УДК 517.54

Ф. Ф. Майер, М. А. Севодин

УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ В ОБЛАСТЯХ С ВЫПУКЛЫМ ДОПОЛНЕНИЕМ

В статье построены достаточные условия однолистности для функций, мероморфных во внешности выпуклых областей. Случай регулярных в выпуклых областях функций изучен ранее в работе [1]. В п. 1 статьи получены условия однолистности для двух классов областей с квазиконформной границей. В п. 2 с помощью результатов п. 1 построены новые признаки однолистности в областях с выпуклым дополнением и осуществлена геометризация полученных условий. Приложения к обратным краевым задачам даны в п. 3.

1. Обозначим через $H(E^-)$ класс функций, заданных в области $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$, регулярных при $1 < |\zeta| < \infty$ и имеющих разложение $f(\zeta) = a_{-1}\zeta + a_0 + a_1\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + \dots$, $a_{-1} \neq 0$. Под $\zeta(w)$ будем понимать функцию, конформно отображающую область G на E^-. Через $w(\zeta)$ обозначим обратную к $\zeta(w)$ функцию. Плотность гиперболической метрики области G определяется равенством $\rho_G(w) = |\zeta'(w)| / (|\zeta(w)|^2 - 1)$ (см., напр., [2], с. 326).

Пусть

$$I(f, G) = \sup_{w \in G} \{ |\zeta(w) f''(w)/f'(w)| \rho_G^{-1}(w) \},$$

$$J(f, G) = \sup_{w \in G} \{ | \{f, w\} | \rho_G^{-2}(w) \}, \quad b = b(G, a) = \sup_{\zeta \in E^-} \Phi(w, \zeta, a),$$

где $\{f, w\} = (f''(w)/f'(w))' - 2^{-1}(f''(w)/f'(w))^2$,

$$\Phi(w, \zeta, a) = 1 + (a-1)/\zeta\bar{\zeta} - 2^{-1}(\zeta - 1/\bar{\zeta}) w''(\zeta)/w'(\zeta).$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть область G такова, что $w(\zeta) \in H(E^-)$ и*

$$\sup_{\zeta \in E^-} \{ (|\zeta|^2 - 1) |\zeta^2 \{w, \zeta\}| \} \leqslant 4\mu, \quad \mu < 1. \tag{1}$$

Тогда функция $f(w)$, $f(w(\zeta)) \in H(E^-)$, однолистна в G, если выполняется одно из условий

$$I(f, G) \leqslant a(2-a)/b; \tag{2}$$

$$J(f, G) \leqslant 2a(2-a). \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем $a = a(\mu) = (1 + \sqrt{1 + 8\mu})/2$.

Для доказательства теоремы потребуется

Лемма 1 (ср. с [3]). *Если функция $w(\zeta)\in H(E^-)$ и удовлетворяет условию* (1), *то $w(\zeta)$ — K — квазиконформно продолжима на расширенную комплексную плоскость $\overline{C}$, причем $K=a/(2-a)$.*

Действительно, рассмотрим в E^- функцию $w_\varepsilon(\zeta)=w(\varepsilon\zeta)/\varepsilon$, $\varepsilon>1$, $\zeta\in E^-$. По условию леммы имеем

$$|\{w_\varepsilon,\zeta\}|\leqslant 4\mu[|\zeta|^2(|\zeta\varepsilon|^2-1)]^{-1}<4\mu[|\zeta|^2(|\zeta|^2-1)]^{-1},\ \zeta\in E^-. \quad (4)$$

Теперь введем функцию $\hat{w}(\zeta)$, которая совпадает с $w_\varepsilon(\zeta)$ в E^-, а в $E=\{\zeta:|\zeta|<1\}$ определяется формулой

$$\hat{w}(\zeta)=w_\varepsilon(1/\overline{\zeta})+(\zeta-1/\overline{\zeta})w'_\varepsilon(1/\overline{\zeta})/\Phi(w,\ 1/\overline{\zeta},\ a).$$

Так как $w_\varepsilon(\zeta)\in H(E^-)$, то $w_\varepsilon(\zeta)=a_{-1}\zeta+a_0+a_1\zeta^{-1}+a_2\zeta^{-2}+\ldots$, $a_{-1}\neq 0$. Поэтому отображение $\hat{w}(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta=0$ ведет себя следующим образом: $\hat{w}(\zeta)=a_0+aa_{-1}\zeta+a_1\overline{\zeta}+o(|\zeta|^2)$. Следовательно, $\hat{w}(\zeta)$ гомеоморфно в окрестности точки $\zeta=0$. Таким образом, отображение $\hat{w}(\zeta)$ определено всюду в $\overline{C}$, но может обращаться в ∞. В силу свойств функции $w(\zeta)$ отображение $\hat{w}(\zeta)$ имеет непрерывные частные производные $(\hat{w})_\zeta$ и $(\hat{w})_{\overline{\zeta}}$ в E, за исключением возможных полюсов $\hat{w}(\zeta)$, в которых непрерывны $(1/\hat{w})_\zeta$ и $(1/\hat{w})_{\overline{\zeta}}$. Вычисления показывают, что при $\zeta\in E$

$$\hat{w}_\zeta(\zeta)=aw'_\varepsilon(1/\overline{\zeta})\,\Phi^{-2}(w_\varepsilon,\ 1/\overline{\zeta},\ a),$$

$$\hat{w}_{\overline{\zeta}}(\zeta)=-[a(a-1)\zeta^2+(\zeta-1/\overline{\zeta})^2\{w_\varepsilon,\ 1/\overline{\zeta}\}/2\overline{\zeta}^2]\,\hat{w}_\zeta(\zeta)/a.$$

Отсюда видно, что в точках непрерывности $\hat{w}(\zeta)$ $\hat{w}_\zeta(\zeta)\neq 0$, а в точках ζ, где $\hat{w}(\zeta)=\infty$, $(1/\hat{w}(\zeta))_\zeta\neq 0$, $\zeta\in E\setminus\{0\}$. Кроме того, учитывая (4), имеем при $\zeta\in E$

$$|\hat{w}_{\overline{\zeta}}(\zeta)/\hat{w}_\zeta(\zeta)|=|a(a-1)\zeta^2+(\zeta-1/\overline{\zeta})^2\{w_\varepsilon,\ 1/\overline{\zeta}\}/2\overline{\zeta}^2|\,a^{-1}<$$
$$<\{a(a-1)|\zeta|^2+2\mu-2\mu|\zeta|^2\}a^{-1}=2\mu/a=(\sqrt{1+8\mu}-1)/2<1.$$

Итак, отображение $\hat{w}(\zeta)$ локально гомеоморфно в $\overline{E}$, а с учетом леммы Авхадиева [4] и в $\overline{C}$. Следовательно, $\hat{w}(\zeta)$ гомеоморфно в $\overline{C}$ по теореме о монодромии. Так как неравенство $|\hat{w}_{\overline{\zeta}}(\zeta)/\hat{w}_\zeta(\zeta)|<(\sqrt{1+8\mu}-1)/2=a-1<1$ выполняется почти всюду в $\overline{C}$ и $\hat{w}(\zeta)$ абсолютно непрерывна на линиях, то $\hat{w}(\zeta)$ — K — квазиконформное отображение плоскости $\overline{C}$, $K=a/(2-a)$. Устремив теперь ε к 1, получим утверждение леммы 1.

Доказательство теоремы 1 проведем методом Альфорса [5, с. 119]. Будем считать, что функции $f(w)$ и $w(\zeta)$ конформны в $\overline{G}$ и $\overline{E^-}$ — соответственно, а в (1) — строгое неравенство. Эти предположения не ограничивают общности, так как в противном случае достаточно провести аппроксимацию (см., напр., [5], с. 119). Следовательно, по лемме 1 отображение

$$F(\zeta) = w(1/\overline{\zeta}) + (\zeta - 1/\overline{\zeta})w'(1/\overline{\zeta})/\Phi(w,\ 1/\overline{\zeta};\ a),\ \zeta \in E,$$

является квазиконформным продолжением на C функции $w(\zeta)$, причем отображение $F(\zeta)$ — непрерывно-дифференцируемо в E. Значит (см., напр., [5], с. 71), квазиконформное отражение относительно границы G можно взять в виде

$$\lambda(w) = \begin{cases} F(1/\overline{\zeta(w)}), & w \in \overline{G}, \\ w(1/\overline{F^{-1}(w)}) & w \in C/G, \end{cases} \tag{5}$$

причем через $F^{-1}(w)$ обозначено обратное отображение к $F(\zeta)$.

Рассмотрим теперь функцию $f(w)$, удовлетворяющую условию (2), и положим $\hat{f}(w) = \{f(w),\ w \in \overline{G};\ T(w),\ w \in C/G\}$, где $T(w) = f(\lambda(w)) + (w - \lambda(w))f'(\lambda(w))$. Отображение $\hat{f}(w)$ конформно при $w \in \overline{G}$. Если мы докажем, что $|\hat{f}_{\overline{w}}/\hat{f}_w| < 1$, $w \in C \setminus G$, то $\hat{f}(w)$ локально гомеоморфно в $\overline{C}$, и, следовательно, по теореме о монодромии $\hat{f}(w)$ — гомеоморфное отображение $\overline{C}$, значит, $f(w)$ однолистна в G. Вычислим

$$\left|\frac{\hat{f}_{\overline{w}}(w)}{\hat{f}_w(w)}\right| = \left|\frac{f''(\lambda(w))(w - \lambda(w))\lambda_{\overline{w}}(w)}{f'(\lambda(w))[1 + (w - \lambda(w))f''(\lambda(w))\lambda_w(w)/f'(\lambda(w))]}\right|,\ w \in C/G.$$

Переходя в этом равенстве к точке $w \in G$, видим, что вопрос о гомеоморфности отображения $\hat{f}(w)$ сводится к проверке соотношения

$$\left|\frac{f''(w)(\lambda(w) - w)\lambda_{\overline{w}}(w)/J_\lambda(w)}{f'(w)[1 + (\lambda(w) - w)\overline{\lambda_{\overline{w}}}(w)f''(w)/f'(w)I_\lambda(w)]}\right| < 1,\ w \in G, \tag{6}$$

где $I_\lambda(w)$ — якобиан отображения $\lambda(w)$.

Имеют место следующие равенства при $w \in G$:

$$\lambda_{\overline{w}}(w) = -aw'(\zeta(w))\overline{\zeta'(w)}[\Phi(w,\ \zeta(w),\ a)\zeta\overline{(w)}]^{-2},$$

$$\lambda_w(w) = [a(a-1)(\overline{\zeta(w)})^{-2} + \zeta^2(w)(\zeta(w) - 1/\overline{\zeta(w)})^2\{w,\ \zeta(w)\}/2]\times$$

$$\times[\Phi(w,\ \zeta(w), a)\zeta(w)]^{-2},\ w - \lambda(w) =$$

$$= (\zeta(w) - 1/\overline{\zeta(w)})w'(\zeta(w))\Phi^{-1}(w,\ \zeta,\ a).$$

Поэтому, учитывая требования теоремы 1, получим

$$\lambda_{\bar{w}}(w)(w-\lambda(w))\rho_G(w)/bI_\lambda(w)| < a[a^2-4\mu^2]^{-1},\ w\in G,$$

$$|\bar{\lambda}_{\bar{w}}(w)(w-\lambda(w))\rho_G(w)/bI_\lambda(w)| < 2\mu[a^2-4\mu^2]^{-1},\ w\in G.$$

Из последних двух соотношений и (2) вытекает справедливость (6), т. е. однолистность $f(w)$ при выполнении (2) доказана. Отметим, что из результатов работы [6] легко получить оценку постоянной b сверху: $b\leqslant a+3$.

Обоснование условия однолистности (3) проводится аналогично, но определяя $\hat{f}(w)$ в качестве $T(w)$, нужно взять

$$T(w)=f(\lambda(w))+\frac{(w-\lambda(w))f'(\lambda(w))}{1-(w-\lambda(w))f''(\lambda(w))/2f'(\lambda(w))},$$

где $\lambda(w)$ из (5).

Сформулируем теперь еще одну теорему, которая будет нам необходима в дальнейшем.

Теорема 2. *Пусть область G такова, что $w(\zeta)\in H(E^-)$ и*

$$\sup_{\zeta\in E^-}\left\{|\zeta|^2\left|\frac{w'(\zeta)}{w_0'(\zeta)}-1\right|+(|\zeta|^2-1)\left|\zeta\frac{w_0''(\zeta)}{w_0'(\zeta)}\right|\right\}\leqslant\mu,\ \mu<1,\ \zeta\in E^-, \quad (7)$$

с некоторой функцией $w_0(\zeta)\in H(E^-)$, $w_0'(\infty)=w'(\infty)$. Тогда функция $f(w)$, $f(w(\zeta))\in H(E^-)$, является однолистной в G, если выполняется одно из условий

$$I(f,\ G)\leqslant 1-\mu, \quad (8)$$

$$J(f,\ G)\leqslant 2(1-\mu)^2. \quad (9)$$

Условие (8) является конкретизацией результата Авхадиева Ф. Г. [4] и получено в [7]. Доказательство признака (9) проводится аналогично доказательству теоремы 1 с учетом того, что $F(\zeta)=w(1/\bar{\zeta})+(\zeta-1/\bar{\zeta})w_0'(1/\bar{\zeta})$, $\zeta\in E$, является $(1+\mu)/(1-\mu)$ — квазиконформным продолжением функции $w(\zeta)$ на $\bar{C}$ [4].

2. Пусть область G с выпуклым дополнением ограничена кривой L, кривизну которой будем обозначать через $K(\sigma)$, где σ — дуговая координата контура L. Будем говорить, что $G\in\mathfrak{M}(k,K)$, если $k\leqslant K(\sigma)\leqslant K$, и что $G\in\mathfrak{M}(\delta)$, если кривизна $K(\sigma)$ является дифференцируемой функцией от σ и $K'(\sigma)\leqslant\delta$, $K(\sigma)\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$. Положим $M=\max\limits_{w\in\partial G}|w|$, $m=\min\limits_{w\in\partial G}|w|$, $l_w=\int\limits_{\partial G}|dw|$, $A(x,\ y)=$ $=2-\exp[\sqrt{2(x^2 4^{-y}-1)}]$.

Теорема 3. *Мероморфная в области $G\in\mathfrak{M}(k,\ K)$ функция $f(w)$ будет однолистной, если*

$$I(f,\ G)\leqslant mA(KM,\ km); \quad (10)$$

$$J(f,\ G)\leqslant 2A^2(KM,\ km). \quad (11)$$

Доказательство. Пусть функция $w = w(\zeta)$ отображает E^- на область $G \in \mathfrak{M}(k, K)$. Покажем, что тогда выполняется условие (7) с $w_0(\zeta) = w'(\infty)\zeta$ и $\mu = 1 - A(KM, km)$, откуда будет следовать справедливость теоремы. Поскольку $K(\sigma) \geqslant k$, $k \geqslant 0$, то

$$1 + \operatorname{Re}\zeta\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)} \geqslant k\,|w'(\zeta)| = k\left|\frac{w(\zeta)}{\zeta}\right|\left|\zeta\frac{w'(\zeta)}{w(\zeta)}\right| \geqslant km\operatorname{Re}\zeta\frac{w'(\zeta)}{w(\zeta)},\ |\zeta| = 1.$$

Отсюда в силу принципа максимума

$$1 + \operatorname{Re}[\zeta w''(\zeta)/w'(\zeta)] - km\operatorname{Re}[\zeta w'(\zeta)/w(\zeta)] \geqslant 0,\ |\zeta| \geqslant 1, \tag{12}$$

что равносильно соотношению

$$Q(\zeta) = \zeta\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)} - km\left[\zeta\frac{w'(\zeta)}{w(\zeta)} - 1\right] \prec \frac{2(1-km)}{\zeta - 1} \tag{13}$$

($\prec$ — знак подчинения [2, с. 357]). Теперь воспользуемся следующим утверждением, вытекающим из результатов работы [8]. Если $Q(\zeta) \prec Q_0(\zeta)$, где $Q_0(\zeta)$ однолистна и звездообразна в E^-, а функция $Q(\zeta)$ имеет разложение вида

$$Q(\zeta) = b_n\zeta^{-n} + b_{n+1}\zeta^{-n-1} + \dots,\ \text{то}$$

$$\int\limits_\infty^\zeta Q(\tau)\frac{d\tau}{\tau} \prec \frac{1}{n}\int\limits_\infty^\zeta Q_0(\zeta)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Поэтому в силу (7) с учетом того, что $n \geqslant 2$, имеем

$$\ln\frac{w'(\zeta)}{w'(\infty)} - km\ln\frac{w(\zeta)}{\zeta w'(\infty)} \prec (1 - km)\ln\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right),$$

или

$$\frac{w'(\zeta)}{w'(\infty)}\left[\frac{w(\zeta)}{\zeta w'(\infty)}\right]^{-km} \prec \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right)^{1-km}.$$

Поскольку $1 - km \geqslant 0$, что вытекает из (6) при $\zeta = \infty$, то с учетом неравенства

$$|w'(\infty)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|w'(e^{i\theta})|\,d\theta = \frac{l_w}{2\pi},$$

где l_w — длина кривой L, получим

$$|w'(\zeta)| \leqslant M(l_w/\pi M)^{1-km} \leqslant 2^{1-km}M,\ \zeta \in E^-. \tag{14}$$

С учетом этого неравенства и в силу условия $K(\sigma) \leqslant K$ находим

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[1 + \operatorname{Re}\zeta\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)}\right]^2 d\theta \leqslant K^2\int\limits_0^{2\pi}|w'(\zeta)|^2\,d\theta \leqslant 2\pi K^2M^2 4^{1-km},\ \zeta = e^{i\theta}.$$

Отсюда, как и в работе [9], нетрудно получить, что

$$\sum_{j=2}^{\infty}|c_j|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\zeta\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)}\right|^2 d\theta\leqslant 2(K^2M^2 4^{1-km}-1)=d^2,\ \zeta=e^{i\theta},$$

где c_j — коэффициенты разложения в ряд функции $\zeta w''(\zeta)/w'(\zeta)=$ $=\sum_{j=2}^{\infty}c_j/\zeta^j$, $\zeta\in E^-$. Применяя неравенство Шварца, будем иметь

$$\left|\zeta\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{j\geqslant 2}|c_j|^2\sum_{j\geqslant 2}|\zeta|^{-2j}}\leqslant\frac{d}{|\zeta|\sqrt{|\zeta|^2-1}}.$$

После деления на $|\zeta|$ и интегрирования по радиальному лучу от ∞ до ζ это неравенство дает $|\ln[w'(\zeta)/w'(\infty)]|\leqslant d$, т. е. $|w'(\zeta)/w'(\infty)-1|\leqslant e^d-1=\mu$, $\zeta\in E^-$, что с учетом усиленной леммы Шварца [2, с. 323] эквивалентно неравенству

$$|\zeta|^2|w'(\zeta)/w'(\infty)-1|\leqslant\mu,\ \ \zeta\in E^-,$$

т. е. приходим к условию (7) с $w_0(\zeta)=w'(\infty)\,\zeta$.

Отсюда следует правомерность условий (10) и (11) по теореме 2. Теорема доказана.

Справедлива

Теорема 4. *Мероморфная в области* $G\in\mathfrak{M}(2\mu\pi^2/l_w^2)$ *функция* $f(w)$ *будет однолистной, если* $I(f,G)\leqslant q$ *или* $J(f,G)\leqslant$ $\leqslant 2q(a+1)$.

Здесь и далее $q=q(\mu)=a(\mu)(2-a(\mu))/(a(\mu)+1)$.

Доказательство. Пусть $w(e^{i\theta})$ — граничные значения функции $w(\zeta)$, отображающей область E^- на область G. Имеем

$$K'(\sigma)=\frac{\partial K}{\partial\theta}\Big/\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}=-\operatorname{Im}[e^{2i\theta}\{w,e^{i\theta}\}]/|w'(e^{i\theta})|^2.$$

Область G ограничена выпуклой линией. Значит, $|w'(\zeta)|\leqslant\pi/l_w$ [2, с. 513]. Поэтому в силу включения $G\in\mathfrak{M}(2\mu\pi^2/l_w^2)$ получим $\operatorname{Im}[e^{2i\theta}\{w,e^{i\theta}\}]\geqslant-2\mu$. Производная Шварца функции $w(\zeta)$ является регулярной в E^- функцией, причем в окрестности бесконечно-удаленной точки имеет место разложение $\{w,\zeta\}=$ $=a_4\zeta^{-4}+a_5\zeta^{-5}+a_6\zeta^{-6}+\ldots$ Следовательно, с учетом последнего неравенства $\zeta^2\{w,\zeta\}\lesssim 4\mu/(\zeta^2-1)$. Отсюда находим

$$|\{w,\zeta\}|\leqslant 4\mu[|\zeta|^2(|\zeta|^2-1)]^{-1},\ \zeta\in E^-.$$

Кроме того, для функций $w(\zeta)$, отображающих E^- на области с выпуклым дополнением, справедлива оценка [6] $|\zeta w''(\zeta)/w'(\zeta)|\leqslant$ $\leqslant 2(|\zeta|^2-1)^{-1}$, $\zeta\in E^-$, т. е.

$$b=\sup_{\zeta\in E^-}\left|\frac{a-1}{\zeta\bar\zeta}+1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar\zeta}-\zeta\right)\frac{w''(\zeta)}{w'(\zeta)}\right|\leqslant a+1.$$

Таким образом, мы видим, что условия теоремы 4 обеспечивают выполнение требований теоремы 1, по которой функция $f(w)$ будет однолистной в G.

Осуществим теперь „геометризацию" [10, с. 31] полученных условий однолистности.

Пусть $G(R_0)$ — класс однолистных в G функций $Q_0(w)$, область значений которых имеет равномерно ограниченный величиною R_0 внутренний радиус [11, с. 8].

Теорема 5. *Пусть функция* $f(w)=b_{-1}w+b_1w^{-1}+$ $+b_2w^{-2}+\ldots$ *мероморфна в области* $G\in\mathfrak{M}(k,K)$, $f'(w)\neq 0$, $w\in G$, *и удовлетворяет одному из условий*

$$1)\ \ln f'(w)\prec Q_0(w),\ Q_0(w)\in G(R_0),\ 2R_0\leqslant A(KM,\ km);$$

$$2)\ wf''(w)/f'(w)\prec Q_0(w),\ Q_0(w)\in G(R_0),$$

$$2R_0\leqslant mA(KM,\ km)2^{km}/M.$$

Тогда $f(w)$ *однолистна в* G.

Теорема 6. *Пусть функция* $f(w)=b_{-1}w+b_1w^{-1}+$ $+b_2w^{-2}+\ldots$ *мероморфна в области* $G\in\mathfrak{M}(2\mu\pi^2/l_w^2)$, $f'(w)\neq 0$, $w\in G$, *и удовлетворяет одному из условий*

$$1)\ \ln f'(w)\prec Q_0(w),\ Q_0(w)\in G(R_0),\ R_0\leqslant q/2;$$

$$2)\ wf''(w)/f'(w)\prec Q_0(w),\ Q_0(w)\in G(R_0),\ R_0\leqslant \pi mq/l_w.$$

Тогда $f(w)$ *однолистна в* G.

Доказательство теоремы 5. Если для функции $f(w)$ справедливо 1), то так же, как в [12], с учетом разложения $\ln f'(w)$ имеем

$$\left|\zeta(w)\frac{f''(w)}{f'(w)}\right|\leqslant\frac{2R_0\rho_G(w)|\zeta(w)|^2(|\zeta(w)|^2-1)}{|\zeta(w)|^4-1}\leqslant 2R_0\rho_G(w),\ w\in G,$$

т. е. функция $f(w)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, однолистна в G.

Приведем обоснование условия 2). Рассмотрим функцию

$$\varphi(\zeta)=w(\zeta)f''(w(\zeta))/f'(w(\zeta))=d_2\zeta^{-2}+d_3\zeta^{-3}+\ldots,$$

регулярную в области E^-. Поскольку $\varphi(\zeta)\prec\varphi_0(\zeta)=Q_0(w(\zeta))$, то на основании результатов из [11, с. 32], имеем

$$|\varphi(\zeta)|\leqslant 2^{-1}R_0\ln[(|\zeta|^2+1)/(|\zeta|^2-1)]. \qquad (15)$$

Но теперь в силу неравенства $\ln[(1+t)/(1-t)]\leqslant 2t/(1-t^2)$, $0<t<1$, можем записать

$$|\varphi(\zeta)|\leqslant R_0|\zeta|^{-2}/(1-|\zeta|^{-4})\leqslant R_0/(|\zeta|^2-1).$$

Переходя к переменной w и используя оценку (14), окончательно получим

$$\left| w\frac{f''(w)}{f'(w)} \right| \leqslant \frac{R_0 |w'(\zeta)| |\zeta'(w)|}{|\zeta(w)|^2 - 1} \leqslant R_0 2^{1-km} M\rho_G(w) \leqslant mA(KM, km)\rho_G(w),$$

откуда следует однолистность $f(w)$.

Теорема 6 доказывается аналогично. Специальный выбор мажорант $Q_0(w)$ приводит к разнообразным достаточным признакам однолистности. Мы на этом не останавливаемся.

3. Применим полученные выше результаты к исследованию сильной проблемы однолистности решения внешней обратной краевой задачи (ОКЗ) [10, с. 41]. Пусть на искомом контуре L_z как функция от длины s контура заданы значения функции

$$w(z)\Big|_{z \in L_z} = w(s) = u(s) + iv(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l. \tag{16}$$

Обозначим через $R(s) = (u'u'' + v'v'')/(u'^2 + v'^2)^{3/2}$.

Теорема 7. *Решение внешней ОКЗ с соответствием $w(\infty) = \infty$ будет однолистным, если заданные краевые значения (16) определяют выпуклый контур L_w, ограничивающий область G класса $\mathfrak{M}(k, K)$ и выполняется одно из условий*

1) $\ln[\max|w'(s)|/\min|w'(s)|] \leqslant \pi A(KM, km)/4$;

2) $\max R(s) - \min R(s) \leqslant B, \ B = \pi A(KM, km)\, 2^{km}/4M$;

3) $\int\limits_0^l R^2(s)|w'(s)|\,ds < c, \ c = A^2(KM, km)\,\pi 2^{km-1}/M$;

4) $\max R(s) \leqslant A(KM, km)\, 2^{km}/4M$ *или*

$$\min R(s) \geqslant -A(KM, km)\, 2^{km}/4M.$$

Доказательство. Обозначим через $z(w)$ функцию, конформно отображающую внешность контура L_w на внешность искомого контура L_z. Условие 1) доказывается сведением к п. 1 теоремы 5, если в качестве области мажорации $Q_0(G)$ выбрать вертикальную полосу ширины $(\pi/4)\,A(KM, km)$. Докажем условие 2). Пусть

$$P(\sigma) = \operatorname{Re}\ln z'(w)\Big|_{w \in L_w} = -\frac{1}{2}\ln[u'^2(s) + v'^2(s)],$$

σ — дуговая абсцисса контура L_w, $0 \leqslant \sigma \leqslant l_w$. Обозначим

$$S(\zeta) = \ln z'_w(w(\zeta)) = c_0 + c_2\zeta^{-2} + \ldots, \ \zeta \in E^-.$$

Поскольку

$$P'(\sigma) = -R(s) = -\operatorname{Im}[e^{i\theta}S'(e^{i\theta})]/|w'(e^{i\theta})|,$$

то в силу условия 2), оценки (8) и принципа максимума имеем

$$P_1 \leqslant \operatorname{Im}[\zeta S(\zeta)] \leqslant P_2, \ P_1 + P_2 \leqslant B2^{1-km}M, \ \zeta \in E^-.$$

Отсюда, вычисляя максимум внутреннего радиуса полосы и используя (15) для $\varphi(\zeta)=\zeta S'(\zeta)$, получим

$$|\zeta S'(\zeta)|=\left|\zeta\frac{z''_{ww}(w(\zeta))}{z'_w(w(\zeta))}w'(\zeta)\right|\leqslant\frac{B2^{1-km}M}{\pi}\ln\frac{|\zeta|^2+1}{|\zeta|^2-1}.$$

Но тогда

$$|\zeta(w)z''(w)/z'(w)|\leqslant 2BM\pi^{-1}2^{1-km}\rho_G(w),$$

и по теореме 3 $z(w)$ — однолистная функция.

Условие 3) теоремы равносильно неравенству

$$\int_0^{l_\omega}P'^2(\sigma)\,d\sigma\equiv\int_0^{2\pi}\frac{[\operatorname{Im}e^{i\theta}S'(e^{i\theta})]^2}{|w'(e^{i\theta})|}d\theta\leqslant c.$$

В силу (15) имеем

$$\int_0^{2\pi}[\operatorname{Im}\zeta S'(\zeta)]^2d\theta\leqslant c2^{1-km}M,\quad \zeta=e^{i\theta}.$$

Как и при доказательстве теоремы 3 выводим оценку

$$|\zeta S'(\zeta)|\leqslant\sqrt{\frac{cM}{\pi 2^{km-1}}}\,\frac{1}{|\zeta|\sqrt{|\zeta|^2-1}}\leqslant\sqrt{\frac{cM}{\pi 2^{km-1}}}\,\frac{1}{|\zeta|^2-1},\ \zeta\in E^-,$$

которая влечет выполнимость условия (10). Условие 4) обосновывается аналогично.

Теорема 8. *Решение внешней ОКЗ с соответствием $w(\infty)=\infty$ будет однолистным, если заданные краевые значения (16) определяют выпуклый контур L_w, ограничивающий область G класса $\mathfrak{M}(2\mu\pi^2/l_w^2)$, и выполняется одно из условий*

1) $\ln[\max|w'(s)|/\min|w'(s)|]\leqslant\pi q/4$;

2) $\max R(s)-\min R(s)\leqslant B,\ B=\pi^2q/2l_w$;

3) $\int_0^l R^2(s)|w'(s)|\,ds\leqslant c,\ c=2\pi^2q^2/l_w$;

4) $\max R(s)\leqslant\pi q/2l_w$ *или* $\min R(s)\geqslant-\pi q/2l_w$.

Доказательство теоремы 8 проводится аналогично доказательству теоремы 7.

В заключение авторы благодарят проф. Л. А. Аксентьева за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентьев Л. А., Шабалин П. Л. Условия однолистности в звездообразных и выпуклых областях.— Труды семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983, вып. 20, с. 35—42.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1966.
3. Насыров С. Р. О квазиконформном продолжении одного класса однолистных функций.— В кн: Теория отображений, ее обобщения и приложения.— Киев, 1982, с. 152—156.
4. Авхадиев Ф. Г. Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений.— Матем. заметки, т. 18, № 6, 1975, с. 793—802.
5. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям.— М.: Мир, 1969.
6. Авхадиев Ф. Г. Об условиях однолистности аналитических функций.— Изв. вузов. Математика, 1970, № 11, с. 3—13.
7. Севодин М. А. Некоторые достаточные условия однолистности общего решения обратной краевой задачи.— Труды семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981, вып. 18, с. 184—192.
8. Miller S., Mocanu P. Differential subordinations and univalent functions.— Michigan Math. J., 1981, v. 28, № 2, p. 157—171.
9. Авхадиев Ф. Г., Гайдук В. Н. Применение почти выпуклых функций к обратным краевым задачам.— Изв. вузов. Математика, 1968, № 6, с. 3—10.
10. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций.— УМН, 30:4, 1975, с. 3—60.
11. Митюк И. П. Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.— Краснодар: Изд-во Кубанского ун-та, 1980.
12. Аксентьев Л. А., Майер Ф. Ф. Применение методов подчиненности и симметризации к достаточным признакам однолистности аналитических функций.— Труды семинара по краевым задачам.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983, вып. 19, с. 14—28.

Доложено на семинаре 28 января 1984 года.