ldots, m, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} = \frac{d^2 f}{dy_1^2},$$

и сложим, тогда получим (10).

Предложение 2. *Решения уравнения Лапласа $f(y, s) \equiv f_m(y_1, s)$, где $s = y_2^2 + \cdots + y_m^2$ и нижний индекс указывает на число независимых переменных, определенные равенствами (4)–(6), с числом переменных m и $m + 2$ связаны соотношением*

$$\frac{df_m}{ds} = \frac{C_{m+2} f_{m+2}}{C_m}, \quad s = y_2^2 + \cdots + y_{m+2}^2. \tag{11}$$

Действительно, продифференцируем по s равенства (5) и (6). Тогда в правых частях n заменится на $n+1$, при этом m заменится на $m+2$, поскольку $m=(n+1)2+1=2n+1+2$, $m=2(n+1)=2n+2$. Поэтому правая часть полученного равенства будет равна $C_{m+2}f_{m+2}$; приходим к равенству (11). Покажем, что если $f=f_{m+2}$, то $s=y_2^2+\dots+y_{m+2}^2$ также является решением уравнения (10) с числом переменных $m+2$. С этой целью продифференцируем (10) по s. Тогда

$$4\frac{d^2f}{ds^2}+4s\frac{d^3f}{ds^3}+2(m-1)\frac{d^2f}{ds^2}+\frac{d}{ds}\frac{d^2f}{dy_1^2}=0,\quad f=f_m.$$

Заменим $\frac{df}{ds}$ из соотношения (11). Тогда

$$4s\frac{d^2f}{ds^2}+2(m+1)\frac{df}{ds}+\frac{d^2f}{dy_1^2}=0,\quad f=f_{m+2},\quad s=y_2^2+\dots+y_{m+2}^2,$$

где $\frac{d}{ds}\frac{d^2f}{dy_1^2}=\frac{d^2f}{dy_1^2}\frac{df}{ds}$ и равенство смешанных производных очевидно. Утверждение доказано.

Продолжим доказательство основой леммы. Пусть $m=2n+1$, $n\ge 1$. Сначала докажем лемму на случай, когда $m=3, s=y_2^2+y_3^2$. Напишем уравнение (10) для $m=3$:

$$L(f)=4s\frac{d^2f}{ds^2}+4\frac{df}{ds}+\frac{d^2f}{dy_1^2}=0. \tag{12}$$

Покажем, что функция

$$f=\int\limits_0^\infty\varphi(w)\frac{du}{\sqrt{u^2+s}},\quad \varphi(w)=\frac{\exp(\sigma w)}{w},\quad w=i\sqrt{u^2+s}+y_1,$$

при $s>0$ является решением уравнения (12). Тогда функция

$$C_3\Phi_\sigma(y)=\int\limits_0^\infty\operatorname{Im}[\varphi(w)]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},\quad s>0,\ \sigma\ge 0,$$

также будет решением уравнения (12).

Дифференцированием получаем

$$\frac{df}{ds}=\int\limits_0^\infty\left\{\frac{i\varphi'}{2(u^2+s)}-\frac{\varphi}{2(u^2+s)\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right\}du,$$

$$\frac{d^2f}{ds^2}=\int\limits_0^\infty\left[-\frac{\varphi''}{4(u^2+s)^{3/2}}-\frac{\varphi' i}{2(u^2+s)}-\frac{\varphi' i}{4(u^2+s)}+\frac{3\varphi}{4(u^2+s)\sqrt{u^2+s}}\right]du.$$

Отсюда

$$4s\frac{d^2f}{ds^2}=\int\limits_0^\infty\left[\frac{-s\varphi''}{(u^2+s)^{3/2}}-\frac{3is\varphi'}{(u^2+s)^2}+\frac{3s\varphi}{(u^2+s)^{5/2}}\right]ds,$$

$$4\frac{df}{ds}=2\int\limits_0^\infty\left[\frac{\varphi'}{u^2+s}-\frac{\varphi}{(u^2+s)^{3/2}}\right]du,\quad \frac{d^2f}{dy_1^2}=\int\limits_0^\infty\frac{\varphi''\,du}{(u^2+s)^{1/2}}.$$

Сложим полученные равенства:

$$L(f)=\int\limits_0^\infty \frac{u^2\varphi''\,du}{(u^2+s)^{3/2}}+\int\limits_0^\infty \frac{(2u^2-s)i}{(u^2+s)^2}\varphi'\,du+\int\limits_0^\infty \frac{s-2u^2}{(u^2+s)^{5/2}}\varphi\,du.$$

Так как

$$-i\,d\varphi'=\frac{u\varphi''\,dy}{\sqrt{u^2+s}},$$

интегрируя по частям первый интеграл, видим, что он равен

$$\int\limits_0^\infty i\Big(\frac{u}{u^2+s}\Big)'\varphi'\,dy=\int\limits_0^\infty \frac{i\varphi'\,dy}{(u^2+s)}-\int\limits_0^\infty \frac{2iu^2}{(u^2+s)^2}\varphi'\,du.$$

Объединим интегралы, содержащие φ', с учетом соотношений

$$\frac{2u^2-s}{(u^2+s)^2}-\frac{2u^2}{(u^2+s)^2}+\frac{1}{u^2+s}=\frac{2u^2-s-2u^2+u^2+s}{(u^2+s)^2}=\frac{u^2}{(u^2+s)^2}.$$

Тогда

$$L(f)=\int\limits_0^\infty \varphi\frac{s-2u^2}{(u^2+s)^{5/2}}\,du+\int\limits_0^\infty \frac{iu^2\varphi'\,du}{(u^2+s)^2}.$$

Интегрируя по частям второй интеграл, убеждаемся, что он равен первому с обратным знаком, так что $L(f)=0$. Гармоничность функции f доказана.

Теперь для разности $\Phi_\sigma(y)-\Phi_0(y)=G_\sigma(y_1,s)$ имеем

$$G_\sigma(y_1,s)=-2\pi^{-1}\omega_3^{-1}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}[\varphi(w)]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}-\frac{1}{\omega_3 r}.$$

Так как

$$\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\Big[\frac{1}{w}\Big]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}=-\frac{\pi}{2r},\quad w=i\sqrt{u^2+s}+y_1,$$

то

$$G_\sigma(y_1,s)=-\frac{2}{\pi\omega_3}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\Big[\frac{\varphi_1(w)-1}{w}\Big]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}$$

$$=-\frac{2}{\pi\omega_3}\Bigg(\int\limits_0^1+\int\limits_1^\infty\Bigg)\operatorname{Im}\Big[\frac{\varphi_1(w)-1}{w}\Big]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}},$$

где

$$\varphi_1(w)=e^{\sigma w},\quad w=i\sqrt{u^2+s}+y_1,\quad \varphi_1(0)=1.$$

Поскольку функция $K_1(w)=\frac{\varphi_1(w)-1}{w}$ целая и вещественная при вещественном w, имеет место разложение

$$\operatorname{Im}K_1(w)=\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}K_1^{2k+1}(y_1)(\sqrt{u^2+s})^{2k+1}. \tag{13}$$

Отсюда заключаем, что первый интеграл является функцией точки (y_1,s) и принадлежит классу C^∞ по переменным y_1, y_2, y_3. Этим свойством обладает и второй интеграл. Представление (9) и вместе с ним лемма доказаны для $m = 3$ (на прямую $y_2 = y_3 = 0$ функция $G_\sigma(y_1, S)$ гармонически продолжается). Из последнего представления имеем

$$\int_0^\infty \operatorname{Im}[\varphi(w)] \frac{du}{\sqrt{u^2+s}} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{r} + \omega_3 G_\sigma(y_1, s)\right).$$

Продифференцируем обе части этого равенства $n-1$ раз по s. Тогда из формулы (6) получаем

$$\Phi_\sigma(y) = -\frac{\pi}{2} C_m^{-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \frac{1}{r} - \frac{\pi}{2} C_m^{-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} G_\sigma(y_1, s).$$

Первое слагаемое является фундаментальным решением уравнения Лапласа и равно $(m-2)^{-1} w_m^{-1} r^{2-m}$. Второе слагаемое согласно предложению 2 представляет собой регулярную гармоническую функцию в $\mathbb{R}^m$, которую обозначим через $G_\sigma(y)$. Лемма доказана при $m = 2n+1$, $n \geq 1$. Пусть $m = 2n$, $n \geq 2$. Рассмотрим сначала случай $n = 2$, $m = 4$. Тогда из (5) получаем

$$C_4 \Phi_\sigma(y) = \operatorname{Im} \frac{\varphi(w)}{\sqrt{s}}, \quad \varphi(w) = \frac{e^{\sigma w}}{w}, \quad w = i\sqrt{s} + y, \quad s = y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \alpha^2.$$

Покажем, что функция $f(w) = \frac{\varphi(w)}{\sqrt{s}}$ гармонична при $s > 0$. Запишем уравнение (10) при $m = 4$:

$$L(f) = 4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 6 \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0.$$

Последовательно дифференцируя, получаем

$$\frac{df}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{s\sqrt{s}} + \frac{i}{2} \frac{\varphi'}{s}, \quad s\frac{df}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{\sqrt{s}} + \frac{i\varphi'}{2}; \quad \frac{df}{ds} + s\frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{1}{4} \frac{\varphi}{s\sqrt{s}} - \frac{i\varphi'}{4s} - \frac{\varphi''}{4\sqrt{s}};$$

$$L(f) = 4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 6 \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{\varphi}{s\sqrt{s}} - \frac{i\varphi'}{s} - \frac{\varphi''}{\sqrt{s}} + 2\frac{df}{ds} + \frac{\varphi''}{\sqrt{s}} = 0.$$

Далее, имеем

$$C_4 \Phi_\sigma(y) = \operatorname{Im}\left[\frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(0)}{w\sqrt{s}}\right] + \operatorname{Im} \frac{\varphi_1(0)}{w\sqrt{s}}, \varphi_1(w) = e^{\sigma w}. \tag{14}$$

Второе слагаемое в правой части равно $-r^{-2}$ и является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Первое слагаемое, которое обозначим через $G_\sigma(y) = G_\sigma(y_1, s)$, согласно разложению (13), где $u = 0$, представляет собой целую гармоническую функцию в $\mathbb{R}^m$ (функция $G_\sigma(y)$ на множество $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ гармонически продолжается). Лемма доказана для $m = 4$. Далее, из (14) имеем

$$\operatorname{Im} \frac{\varphi_1(w)}{\sqrt{s}w} = -r^{-2} + G_\sigma(y_1, s).$$

В этом равенстве вычислим частные производные по s порядка $n-2$. Правая часть полученного равенства согласно (5) равна $C_m \Phi(y)$, где $s = y_2^2 + \cdots + y_m^2$. Из предложения 2 заключаем, что функция

$$C_m^{-1} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} G_\sigma(y_1, s), \quad s = y_2^2 + \cdots + y_m^2,$$

является целой гармонической функцией. Теперь из равенства

$$C_m^{-1}\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}r^{-2}=(m-2)^{-1}\omega_m^{-1}r^{-2+m}$$

следует утверждение леммы, когда $m=2n$, $n\geq 2$. Наконец, рассмотрим случай $m=2$. Обозначим

$$f(y)=\int\limits_0^\infty \varphi(w)\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}},\quad \varphi(w)=\frac{\varphi_1(w)}{w},\quad \varphi_1(w)=\frac{e^{\sigma w}}{(w-2a)^2},$$

$\sigma\geq 0$, $0\leq y_1\leq a_1$, $\varphi_1(0)=(2a)^{-2}$, $w=i\sqrt{u^2+s}+y_1$.

Достаточно доказать гармоничность $f(y)$ в $\overline{D}$ при $s>0$. Уравнение (10) при $m=2$ имеет вид

$$4s\frac{d^2f}{ds^2}+2\frac{df}{ds}+\frac{d^2f}{dy_1^2}=0.$$

Так как $\frac{d}{ds}\sqrt{u^2+s}=\frac{d}{du^2}\sqrt{u^2+s}$, дифференцированием получаем

$$2\frac{df}{ds}=\int\limits_0^\infty \frac{d}{ds}\left(\frac{\varphi(w)}{\sqrt{u^2+s}}\right)du^2=-\frac{\varphi(w_1)}{\sqrt{s}},\quad 4s\frac{d^2f}{ds^2}=-i\varphi^1(w_1)+\frac{\varphi(w_1)}{\sqrt{s}},$$

$$\frac{d^2f}{dy_1^2}=\int\limits_0^\infty \varphi''(w)\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}=i\varphi'(w_1),\quad w_1=i\sqrt{s}+y_1.$$

Складывая полученные равенства, убедимся, что $L(f)=0$, $s>0$. Рассмотрим разность $\Phi_\sigma(y)-(2\pi)^{-1}\ln\frac{1}{r}=G_\sigma(y_1,s)$, где

$$\begin{aligned}2\pi G_\sigma(y_1,S)&=-(\varphi_1(0))^{-1}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{\varphi_1(w)}{w}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}-\ln\frac{1}{r}\\&=-(\varphi_1(0))^{-1}\int\limits_1^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{\varphi_1(w)}{w}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}-\ln\frac{1}{r}-(\varphi_1(0))^{-1}\int\limits_0^1 \operatorname{Im}\left[\frac{\varphi_1(0)}{w}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}\\&\qquad-(\varphi_1(0))^{-1}\int\limits_0^1 \operatorname{Im}\left[\frac{\varphi_1(w)-\varphi_1(0)}{w}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части — функция класса C^∞ при $0\leq y_1\leq a$, второе и третье слагаемые в сумме равны $2^{-1}\ln(1+r^2)$ и являются функциями класса $C^\infty(\overline{D})$. Из разложения (13) видим, что четвертое слагаемое также функция класса $C^\infty(\overline{D})$. Обозначим $2\pi G_\sigma(y_1,s)=G_\sigma(y)$. Тогда получим представление (9), где $G_\sigma(y)$ гармонична в $\overline{D}$ при $s>0$. Из $G_\sigma(y)\in C^\infty(\overline{D})$ следует, что она гармонична всюду в $\overline{D}$. Основная лемма доказана.

Из основной леммы и равенства (8) видим, что функция

$$\frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x)=e^{-\sigma x_1}F_\sigma(y,x) \tag{15}$$

является регулярной гармонической функций в $\mathbb{R}^m$ при $m \geq 3$. Если $m = 2$, то она гармонична в $\overline{D} \ni y$ $(x_1 \geq 0)$. Из представления (9) следует формула Грина. Пусть $U(y) \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$. Тогда для любого $x \in D$ справедлива формула

$$U(x) = \int\limits_{\partial D} \left[\Phi_\sigma(y-x) \frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}(y-x)\, ds_y \right]. \tag{16}$$

Если $x \in \mathbb{R}^m / \overline{D}$, то интеграл справа равен нулю. Здесь n — направление внешней нормали на ∂D.

§ 2. Многомерная формула Карлемана

Пусть $f(y), g(y) \in L(S)$. Введем обозначения:

$$U_\sigma(x) = \int\limits_S \left[g(y)\Phi_\sigma(y-x) - f(y) \frac{d\Phi_\sigma}{dn}(y-x) \right] ds_y, \tag{17}$$

$$U_0(x) = U_\sigma(x)|_{\sigma=0} = \int\limits_S \left[g(y)\Phi_0(y-x) - f(y) \frac{d\Phi_0}{dn}(y-x) \right] ds_y, \quad x \notin S$$

$$I(\sigma, x) = \int\limits_S \left[g(y) F_\sigma(y,x) - f(y) \frac{dF_\sigma}{dn}(y,x) \right] ds_y, \tag{18}$$

где $\Phi_\sigma(y-x)$, $\Phi_0(y-x)$, $F_\sigma(y,x)$ определяются из (4)–(8) соответственно. Из (15) заключаем, что функция $U_\sigma(x)$ дифференцируема по параметру σ $(\sigma \geq 0)$ и при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^m_+ / S$ справедлива формула

$$\frac{dU_\sigma(x)}{d\sigma} = e^{-\sigma x_1} I(\sigma, x),$$

при этом функция $e^{-\sigma x_1} I(\sigma, x)$ гармонична в $\mathbb{R}^m_+$ при каждом фиксированном $\sigma \geq 0$.

Согласно формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$\lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma x_1} I_\sigma(\sigma, x)\, d\sigma + U_0(x) \tag{19}$$

при условии, что предел слева существует и конечен при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^m_+ / S$.

Теорема 1. *Пусть $U(y) \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$ и $U(y) = f(y)$, $\frac{\partial U}{\partial n}(y) = g(y)$, $y \in S$, где $f(y)$, $g(y)$ — заданные функции класса $C(S)$. Тогда для любого $x \in D$ справедлива формула Карлемана*

$$U(x) = \lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = \lim_{\sigma \to \infty} \int\limits_S \left[g(y)\Phi_\sigma(y-x) - f(y) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}(y-x) \right] ds_y, \tag{20}$$

которую можно преобразовать так:

$$U(x) = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma x_1} I(\sigma, x)\, d\sigma + \int\limits_S \left[g(y)\Phi_0(y-x) - f(y) \frac{\partial \Phi_0}{\partial n}(y-x) \right] ds_y. \tag{21}$$

Теорема 2. *Пусть* $S \subset C^2$, $f(y) \in C^1(S_0) \cap L(S)$, $g(y) \in C(S_0) \cap L(S)$. *Для существования функции* $U(y) \in H(D) \cap C^1(D \cup S_0)$ *такой, что*

$$U(y) = f(y), \quad \frac{dU}{dn}(y) = g(y), \quad y \in S_0, \tag{22}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\sigma \to \infty} \frac{\ln^+ |I(\sigma, x)|}{\sigma} = 0 \tag{23}$$

для каждой точки $x \in \mathbb{R}^m_+$, *при этом* (23) *выполняется равномерно на компактах из* $\mathbb{R}^m_+$. *Если условие* (23) *выполнено, то гармоническое продолжение осуществляется формулами* (20) *и* (21).

Доказательство теоремы 1. Из (4)–(6) следуют очевидные неравенства, которые запишем в виде леммы.

Лемма. *Если* $m \geq 3$, $\sigma \geq 1$, *то*

$$|\Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_\sigma\right| \leq \mathrm{const} \cdot \sigma^n e^{\sigma(y_1 - x_1)} \left(\frac{\sigma}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^{m-2}}\right), \quad r > 0,$$

$$\left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \sigma}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_\sigma\right| \leq \mathrm{const} \cdot \sigma^{n+1} e^{\sigma(y_1 - x_1)}.$$

Если $m = 2$, $\sigma \geq 1$, $0 \leq y_1 \leq a$, $x_1 > 0$, *то*

$$|\Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_k}\right| \leq \mathrm{const} \cdot \sigma e^{\sigma(y_1 - x_1)} \left(\ln\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right), \quad r > 0,$$

$$\left|\frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}\right| + \left|\frac{d}{d\sigma}\frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_\sigma\right| \leq \mathrm{const} \cdot \sigma e^{\sigma(y_1 - x_1)}.$$

Здесь постоянные не зависят от σ, x, y.

Из леммы видно, что в формуле (16) интеграл по части $\partial D | S$, где $y_1 = 0$, стремится к нулю, когда $\sigma \to \infty$ и $x_1 > 0$; стремление будет равномерным на компактах из $\mathbb{R}^m_+$. Отсюда следует формула (20). Эквивалентность формул продолжения (20) и (21) вытекает из (19).

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть функция $U(y) \in H(D) \cap C^1(D \cup S_0)$ удовлетворяет на S_0 условиям (22), где $f(y), g(y) \in L(S)$, и пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Обозначим

$$S_\varepsilon = \{y : y \in \mathbb{R}^m_+,\ y_1 = \varepsilon\} \cap D, \quad S^+_\varepsilon = S \cap \{y : y \in \mathbb{R}^m_+, y_1 \geq \varepsilon\}.$$

Так как $F_\sigma(y, x)$ гармонична в $\mathbb{R}^m_+ \cup \{y_1 = 0\}$, $\sigma \geq 0$, $m \geq 3$, и в $\overline{D}$ при $m = 2$ $(x_1 > 0)$, то согласно формуле Грина, применяемой в области с границей $S_\varepsilon \cup S^+_\varepsilon$, получаем

$$\int_{S^+_\varepsilon} \left[g(y)F_\sigma(y,x) - f(y)\frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y,x)\right] ds_y = \int_{S_\varepsilon} \left[g(y)F_\sigma(y,x) - f(y)\frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y,x)\right] ds_y,$$

где направления нормалей к S_ε и S^+_ε согласованы. Используя это равенство, для $I(\sigma, x)$, имеем

$$I(\sigma, x) = \int_{S/S^+_\varepsilon} \left[g(y)F_\sigma(y,x) - f(y)\frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y,x)\right] ds_y$$

$$+ \int_{S_\varepsilon} \left[g(y)F_\sigma(y,x) - f(y)\frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y,x)\right] ds_y.$$

Оценим интегралы. В первом интеграле $y_1 \le \varepsilon$, а во втором $y_1 = \varepsilon$. Используем оценки для
$$\frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x) = e^{-\sigma x_1} F_\sigma(y,x).$$
Из леммы с учетом того, что $f(y), g(y) \in L(S)$, получаем
$$|I(\sigma,x)| \le C_\varepsilon \sigma^{n+1} e^{\varepsilon\sigma}, \quad \sigma \ge 1,\ x \in \mathbb{R}^m_+,$$
где $m = 2n$ при четном $m \ge 2$; $m = 2n+1$, когда m нечетно, $m \ge 3$, и постоянная C_ε не зависит от σ. Так как $\varepsilon > 0$ любое, отсюда следует (23) ($x_1 > 0$).

Достаточность. Определим функцию $U(x)$ формулой (21), эквивалентной (20). Из (23) заключаем, что первое слагаемое в правой части (21) представляет собой гармоническую функцию в полупространстве $x_1 > 0$ как предел равномерно сходящейся последовательности гармонических функций
$$U_n(x) = \int_0^n e^{-\sigma x_m} I(\sigma x)\, d\sigma.$$
Второе слагаемое представляет собой разность потенциалов простого и двойного слоев и является гармонической функцией в D и в $D_1 = \mathbb{R}^m_+/\overline{D}$. Поэтому правая часть в (21) определяет в D и D_1 две различные гармонические функции $U^+(x)$ и $U^-(x)$ соответственно. Если x^1, x^2 — две точки на нормали в точке $x \in S_0$, симметричные относительно точки $x \in S_0$, то
$$\lim_{x_1\to x}[U^+(x^1) - U^-(x^2)] = f(x), \quad \lim_{x_1\to x} = \left[\frac{\partial U^+}{\partial n}(x^1) - \frac{\partial U^2}{\partial n}(x^2)\right] = g(x),$$
причем предельные соотношения выполняются равномерно относительно x из каждой компактной части S_0. Из равенства (20), которое эквивалентно (21), видим, что $U^-(x) = 0$, когда $x_1 > \max\limits_{y\in D} y_1$. Согласно теореме единственности $U^-(x) \equiv 0$, $x \in D_1$. Ясно, что $U^-(x)$ непрерывно дифференцируемо продолжается на $D_1 \cup S_0$. Поэтому $U^+(x)$ также непрерывно дифференцируемо продолжается на $D \cup S_0$. Положим $U^+(x) = f(x)$, $x \in S_0$. Тогда $U^+(x)$ гладко продолжается на $D \cup S_0$ (см. [14, лемма 1.1]).

Тем самым $U^+(x) = f(x)$, $\frac{\partial U^+(x)}{\partial n} = g(x)$, $x \in S_0$, где $U(x) = U^+(x)$, $x \in D \cup S_0$. Теорема 2 доказана.

Посмотрим на формулу (21) с точки зрения теории дифференциальных уравнений. Она является аналогом классических формул Б. Римана, В. Вольтерра, Ж. Адамара, полученных ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений. Поскольку задача Коши для гиперболических уравнений корректна, в них условие типа (23) отсутствует. Формула (21) дает решение задачи Коши для уравнения Лапласа, где $f(y)$, $g(y)$ удовлетворяют условию (23). Для произвольных непрерывных $f(y)$, $g(y)$ задача Коши для уравнения Лапласа неразрешима. Если S — аналитическая поверхность и $f(y)$, $g(y)$ аналитичны и аналитически продолжаемы в D, то согласно классической теореме Коши — Ковалевской продолжение осуществимо (если отказаться от условия Коши — Ковалевской, то речь может идти о построении решения, существование которого постулируется априори), но, как заметил Ж. Адамар [7], полученное решение неустойчиво. Для построения устойчивого решения необходимо сузить класс рассматриваемых решений [6, 8, 9]. Если вместо $f(y)$, $g(y)$ на S заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y)$, $g_\delta(y)$ с заданным уклонением $\delta > 0$, а также задано число, характеризующее компакт, которому принадлежит решение, то речь идет о построении регуляризации. Регуляризация решения задачи Коши для уравнения Лапласа впервые была построена М. М. Лаврентьевым в работе [5], ныне ставшей классической. Регуляризация, основанная на постановке М. М. Лаврентьева, в явном виде построена в [10–12]. Полученные здесь формулы продолжения основаны на конструкции функции Карлемана $\Phi_\sigma(y-x)$ в явном виде для рассматриваемой области D. Существование функции Карлемана для произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей вытекает из аппроксимационной теоремы С. Н. Мергеляна [13]. Однако предложенный метод сложный и не позволяет написать функции Карлемана в явном виде. Формула Карлемана, аналогичная (20), когда $\partial D/S$ — шар, получена в [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фок Б. А., Куни Ф. М.* О введении «гасящей» функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 6. С. 1195–1198.
2. *Carleman T.* Les fonctions quasianalytiques. Paris: Gauthier-Villar, 1926.
3. *Голузин Г. М., Крылов В. И.* Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
4. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990.
5. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
6. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
7. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
8. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
9. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
10. *Мухамеджанов А. М., Ярмухамедов Ш., Ярмухамедов Р.* Об аналитическом продолжении сечений реакции // Теор. и мат. физика. 1988. Т. 74, № 2. С. 270–280.
11. *Ярмухамедов Ш.* Аналог формулы Римана - Вольтерра для гармонических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 4. С. 560–564.
12. *Ярмухамедов Ш.* Задача Коши для уравнения Лапласа в постановке М. М. Лаврентьева // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск, 1984. С. 203–209.
13. *Мергелян С. Н.* Гармоническая аппроксимация и приближснное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 1, № 5. С. 3–26.
14. *Шлапунов А. А.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 205–215.

Статья поступила 30 ноября 1998 г., окончательный вариант — 18 марта 2001 г.

Ярмухамедов Шароф
Самаркандский гос. университет им. Навои,
механико-математический факультет, кафедра теории функций,
Университетский бульв., 15, Самарканд 703043, Узбекистан.
iipp@samarkand.uz