М. И. Гордин

РАСШИРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МЕТОД МАРТИНГАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Пусть T – автоморфизм вероятностного пространства, которое, кроме того, является пространством состояний некоторого обратимого марковского процесса с генератором A. Если A является "собственным вектором" для T, то с парой (T, A) можно связать расширение исходного автоморфизма, конструируемое как некоторое преобразование пространства реализаций упомянутого процесса. Фильтрация, определяемая марковским процессом в этом расширении, выделяет класс мартингалов, которые могут использоваться для доказательства предельных теорем, касающихся исходной динамической системы. Приводятся примеры подобных ситуаций.

Введение

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ – вероятностное пространство и $T\colon X \to X$ – его эндоморфизм (измеримое преобразование, сохраняющее меру μ). Предположим, что на том же вероятностном пространстве определена марковская полугруппа $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$, симметричная относительно μ. Иначе говоря, для каждого $t \geqslant 0$ $\mathbf{P}_t$ – сохраняющий положительность самосопряженный оператор нормы 1 в $H = L_2(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$, такой, что $\mathbf{P}_t\mathbf{1} = \mathbf{1}$, и семейство $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ сильно непрерывно. Заметим, что $\mathbf{P}_t$ действует тогда с нормой 1 в каждом из пространств $L_p(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и сохраняет интеграл по мере μ. Пусть A – генератор марковской полугруппы $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$, или, более коротко, марковский генератор, являющийся, в силу наших предположений, самосопряженным оператором в H с плотной в H областью определения $\mathcal{D}(A)$.

Даже при рассмотрении вопросов, целиком касающихся системы $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, T)$ и никак не затрагивающих $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ (например, при изучении предельных распределений нормированных сумм вида $n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$, $f \in H$), полугруппа $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$, определенным образом согласованная с T, может оказаться весьма полезной дополнительной структурой, помогающей как формулировать, так

Работа выполнялась при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант 93–011–1454).

и доказывать утверждения, относящиеся к $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, T)$. Тем самым марковский генератор выступает в роли, обычно исполняемой выделенной образующей $\mathcal{L}$, в терминах которой формулируются те или иные условия слабой зависимости (σ-алгебра $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ называется образующей для автоморфизма T, если $\bigvee_{k\in\mathbb{Z}} T^{-k}(\mathcal{L}) = \mathcal{F}$).

Обозначим через U_T изометрический оператор, порожденный в H эндоморфизмом T ($U_T f = f \circ T$).

Определение. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Марковский генератор A называется γ-коммутирующим с T, если имеет место соотношение

$$AU_T = \gamma\, U_T A. \tag{0.1}$$

Замечание 1. В данном определении подразумевается, что

$$U_T\big(\mathcal{D}(A)\big) \subset \mathcal{D}(A).$$

Эквивалентное (0.1) условие, не использующее неограниченных операторов, есть

$$\mathbf{P}_t\, U_T = U_T\, \mathbf{P}_{\gamma t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{0.2}$$

Как будет показано ниже, в такой ситуации исходная динамическая система может быть каноническим образом расширена. Именно, будут построены такие система $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu}, \overline{T})$ и сохраняющее меру измеримое отображение $\pi\colon \overline{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$, что

$$\pi \circ \overline{T} = T \circ \pi. \tag{0.3}$$

При этом $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ строится как пространство реализаций на $]-\infty, 0]$ марковского процесса ξ с генератором A и стационарным распределением μ, а отображение π сопоставляет реализации $\xi(\cdot)$ ее значение $\xi(0)$. С построенным процессом связана фильтрация $\{\overline{\mathcal{F}}_t\}_{t\leqslant 0}$ пространства $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$. Далее, при сделанных выше предположениях без затруднений строится эндоморфизм $\overline{T}$, удовлетворяющий (0.3).

Все измеримые функции, определенные на $\mathcal{X}$, с помощью отображения π вкладываются в пространство измеримых функций на $\overline{\mathcal{X}}$, а наличие фильтрации на $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ позволяет строить мартингальное разложение этих функций. Можно по-разному использовать это разложение для доказательства предельных теорем, и ниже обсуждается только один из возможных вариантов.

Для нас представляет интерес действие T на фильтрации $\{\overline{\mathcal{F}}_t\}_{t\leqslant 0}$. При $\gamma = 1$ это действие тривиально. Если же $\gamma \neq 1$, то,

выбрав какую-то σ-алгебру $\overline{\mathcal{F}}_t$ с $t < 0$, мы можем затем включить ее в дискретное монотонное семейство $\{\overline{T}^{-k}(\overline{\mathcal{F}}_t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и аппроксимировать затем мартингалами, адаптированными к этому семейству, некоторый класс функций на $\overline{\mathcal{X}}$. Как известно [1], такую аппроксимацию можно использовать, например, для доказательства центральной предельной теоремы (ЦПТ). Если же функция, определенная на $\overline{\mathcal{X}}$, получена поднятием некоторой функции $f \in H$ с помощью π, т. е. имеет вид $f \circ \pi$, то условия аппроксимируемости могут быть выражены в терминах спектрального разложения f относительно A и действия T на это разложение (при наших условиях T определяет эндоморфизм семейства всех спектральных проекторов генератора A, согласованный с умножением на γ, относительно которого спектр A инвариантен).

Предлагаемый в данной работе метод доказательства ЦПТ, относящийся к случаю $\gamma \neq 1$, выдвигает, разумеется, вопрос о том, насколько типичной можно считать ситуацию, описанную выше. Имеется по крайней мере два класса динамических систем, для которых такие генераторы могут быть указаны. Это топологические цепи Маркова (ТЦМ), снабженные мерой максимальной энтропии, и некоторый класс алгебраических автоморфизмов торов, вообще говоря, негиперболических, хотя и эргодических. Для этих динамических систем предлагаемый подход дает новый и довольно простой способ доказательства ЦПТ (да, по-видимому, и других вероятностно-эргодических утверждений, справедливость которых наследуется фактор-системой динамической системы). Хотя результаты, касающиеся ЦПТ для указанных систем, уже давно известны, методы, используемые для их доказательства, не поддавались унификации: символическая динамика и сведение к известным условиям перемешивания применялись к гиперболическим системам, в то же время негиперболические автоморфизмы торов требовали иных средств, например, метода моментов [4]. Предлагаемый же в данной работе подход позволяет избежать, в частности, применения символической динамики (в полной мере это верно только для автоморфизмов торов, поскольку в случае ТЦМ символическая динамика, можно сказать, входит в определение рассматриваемой системы и неявным образом используется при построении генератора). К сожалению, автору неизвестна конструкция марковского генератора, γ-коммутирующего с T и такого, что $\gamma \neq 1$, применимая для какого-нибудь существенно более широкого класса динамических систем. Некоторые дальнейшие детали обсуждаются в Заключении,

Весьма интересен вопрос о том, какие следствия можно извлечь

из наличия генератора A, перестановочного с T (случай $\gamma = 1$). В [2] такой генератор (разностный оператор второго порядка, названный в [2] гомоклиническим лапласианом) был построен для некоторой специальной ситуации и применялся для доказательства ЦПТ. Однако часть условий, при которых в [2] была доказана ЦПТ, формулировалась не в терминах самого генератора, а в терминах некоторого его разложения в сумму "элементарных операторов". При этом для доказательства ЦПТ в [2] использовался метод Ч. Стейна. Отметим, что конструкции раздела 1 настоящей работы применимы, в частности, и к этому случаю, и возникающая в расширенной динамической системе фильтрация приводит к мартингальному разложению, но для доказательства предельных теорем это разложение требует при $\gamma = 1$ более тонкого анализа, выходящего за рамки данной работы.

Заметим, наконец, что хотя в разделе 1 настоящей работы конструкция расширения излагается для случая, когда T – эндоморфизм, в разделе 2, посвященном ЦПТ, предполагается, что T – автоморфизм. Этот случай наиболее важен, поскольку, во-первых, именно в этом случае нет каких-либо нетривиальных фильтраций, естественным образом связанных с исходной динамической системой, а, во-вторых, общий случай сводится к этому специальному с помощью теоремы В. А. Рохлина о естественном расширении. Обобщающая формулировка хотя и возможна, но излишне громоздка и потому опущена. Специфические черты, присущие некоторым классам эндоморфизмов, обсуждаются в Заключении.

1. Построение расширения

Рассмотрим определенный на $]-\infty, 0]$ марковский процесс (ξ_t) с генератором A и стационарным распределением μ. Под пространством $\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^{]-\infty,0]}$ реализаций этого процесса мы будем понимать пространство функций $\omega :]-\infty, 0] \to \mathcal{X}$. Мы снабдим $\overline{\mathcal{X}}$ σ-алгеброй $\overline{\mathcal{F}}$, порожденной цилиндрическими множествами, и вероятностной мерой $\overline{\mu}$, конечномерные распределения которой задаются обычным образом по полугруппе $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$ и стационарному распределению μ. То обстоятельство, что мы хотим получить процесс, определенный на $]-\infty, 0]$, не создает проблем в силу симметричности $(\mathbf{P}_t)_{t\geqslant 0}$.

Введем теперь сохраняющее меру отображение $\pi : \overline{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$, положив $\pi(\omega) = \omega(0)$, и определим в $\overline{\mathcal{X}}$ преобразование $\overline{T}$ соотношением

$$(\overline{T}\omega)(t) = T\big(\omega(\gamma^{-1}t)\big). \tag{1.1}$$

Очевидно, что $\overline{T}$ измеримо и что $\pi \circ \overline{T} = T \circ \pi$. Докажем, что $\overline{T}$ сохраняет меру $\overline{\mu}$. Если $(\xi_t)_{t\leqslant 0}$ – марковский процесс со значениями в X, определенный равенством $\xi_t(\omega) = \omega(t)$, то он индуцирует распределение $\overline{\mu}$ на пространстве своих реализаций, и нам достаточно показать, что процесс $\big(T(\xi_{\gamma^{-1}t})_{t\leqslant 0}\big)$ индуцирует то же распределение. Отметим следующие факты:

1) Распределения значений обоих рассматриваемых процессов при $t = 0$ одинаковы, поскольку T сохраняют меру μ.

2) Если марковский процесс (ξ_t) имеет генератор A, то процесс $(\xi_{\gamma t})$ – марковский с генератором γA.

3) Если марковский процесс (ξ_t) имеет генератор A, то процесс $\big(T(\xi_t)\big)$ – марковский с генератором γA.

В пояснении нуждается разве лишь утверждение 3). Оно вытекает из замечания 1, которое можно переписать в виде соотношения

$$\mathbf{E}_x\, f\big(T(\xi_t)\big) = \mathbf{E}_{T(x)}\, f(\xi_{\gamma t}), \qquad f \in H. \tag{1.2}$$

Повторное применение (1.2) доказывает марковское свойство процесса $\big(T(\xi_t)\big)$ (если T – автоморфизм, то марковость $\big(T(\xi_t)\big)$ очевидна и без этого). Из (1.2) же вытекает и утверждение о генераторе.

Комбинируя указанные три факта, получаем, что марковские процессы (ξ_t) и $\big(T(\xi_{\gamma^{-1}t})\big)$ имеют одинаковые распределения при $t = 0$ и одинаковые генераторы. Отсюда следует совпадение индуцируемых ими на $\overline{\mathcal{X}}$ мер, а, значит, и инвариантность $\overline{\mu}$ относительно $\overline{T}$.

2. Фильтрация в расширении и ее свойства

Мы будем в дальнейшем использовать символы $\mathbf{E}$ и $\overline{\mathbf{E}}$ для обозначения интегралов по мерам μ и $\overline{\mu}$, соответственно. Аналогичное соглашение действует в отношении условных математических ожиданий.

В пространстве $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$, построенном в разделе 1, имеется естественная фильтрация $\{\overline{\mathcal{F}}_t\}_{t\leqslant 0}$, в которой $\overline{\mathcal{F}}_t$ – алгебра, порожденная процессом $(\xi_u)_{u\leqslant 0}$ на $]-\infty, t]$. Как следует из соотношения (1.1), определяющего $\overline{T}$,

$$\overline{T}^{-1}(\overline{\mathcal{F}}_t) = \overline{\mathcal{F}}_{\gamma t}. \tag{2.1}$$

Докажем простое утверждение, которое понадобится нам впоследствии.

Предложение 1. *Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu, T)$ – динамическая система и A – γ-коммутирующий с T самосопряженный марковский генератор. Если A – эргодический генератор, то*

$$\bigcap_{t \leqslant 0} (\overline{\mathcal{F}}_t) = \overline{\mathcal{N}},$$

где $\overline{\mathcal{N}}$ – тривиальная σ-алгебра пространства $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$.

Доказательство. Эргодичность A означает, что у полугруппы $(\mathbf{P}_t)_{t \geqslant 0}$ нет непостоянных инвариантных элементов. Из эргодичности и самосопряженности A следует, что

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}_t f = (f, 1)$$

для всех $f \in H$ (в данном доказательстве сходимость понимается в смысле L_2-нормы, а числа отождествляются с соответствующими постоянными функциями). Равносильное утверждение для $f \circ \pi = f(\xi_0)$ состоит в том, что

$$\lim_{t \to -\infty} \overline{\mathbf{E}}\left(f(\xi_0) \,\middle|\, \overline{\mathcal{F}}_t\right) = (\overline{f}, 1). \tag{2.2}$$

Здесь и ниже мы используем одинаковые обозначения для L_p-норм, а также для скалярных произведений в L_2 на пространствах $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ и $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$, что не должно вызвать недоразумений.

Мы хотим показать, что для всех $f \in \overline{H} = L_2(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$

$$\lim_{t \to -\infty} \overline{\mathbf{E}}\left(F \,\middle|\, \overline{\mathcal{F}}_t\right) = (F, 1). \tag{2.3}$$

Это достаточно сделать для $F \in \overline{H}$, имеющих вид

$$F = f_1(\xi_{t_1}) f_2(\xi_{t_2}) \cdots f_n(\xi_{t_n}),$$

где $0 > t_1 > t_2 > \cdots > t_n$, а $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – ограниченные функции (такие функции F образуют фундаментальное множество в $\overline{H}$). При $t \leqslant t_n$

$$\overline{\mathbf{E}}\left(F \,\middle|\, \overline{\mathcal{F}}_t\right) = \overline{\mathbf{E}}\left(\overline{\mathbf{E}}\left(F \,\middle|\, \overline{\mathcal{F}}_{t_n}\right) \,\middle|\, \overline{\mathcal{F}}_t\right).$$

Далее, для F указанного вида функция $\overline{\mathbf{E}}\left(F \,\middle|\, \overline{\mathcal{F}}_{t_n}\right)$ может быть, в силу марковского свойства, представлена в виде $F = g(\xi_{t_n})$, где $g \in L_\infty(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ выражается в явном виде через $f_1, \ldots, f_n$ и операторы полугруппы $(\mathbf{P}_t)_{t \geqslant 0}$. Поэтому для таких F предельное соотношение (2.3) следует из (2.2). Предложение доказано.

Замечание 2. Используя определение $(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$, непрерывность $(\mathbf{P}_t)_{t \geqslant 0}$ в точке 0 и аппроксимацию функциями-произведениями,

только что применявшуюся в доказательстве предложения 1, нетрудно проверить, что для $F \in \overline{H}$ $\overline{\mathbf{E}}\left(F \middle| \overline{\mathcal{F}}_t\right) \to F$ при $t \uparrow 0$, и поэтому $\bigvee\limits_{t \leqslant 0} \overline{\mathcal{F}}_t = \overline{\mathcal{F}}$.

Напомним, что автоморфизм T пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ называется K-автоморфизмом [5], если существует такая σ-алгебра $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$, что $T^{-1}(\mathcal{F}^0) \subset \mathcal{F}^0$, $\bigvee\limits_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\mathcal{F}^0) = \mathcal{F}$, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\mathcal{F}^0) = \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ – тривиальная σ-алгебра пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$.

Следствие. *Если автоморфизм пространства имеет при $\gamma \neq 1$ γ-коммутирующий эргодический марковский генератор, то T и $\overline{T}$ являются K-автоморфизмами.*

Доказательство. Выбрав некоторое $t < 0$, мы получаем монотонную последовательность σ-алгебр $\overline{T}^{-n}(\overline{\mathcal{F}}_t) = \overline{\mathcal{F}}_{\gamma^n t}$, $n \in \mathbb{Z}$, возрастающую при $\gamma < 1$ и убывающую при $\gamma > 1$. Положим $\overline{\mathcal{F}}^n = \overline{\mathcal{F}}_{\gamma^n t}$, $n \in \mathbb{Z}$, и пусть, для определенности, $\gamma > 1$. Тогда $\cdots \supset \overline{\mathcal{F}}^n \supset \overline{\mathcal{F}}^{n+1} \cdots$ и $\overline{T}^{-1}(\overline{\mathcal{F}}^n) = \overline{\mathcal{F}}^{n+1}$. Поскольку последовательность $\{\overline{\mathcal{F}}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ является конфинальной в монотонном однопараметрическом семействе $\{\overline{\mathcal{F}}_t\}_{t \leqslant 0}$, то, учитывая Предложение 1 и Замечание 2, получаем, что

$$\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\mathcal{F}^0) = \mathcal{F}, \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\mathcal{F}^0) = \overline{\mathcal{N}}.$$

Это и означает, что $\overline{T}$ – K-автоморфизм. Тем же самым свойством обладает и T, будучи фактор-автоморфизмом преобразования $\overline{T}$ (см. [5]).

Если $\gamma < 1$, то приведенные только что рассуждения с заменой γ на γ^{-1} применимы к автоморфизмам T^{-1}, $\overline{T}^{-1}$, а K-свойство $\overline{T}$ и T вытекает из теории, изложенной в [5].

3. Центральная предельная теорема

В данном разделе предполагается, что T – автоморфизм, A – симметрический эргодический марковский генератор и $\gamma \neq 0$.

Предположим для определенности, что $\gamma > 1$ (случай $\gamma < 1$ рассматривается аналогичным образом; возможно также сведение к случаю $\gamma > 1$ посредством замены $T \to T^{-1}$, $A \to A$, $\gamma \to \gamma^{-1}$).

Положим $\overline{\mathcal{F}}^n = \overline{\mathcal{F}}_{\gamma^n t}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\cdots \supset \overline{\mathcal{F}}^n \supset \overline{\mathcal{F}}^{n+1} \cdots$ и $\overline{T}^{-1}(\overline{\mathcal{F}}^n) = \overline{\mathcal{F}}^{n+1}$.

Теорема. *Пусть для $f \in H$ выполнено условие*

$$\sum_{n \geqslant 0} \left| f - \mathbf{P}_{\gamma^{-n} t} f \right|_2^{1/2} + \left| \mathbf{P}_{\gamma^n t} f \right|_2 < \infty.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f\right|_2^2 = \sigma^2$$

и величины

$$n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f$$

асимптотически нормальны со средним значением 0 *и дисперсией* σ^2.

Доказательство. Пусть $\bar f = f\circ\pi = f(\xi_0)\in L_2(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ – поднятие функции $f\in H$ на $\overline{\mathcal{X}}$. Обозначения, введенные выше для простых и условных математических ожиданий на пространствах, действуют и в данном разделе.

Заметим, что $\overline{\mathbf{E}}\left(\bar f\,\middle|\,\overline{\mathcal{F}}_t\right) = (\mathbf{P}_t f)(\xi_t)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{E}}\left(\bar f - \overline{\mathbf{E}}\left(\bar f\,\middle|\,\overline{\mathcal{F}}_t\right)\right)^2 &= \overline{\mathbf{E}}\,\bar f^2 - \overline{\mathbf{E}}\left(\overline{\mathbf{E}}\left(\bar f\,\middle|\,\overline{\mathcal{F}}_t\right)\right)^2 = \\ &= (f,f) - (\mathbf{P}_t f,\mathbf{P}_t f) = (f, f-\mathbf{P}_{2t}f) \leqslant |f|_2\,|f-\mathbf{P}_{2t}f|_2\end{aligned}$$

и

$$\overline{\mathbf{E}}\left(\overline{\mathbf{E}}\left(\bar f\,\middle|\,\overline{\mathcal{F}}_t\right)\right)^2 = |\mathbf{P}_t f|_2^2.$$

Из этих соотношений и условий теоремы вытекает, что

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(\left(\overline{\mathbf{E}}\left(\bar f - \overline{\mathbf{E}}\left(\bar f\,\middle|\,\overline{\mathcal{F}}^{-n}\right)\right)^2\right)^{1/2} + \left(\overline{\mathbf{E}}\left(\overline{\mathbf{E}}\left(\bar f\,\middle|\,\overline{\mathcal{F}}^{n}\right)\right)^2\right)^{1/2}\right) < \infty.$$

Заметим также, что, согласно предложению 1, автоморфизм $\overline{T}$ обладает K-свойством и, следовательно, эргодичен. Поэтому для $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$, σ-алгебры $\overline{\mathcal{F}}^{(0)}$ и функции $\bar f$ выполнены условия теоремы 2 из [1] (при $p=2$), утверждающей в данных обстоятельствах асимптотическую нормальность величин $n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n-1} U_{\overline{T}}^k \bar f$ при $n\to\infty$. Для завершения доказательства остается заметить, что из соотношения

$$n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n-1} U_{\overline{T}}^k \bar f = \left(n^{-1/2}\sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f\right)\circ\pi$$

вытекает одинаковая распределенность нормированных сумм, построенных по $\bar f$ с помощью $\overline{T}$ и по f с помощью t.

Замечание 2. В условиях данной теоремы, как показано в [2], имеет место представление

$$\bar{f} = U_{\overline{T}}\, g - g + h,$$

где h, $g \in L_2(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ и последовательность $\left\{U_{\overline{T}}^{-k} h\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является стационарной последовательностью мартингал-разностей. Из этого представления с учетом известных результатов о мартингал-разностях могут быть в тех же условиях установлены функциональная центральная предельная теорема и закон повторного логарифма.

Заключение

Здесь мы коснемся примеров, в которых имеет место ситуация, рассмотренная в данной работе. При этом большинство подробностей опускается, поскольку автор намерен рассмотреть эти вопросы в отдельной статье. Первый класс примеров дают неприводимые апериодические топологические цепи Маркова с мерой максимальной энтропии. Согласно [3], для таких динамических систем можно построить трансверсальные потоки (сжимающийся и расширяющийся). Напомним, что, согласно Я. Г. Синаю, поток $(R_t)_{t\in\mathbb{R}}$ сохраняющих меру преобразований называется трансверсальным для преобразования T, если $R_t T = T R_{\lambda t}$ при некотором λ. Построенные в [3] трансверсальные потоки эргодичны и имеют коэффициенты $\lambda \neq 1$. Приняв квадрат генератора такого потока за генератор марковского процесса, мы оказываемся в ситуации настоящей работы с $\gamma = \lambda^2$. Другой класс примеров дается алгебраическими эргодическими автоморфизмами торов, снабженных мерой Хаара. Здесь соображения, использующие теорему Перрона–Фробениуса, позволяют в ряде случаев построить генератор γ-коммутирующего с автоморфизмом диффузионного процесса (в простейших случаях, когда автоморфизм имеет специальную структуру и допускает гладкий трансверсальный поток, генератор строится так же как и для ТЦМ). Этот генератор не является эллиптическим, и диффузия идет вдоль слоев расширяющегося (или сжимающегося) слоения. Тем не менее, во многих случаях эргодичность генератора имеет место, и предложенный в настоящей работе подход может быть применен. В частности, некоторые негиперболические эргодические автоморфизмы входят в этот класс. В целом же вопрос о конструировании генераторов с нужными свойствами исследован недостаточно и автор надеется к нему вернуться.

Последнее замечание относится к существенно необратимым эндоморфизмам, не рассматривавшимся в настоящей работе. Любопытное обстоятельство состоит в том, что наличие у эндоморфизма γ-коммутирующего с ним при $\gamma > 1$ самосопряженного марковского генератора, для которого 0 является изолированной простой точкой спектра, влечет точность (см. [5]) исходного эндоморфизма. Теорема, аналогичная основному утверждению данной работы, имеет место и в этой ситуации. При этом генератор оказывается полезным при проверке условий ЦПТ, но расширение, построенное в разделе 1, оказывается ненужным для этих целей. Однако более интересно то обстоятельство, что расширение оказывается все же полезным для исследования с точки зрения предельных теорем таких объектов как лакунарные тригонометрические ряды.

Литература

1. М. И. Гордин, *О центральной предельной теореме для стационарных процессов.* — Доклады АН СССР **188**, № 1 (1969), 739–741.
2. M. Gordin, *Homoclinic approach to the central limit theorem for dynamical systems.* — Contemporary Math. **149** (1993), 149–162.
3. Sh. Ito, *A construction of transversal flows for maximal Markov automorphisms.* In: Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory. vol. 3, 1972, pp. 12–17.
4. В. П. Леонов, *Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных случайных процессов.* М.: Наука, 1964.
5. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* — Успехи матем. наук **22**, № 5 (1967), 1–56.

Gordin M. I. Extensions of dynamical systems and martingale approximation method.

Let T be a measure preserving transformation of a probability space $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ and A be the generator of a μ-symmetric Markov process with state space X. Under assumption that A is an "eigenvector" for T an extension of T is constructed in terms of A. By means of this extension a version of the central limit theorem is proved via approximation by martingales.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 декабря 1993 г.