

**ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА
ДЛЯ СЛАБОЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ
В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

ДМИТРОВСКИЙ В. А., ЕРМАКОВ С. В., ОСТРОВСКИЙ Е. И.

Введение

Пусть T — метрический компакт относительно метрики ρ , $C(T, \rho)$ — пространство непрерывных функций на T , $\xi = \{\xi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность центрированных полей, принадлежащих $C(T, \rho)$ с вероятностью единица. Предполагается, что $D\xi_i(t) < \infty$ для любого $t \in T$. Будем говорить, что последовательность ξ удовлетворяет центральной предельной теореме (ц. п. т.), если последовательность нормированных сумм $S_n(t) = n^{-1/2}(\xi_1(t) + \dots + \xi_n(t))$ слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к непрерывному с вероятностью единица гауссовскому полю. Ряд достаточных условий справедливости ц. п. т. в случае независимых полей $\xi_i(t)$ имеется в [1—3]. Для других банаховых пространств ц. п. т. приведена в [4—6], [16—18].

При доказательстве ц. п. т. необходимо установить сходимость конечномерных (т. е. цилиндрических) распределений, убедиться в слабой компактности семейства мер в $C(T, \rho)$, порожденных последовательностью $S_n(t)$, и проверить непрерывность предельного поля. Основным этапом является доказательство слабой компактности, поскольку условия на $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, налагаемые при этом, будут гарантировать справедливость обоих оставшихся свойств.

Результаты работы были частично изложены на первом Всесоюзном совещании — семинаре «Гауссовские случайные процессы и поля. Свойства реализаций.»

§ 1. Обозначения и вспомогательные предложения

Введем некоторые используемые в тексте обозначения. Если η — одномерная случайная величина, то $\|\eta\|_p = (M|\eta|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$. Производящей функцией моментов величины η называется функция $\exp \Psi(\lambda) = M \exp(\lambda\eta)$. Функция $\Psi(\lambda)$ конечна, если η удовлетворяет известному условию Крамера. Для симметрично распределенных величин выполняется равенство $\Psi(\lambda) = \ln M \operatorname{ch}(\lambda\eta)$. Для произвольной функции $f(x)$, определенной на полуоси $x > 0$, преобразование Юнга — Фенхеля (или Лежандра) называется функцией

$$f^*(y) = \sup_{x>0} (xy - f(x)).$$

Свойства преобразования $f \rightarrow f^*$ приведены в [7, с. 183]. Преобразованием Юнга — Фенхеля назовем функцию

$$f_*(y) = \inf_{x>0} (xy + f(x)).$$

Пусть (T, ρ) — метрическое пространство. Энтропией T в метрике ρ в смысле Колмогорова называется функция $H(\varepsilon, \rho)$, равная натуральному логарифму числа точек $N(\varepsilon, \rho)$ наименьшей ε -сети множества T в метрике ρ . Если T — компакт, то функция $H(\varepsilon, \rho)$ конечна для любого $\varepsilon > 0$: $H(\varepsilon, \rho) = \ln N(\varepsilon, \rho)$.

Будем писать $f_1(x) \ll f_2(x)$, если $f_1(x) \leq f_2(Cx)$ для некоторого $C > 0$ и всех $x > 1$. Если $f_1(x) \ll f_2(x)$ и одновременно $f_2(x) \ll f_1(x)$, будем писать $f_1(x) \sim f_2(x)$. Отношение $f_1(x) \sim f_2(x)$ есть отношение эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично, транзитивно. Например, $\exp\{C_1(x + C_2)^2\} \sim \exp x^2$. Условимся обозначать C положительные постоянные, не обязательно одни и те же в различных утверждениях. Мы будем предполагать, что последовательность ξ образует стационарный в узком смысле процесс относительно i с нулевым средним, удовлетворяющий либо условию сильного перемешивания (с. п.) с коэффициентом с. п. $\alpha(\tau)$, либо условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) с коэффициентом р. с. п. $\varphi(\tau)$.

Лемма 1.1. Пусть \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 — две σ -подалгебры основного вероятностного пространства, ξ и η — случайные величины, измеримые относительно \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 .

Тогда

$$|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leq C\alpha^{1-(1/p+1/q)} \|\xi\|_p \|\eta\|_q, \quad (1)$$

$$p, q > 1, \quad 1/p + 1/q \leq 1, \quad C \leq 16.$$

З а м е ч а н и е. Если φ — коэффициент р. с. п. между ξ и η , то имеет место оценка

$$|M\xi\eta - M\xi M\eta| \leq 2(\varphi)^{1/p} \|\xi\|_p \|\eta\|_q, \quad 1/p + 1/q = 1. \quad (2)$$

Лемма 1.1 доказана в [13], замечание к ней — в [8].

Лемма 1.2. Пусть случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n одинаково распределены и измеримы относительно σ -алгебр \mathcal{F}_i , $i = 1, \dots, n$, соответственно, (i_1, \dots, i_l) и (j_1, \dots, j_r) — несовпадающие наборы индексов из $1, \dots, \dots, n$. Положим

$$\alpha = \sup \alpha \left(\bigcup_{k=1}^l \mathcal{F}_{i_k}, \bigcup_{s=1}^r \mathcal{F}_{j_s} \right),$$

$$\varphi = \sup \varphi \left(\bigcup_{k=1}^l \mathcal{F}_{i_k}, \bigcup_{s=1}^r \mathcal{F}_{j_s} \right).$$

Тогда справедливы неравенства

$$\left| M \prod_{i=1}^n \xi_i - \prod_{i=1}^n M \xi_i \right| \leq 2n\varphi^{1/n} \|\xi\|_n^n, \quad (3)$$

$$\left| M \prod_{i=1}^n \xi_i - \prod_{i=1}^n M \xi_i \right| \leq Cn\alpha^{1-(n/p)} \|\xi\|_p^n, \quad p > n. \quad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оба неравенства доказываются по индукции. При $n = 2$ они верны в силу леммы 1.1 и замечания к ней. Сделаем теперь индуктивный переход в условиях р. с. п. В силу неравенства (2)

имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{M} \prod_{i=1}^{n+1} \xi_i - \prod_{i=1}^{n+1} \mathbf{M} \xi_i \right| \leq \left| \mathbf{M} \prod_{i=1}^{n+1} \xi_i - \mathbf{M} \xi_{n+1} \mathbf{M} \prod_{i=1}^n \xi_i \right| + \\ & \quad + \left| \mathbf{M} \xi_{n+1} \mathbf{M} \prod_{i=1}^n \xi_i - \mathbf{M} \xi_{n+1} \prod_{i=1}^n \mathbf{M} \xi_i \right| \leq \\ & \leq 2\varphi^{1/p} \left\| \prod_{i=1}^n \xi_i \right\|_p \|\xi_{n+1}\|_q + 2n\varphi^{1/n} \|\xi_{n+1}\|_1 \prod_{i=1}^n \|\xi_i\|_n. \end{aligned}$$

По неравенству Гельдера $\left\| \prod_{i=1}^n \xi_i \right\|_p \leq \|\xi\|_{np}^n$. Выбирая $q = n + 1$, $p = 1 + (1/n)$, оценим первое слагаемое:

$$2\varphi^{1/p} \left\| \prod_{i=1}^n \xi_i \right\|_p \|\xi\|_q \leq 2\varphi^{1/(n+1)} \|\xi\|_{n+1}^{n+1}.$$

Второе слагаемое оценим, используя неравенство Минковского:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_1 & \leq \|\xi\|_{n+1}, \quad \|\xi_i\| \leq \|\xi_i\|_{n+1}, \\ 2n\varphi^{1/n} \|\xi_{n+1}\|_1 \prod_{i=1}^n \|\xi_i\|_n & \leq 2n\varphi^{1/n} \|\xi\|_{n+1}^{n+1}. \end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{M} \prod_{i=1}^{n+1} \xi_i - \prod_{i=1}^{n+1} \mathbf{M} \xi_i \right| & \leq 2\varphi^{1/(n+1)} \|\xi\|_{n+1}^{n+1} + 2n\varphi^{1/n} \|\xi\|_{n+1}^{n+1} \leq \\ & \leq 2(n+1)\varphi^{1/(n+1)} \|\xi\|_{n+1}^{n+1}. \end{aligned}$$

Выполним теперь аналогично индуктивный переход в формуле (1):

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{M} \prod_{i=1}^{n+1} \xi_i - \prod_{i=1}^{n+1} \mathbf{M} \xi_i \right| \leq \left| \mathbf{M} \prod_{i=1}^{n+1} \xi_i - \mathbf{M} \prod_{i=1}^n \xi_i \mathbf{M} \xi_{n+1} \right| + \\ & + \left| \mathbf{M} \prod_{i=1}^n \xi_i \mathbf{M} \xi_{n+1} - \prod_{i=1}^n \mathbf{M} \xi_i \mathbf{M} \xi_{n+1} \right| \leq C\alpha^{1-(1/p)-(1/q)} \left\| \prod_{i=1}^n \xi_i \right\|_p \|\xi_{n+1}\|_q + \\ & + \|\xi_{n+1}\|_1 Cn\alpha^{1-(n/q)} \prod_{i=1}^n \|\xi_i\|_q \leq C\alpha^{1-(1/p)-(1/q)} \|\xi\|_q \|\xi\|_{np}^n + \\ & + Cn\alpha^{1-(n/q)} \|\xi\|_q^{n+1} \leq C\alpha^{1-(n+1)/q} \|\xi\|_q^{n+1} + \\ & + Cn\alpha^{1-(n+1)/q} \|\xi\|_q^{n+1} = C(n+1)\alpha^{1-(n+1)/q} \|\xi\|_q^{n+1}. \end{aligned}$$

(Мы выбрали $q = np$.)

Лемма доказана.

Для оценки «хвостов» распределений случайных величин удобно пользоваться производящей функцией моментов. Пусть ξ — симметричная (для простоты) случайная величина,

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) & = \ln \mathbf{M} \operatorname{ch}(\lambda\xi) = \ln \mathbf{M} \exp(\lambda\xi), \quad \lambda > 0, \\ \bar{F}(x) & = \mathbf{P}(\xi \geq x). \end{aligned}$$

Лемма 1.3. (Неравенство Чернова.) *Справедливо неравенство*

$$\bar{F}(x) \leq \exp\{-\Psi^*(x)\}. \quad (5)$$

Доказательство. По неравенству Чебышева

$$\bar{F}(x) = \mathbf{P}(\xi \geq x) \leq e^{-\lambda x} \mathbf{M} e^{\lambda\xi} = \exp\{-(\lambda x - \Psi(\lambda))\}.$$

Минимизируя правую часть по λ , получаем (5).

Лемма доказана.

Как уже отмечалось, нам потребуются условия непрерывности и слабый компактности семейства мер, порожденных непрерывными случайными полями в $C(T, \rho)$. Пусть $\xi_\alpha(t)$ ($t \in T, \alpha = 1, 2, \dots$) — случайные поля, ρ — псевдометрика на T . Введем обозначение

$$h(x) = \sup_{\alpha} \sup_{t \neq s} \mathbf{P}(|\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)| / \rho(t, s) > x)$$

и предположим, что для некоторого $t_0 \in T$ семейство мер, индуцированное на числовой прямой величинами $\xi_\alpha(t_0)$, слабо компактно. (Для определенности можно считать, что $\sup_{\alpha} \mathbf{D}\xi_\alpha(t_0) < \infty$.)

Теорема 1.1. Пусть поля $\xi_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots$, сепарабельны относительно ρ . Если для некоторого $C > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n}) h_*(C2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n})), \quad (6)$$

то все поля $\xi_\alpha(t)$ непрерывны с вероятностью единица и порожденное ими семейство мер в $C(T, \rho)$ слабо компактно.

Доказательство. Докажем непрерывность (компактность доказывается аналогично). По определениям нижней грани и копреобразования $h \rightarrow h_*$ существует такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n > 0$, что

$$Cx_n 2^{-n} N^{-2}(\rho, 2^{-n}) + h(x_n) < h_*(C2^{-n}N^{-2}(\rho, 2^{-n})) + 2^{-n} N^{-2}(\rho, 2^{-n}).$$

Из условия теоремы следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n C 2^{-n} + N^2(\rho, 2^{-n}) h(x_n)).$$

Поскольку $Cx_n 2^{-n}$ и $N^2(\rho, 2^{-n})h(x_n)$ неотрицательны, сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n}) h(x_n).$$

Введем обозначение $b_n = 2^{-n+2} x_n$; имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} N^2(\rho, 2^{-n}) h(b_n 2^{n-2}) < \infty.$$

По лемме 1 работы [3] поля $\xi_\alpha(t)$ непрерывны с вероятностью единица в псевдометрике ρ . В той же работе на с. 220 доказывается и факт, из которого при помощи наших рассуждений выводится слабая компактность семейства мер, порожденных полями $\xi_\alpha(t)$.

Теорема доказана. ■

Определим метрику $\rho_p(t, s)$ формулой

$$\rho_p^p(t, s) = \sup_{\alpha} \mathbf{M} |\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)|^p.$$

Следствие 1. Условие компактности величин $\xi_\alpha(t_0)$ и сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-np/(p+1)} N^{2/(p+1)}(\rho_p, 2^{-n}) \quad (7)$$

гарантируют непрерывность полей $\xi_\alpha(t)$ и их слабую компактность в пространстве $C(T, \rho_p)$.

Действительно, по неравенству Чебышева

$$P\left(\frac{|\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)|}{\rho_p(t, s)} > x\right) \leq \frac{\sup_\alpha M |\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)|^p}{\rho_p^p(t, s) x^p} \leq \frac{1}{x^p}.$$

Поэтому

$$h_*(x) = \inf_{y \geq 0} (xy + y^{-p}) \sim xp/(p+1),$$

что в силу (6) влечет (7).

Следствие 2. Предположим, что для некоторой псевдометрики $\rho(t, s)$ выполнено неравенство

$$\sup_\alpha M \operatorname{ch} \left\{ \lambda \frac{\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)}{\rho(t, s)} \right\} \ll \exp \{ |\lambda|^p \}. \quad (8)$$

Условие слабой компактности величин $\xi_\alpha(t_0)$ и сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} H_1^{1/q'}(2^{-n}, \rho), \quad (9)$$

где

$$1/q' = \max(1/2, 1/p), \quad 1/q + 1/p = 1,$$

гарантируют слабую компактность $\xi_\alpha(t)$ в пространстве $C(T, \rho)$.

Доказательство. Из ограниченности $M \operatorname{ch}(\lambda \eta)$ при $\lambda > 1$ вытекает неравенство $M \operatorname{ch}(\lambda \eta) \ll C \exp \lambda^2$ при $0 \leq \lambda \leq 1$, поэтому из неравенства (8) следует соотношение

$$M \operatorname{ch} \left\{ \lambda \frac{\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)}{\rho(t, s)} \right\} \ll \exp(\lambda^2 I_{\lambda \leq 1} + |\lambda|^p I_{\lambda > 1}),$$

из которого с помощью (5) выводим оценку

$$P\left(\frac{\xi_\alpha(t) - \xi_\alpha(s)}{\rho(t, s)} > x\right) \ll \exp\{-x^{q'}\}.$$

Поскольку

$$h_*(x) = \inf_y (xy + \exp\{-y^{q'}\}) \leq Cx |\ln^{1/q'} \frac{1}{x}|, \quad (10)$$

доказываемое утверждение следует из теоремы 1.1 (см. также [19], где, впрочем, не используется копреобразование $h_*(x)$).

§ 2. Оценки распределений сумм случайных величин

Пусть ξ_i — центрированные одномерные случайные величины, $S_n = n^{-1/2}(\xi_1 + \dots + \xi_n)$. Цель настоящего параграфа — вывод оценок распределения S_n , равномерных по n . Будет предполагаться, что случайные величины ξ_i одинаково распределены и симметричны. Степенными назовем оценки, включающие степенные моменты S_n . Неравенства для производящей функции моментов $\exp \Psi_n(\lambda) = M \exp(\lambda S_n)$, содержащие функцию $\Psi(\lambda) = \ln M \exp(\lambda \xi)$, именуется в дальнейшем экспоненциальными.

Некоторые из выводимых ниже оценок широко представлены в литературе в разрозненном виде; см., например, [14]; мы их воспроизводим здесь без доказательств для единообразия и удобства читателя. Следующий результат почти очевиден. Положим

$$\bar{\Psi}(\lambda) = \sup_n \Psi(\lambda/\sqrt{n})n.$$

Лемма 2.1. *Справедливо неравенство*

$$\sup_n \mathbf{P} (|S_n| > x) \leq \exp(-\bar{\Psi}^*(x)). \quad (11)$$

Действительно,

$$\exp \Psi_n(\lambda) = \mathbf{M} \exp \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \xi_i \right) = \exp n \Psi(\lambda/\sqrt{n}) \leq \exp \bar{\Psi}(\lambda).$$

Остается воспользоваться оценкой (5). Пусть, например, ξ удовлетворяет неравенству

$$\mathbf{M} \operatorname{ch}(\lambda \xi) \leq \exp \lambda^p, \quad p > 1, \quad \lambda > 1.$$

Положим $p' = \max(p, 2)$; имеем: $\Psi(\lambda) \leq \lambda^{p'}$. Поскольку $\Psi(\lambda) \leq \lambda^2$ при $\lambda \in [0, 1]$, при всех $\lambda > 0$ имеем оценку $\Psi(\lambda) \leq \lambda^{p'}$. Точно так же оценивается $\bar{\Psi}(\lambda)$:

$$n \Psi(n^{-1/2} \lambda) \leq n (\lambda/\sqrt{n})^{p'} = n^{1-(p'/2)} \lambda^{p'} \leq \lambda^{p'}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_n \ln \mathbf{P} (|S_n| > x) &\leq -\sup_{\lambda > 0} (x\lambda - \lambda^{p'}) \sim \\ &\sim -x^{q'}, \quad 1/q' + 1/p' = 1. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Справедливо неравенство*

$$\sup_n \Psi_n(\lambda) \leq \exp \Psi(\lambda). \quad (12)$$

Доказательство. Учитывая симметрию величин ξ_i и оценку $n^{-k/2} \leq n^{-1}$, $k \geq 2$, имеем:

$$\begin{aligned} \exp \Psi_n(\lambda) &= \mathbf{M} \exp \{ (\lambda S_n / \sqrt{n}) \} = [\mathbf{M} \exp (\lambda \xi / \sqrt{n})]^n = \\ &= \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathbf{M} \xi^k}{k! n^{k/2}} \right]^n \leq \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathbf{M} \xi^k}{k!} \right]^n < \\ &< \exp \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k \mathbf{M} \xi^k}{k!} = \exp \mathbf{M} \exp \lambda \xi = \exp \exp \Psi_1(\lambda). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие. *Имеет место оценка*

$$\sup_n \mathbf{P} (|S_n| > x) \leq \exp(-f^*(x)),$$

где $f(x) = \exp \Psi(x)$.

Предположим теперь, что одномерные симметричные величины ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, образуют стационарную в узком смысле последовательность. Обозначим через $\alpha(i)$ коэффициент сильного перемешивания (с. п.): $\alpha(i) = \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_i^\infty)$, где $\mathcal{F}_a^b = \sigma(\xi_k, a \leq k \leq b)$. Если $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(i) = 0$,

то говорят, что ξ_i удовлетворяют условию с. п.

Теорема 2.2. *Пусть ξ_i , $i = 1, 2, \dots$, имеют коэффициент с. п. $\alpha(i)$, удовлетворяющий для некоторого $p > 0$ и целого l , $2l < p$, условию*

$$\sup_{n \geq 1} n^{1-l} \sum_{i=1}^n i^{2l-2} \alpha^{1-(2l/p)}(i) < \infty. \quad (13)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{n \geq 1} \|S_n\|_{2l} \leq C(l, p) \|\xi\|_p. \quad (14)$$

Доказательство теоремы 2.2 проводится аналогично доказательству в монографии [1, с. 239] для случая $p = 4$.

Для симметричных центрированных величин ξ_i , удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания (р. с. п.), с коэффициентом р. с. п. $\varphi(i)$ (определения см. в [8, с. 388]), можно вывести следующие оценки.

Теорема 2.3. Пусть а) $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = 0$, б) $\sup_n DS_n = \sigma^2 < \infty$.

Тогда существует такая константа $C(2l)$, что верно неравенство:

$$MS_n^{2l} \leq C(2l) M\xi_n^{2l}. \quad (15)$$

Замечание. Если $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{1/2}(k) < \infty$, то условия а и б выполняются автоматически.

Доказательство. Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} MS_n^{2l} = 0$ или $M\xi_n^{2l} = \infty$, то формула (15) очевидна. Поэтому будем предполагать, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} MS_n^{2l} > 0$ и $M\xi_n^{2l} < \infty$. Введем обозначения

$$\eta_n = \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad \hat{\eta}_n = \sum_{j=n+k+1}^{2n+k} \xi_j, \quad a_n^{(2l)} = MS_n^{2l}.$$

Пользуясь индукцией по l и методами монографии [8, с. 432], можно получить неравенство

$$M|\eta_n + \hat{\eta}_n|^{2l} \leq 2(1+d)a_n^{(2l)} + D(l)M\xi_n^{2l}n^l,$$

где

$$d = (1 + \varphi^{1/(2l)}(k))^{2l}, \quad D(l) = \sum_{s=1}^{l-1} C_{2l}^{2s} C(2s) C(2l - 2s),$$

из которого вытекает рекуррентное неравенство для $a_n^{(2l)}$:

$$a_{2n}^{(2l)} \leq 2(1+d) \left(1 + \frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l} a_n^{(2l)} + D(l) \left(1 + \frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l} M\xi_n^{2l}n^l. \quad (16)$$

Действительно, представив $a_{2n}^{(2l)}$ в виде

$$a_{2n}^{(2l)} = \left\| \eta_n + \sum_{j=n+1}^{n+k} \xi_j + \hat{\eta}_n - \sum_{j=2n+1}^{2n+k} \xi_j \right\|^{2l}$$

и воспользовавшись неравенством Минковского, приходим к (16). Для продолжения доказательства нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.2. Пусть неотрицательная последовательность b_n удовлетворяет неравенству $b_{2n} < Cb_n + D$, где $C < 1$.

Тогда

$$b_{2^r} < b_1 + \frac{D}{1-C}.$$

Доказательство. Положим $b_n = \beta_n + D/(1-C)$. Тогда $\beta_1 = b_1 - D/(1-C) < b_1$ и $\beta_{2n} \leq C\beta_n < \beta_n$. Следовательно, $\beta_2 \leq C\beta_1 < \beta_1$, $\beta_4 \leq C\beta_2 < \beta_1$, ..., $\beta_{2^r} < \beta_1 < b_1$.

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Положим $a_n^{(2l)} = b_n^{(2l)}n^l$. Неравенство (16) примет тогда вид

$$b_{2n}^{(2l)} \leq 2^{1-l}(1+d) \left(1 + \frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l} b_n^{(2l)} + D(l)2^{-l} \left(1 + \frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l} M\xi_n^{2l}.$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} d = 1$ по условию р. с. п., можно выбрать такое k_0 , при котором $1 + d < 2,1$, и тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1-l} (1 + d) \left(1 + \frac{2k}{\sqrt{n}}\right)^{2l} = 2^{1-l} 2, \quad 1 < 1, \quad l = 3, 4, \dots$$

Следовательно, существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$

$$2^{1-l} (1 + d) \left(1 + \frac{2k_0}{\sqrt{n}}\right)^{2l} < C < 1.$$

Согласно лемме 2.2 получаем:

$$b_{2^l}^{(2l)} < M \xi^{2l} + \frac{\tilde{D}(l) M \xi^{2l}}{1 - C},$$

где

$$\tilde{D}(l) = D(l) 2^{-l} \left(1 + \frac{2k_0}{\sqrt{n_0}}\right)^{2l},$$

или

$$b_{2^l}^{(2l)} < \frac{2\tilde{D}(l)}{1 - C} M \xi^{2l}.$$

Поэтому

$$a_{2^l}^{(2l)} < \frac{2\tilde{D}(l)}{1 - C} M \xi^{2l} 2^{lr}.$$

Рассуждая так же, как в [8, с. 432], получим:

$$a_n^{(2l)} < C(2l) M \xi^{2l} n^l,$$

где

$$C(2l) = \frac{2(1 + 2k_0/\sqrt{n_0})^{2l}}{1 - C} \frac{(\sqrt{2} + 1)^{2l}}{2^l} \sum_{s=1}^{l-1} C_{2^l}^{2s} C(2s) C(2l - 2s),$$

что доказывает неравенство (15) для $n > n_0$. При $n < n_0$

$$a_{2n}^{(2l)} = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_{2l}^{2l} \leq (n \|\xi\|_{2l})^{2l} \leq n_0^{2l} M \xi^{2l}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4. Пусть существует выпуклая функция $h(\lambda)$, $\lambda > 1$, удовлетворяющая условиям

1) существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всякого $\delta < 1$

$$\|h(\delta\lambda) \leq (1 - \varepsilon_0)\delta^2 h(\lambda);$$

2) существует набор таких констант α, β, γ , что $1 \triangleright \alpha > \frac{1}{2} + \beta > 0$, $\gamma > 0$ и в области $\lambda > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n^{1-\alpha} \varphi^{n\alpha-1} (n^\beta \lambda^\gamma) \exp h(\lambda p n^{(1-\alpha)/2}) = 0;$$

3) справедливо соотношение

$$h(\lambda) \ll \Psi(\lambda^{1+\gamma}).$$

Тогда

$$\sup_{n \geq 1} \ln M \exp(\lambda S_n) \ll h(\lambda).$$

Следствие. В предположениях теоремы 2.4

$$\sup_n P(|S_n| > x) \ll \exp(-h^*(x)).$$

Доказательство теоремы. Введем обозначение: $h_n(\lambda) = \ln M \exp(\lambda S_n)$. Положим

$$m = [n^\alpha], \quad k = [n^\beta \lambda^\gamma] + 2, \quad N = \left[\frac{n}{m+k} \right] \sim n^{1-\alpha}.$$

Представим сумму S_n в виде

$$S_n = (X_1 + Y_1 + \dots + X_N + Y_N) / \sqrt{n},$$

где

$$X_1 = \xi_1 + \dots + \xi_m, \quad Y_1 = \xi_{m+1} + \dots + \xi_{m+k}, \\ X_l = T^{lm+(l-1)k} X_1, \quad Y_l = T^{l(m+k)} Y_1,$$

T — оператор сдвига, степенной индекс которого совпадает с индексом последнего слагаемого в суммах X_l и Y_l соответственно. По неравенству Гельдера с учетом неравенства (4) имеем:

$$\exp \{h_n(\lambda)\} = M \exp(\lambda S_n / \sqrt{n}) = \\ = M \exp\{\lambda (X_1 + \dots + X_N) / \sqrt{n}\} \exp\{\lambda (Y_1 + \dots + Y_N) / \sqrt{n}\} \leq \\ \leq M^{1/p} \exp\{\lambda p \sum_{i=1}^N X_i / \sqrt{n}\} M^{1/q} \exp\{\lambda q \sum_{i=1}^N Y_i / \sqrt{n}\} = A^{1/p} B^{1/q},$$

где

$$A = M \prod_{i=1}^N \exp(\lambda p X_i / \sqrt{n}) \leq \exp\{N h_m(\lambda p \sqrt{m} / \sqrt{n})\} + \\ + 2N \Phi^{1/N}(k) \exp\{h_m(\lambda p N \sqrt{m} / \sqrt{n})\} = A_1 + A_2, \\ B \leq \exp\{\Psi(\lambda q N k / \sqrt{n})\}, \quad 1/p + 1/q = 1.$$

По условию $A_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$h_n(\lambda) \leq N p^{-1} h_m \left(\frac{\lambda p \sqrt{m}}{\sqrt{n}} \right) + 1,01 q^{-1} \Psi \left(\frac{\lambda q N k}{\sqrt{n}} \right). \quad (17)$$

Сделаем теперь предположение индукции $h_m(\lambda) \ll h(\lambda)$, выполненное в силу условия 3 при $m = 1$, а следовательно, и при любом фиксированном m_0 . В силу условия 1

$$N p^{-1} h_m \left(\frac{\lambda p \sqrt{m}}{\sqrt{n}} \right) \leq N p^{-1} h \left(\frac{\lambda p \sqrt{m}}{\sqrt{n}} \right) \leq \\ \leq N p^{-1} (1 - \varepsilon_0) h(\lambda) \frac{p^2 m}{n} \leq p(1 - \varepsilon_0) h(\lambda).$$

Выберем теперь $p > 1$ так, чтобы $p(1 - \varepsilon_0) < 1 - (\varepsilon_0/2)$. Тогда правая часть (17) оценивается сверху величиной

$$N p^{-1} h_m \left(\frac{\lambda p \sqrt{m}}{\sqrt{n}} \right) + 1,01 q^{-1} \Psi \left(\frac{\lambda q k N}{\sqrt{n}} \right) \leq \\ \leq (1 - (\varepsilon_0/2)) h(\lambda) + 1,01 q^{-1} \Psi \left(\frac{\lambda q n^{1-\alpha} n^\beta \lambda^\gamma}{\sqrt{n}} \right) \leq \\ \leq (1 - (\varepsilon_0/2)) h(\lambda) + 1,01 q^{-1} \Psi(\lambda) < h(\lambda).$$

Следовательно, при $n = [m^{1/\alpha}] - 1$ получаем $h_n(\lambda) \leq h(\lambda)$. Таким образом, $h_n(\lambda) \leq h(\lambda)$ при всех n .

Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается следующий результат, опирающийся на неравенство (3) вместо (4).

Теорема 2.5. Пусть существует выпуклая вниз функция $h(\lambda)$, $\lambda > 1$, удовлетворяющая условиям:

1) существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta < 1$

$$h(\delta\lambda) \leq (1 - \varepsilon_0)\delta^{2h}(\lambda);$$

2) существует набор таких положительных констант $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $1 > \alpha > 1/2 + \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$, что равномерно в области $\lambda > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\alpha} \alpha (n^\beta \lambda^\gamma) \exp h(\lambda p n^{(1-\alpha)/2+\delta}) = 0;$$

3) справедливо соотношение

$$h(\lambda) \leq \Psi(\lambda^{1+\gamma}).$$

Тогда

$$\sup_{n \geq 1} \ln M \exp(\lambda S_n) \leq h(\lambda).$$

Следствие. В предположениях теоремы

$$\sup_n P(|S_n| > x) \leq \exp(-h^*(x)).$$

Если взять в качестве примера $\alpha(k) \leq \exp(-k^2)$, $\Psi(\lambda) \leq \lambda^r$, то $h(\lambda) \leq \lambda^{\bar{s}}$, где \bar{s} — любое положительное число, большее двух и большее s , $1/s + 1/q = 1/r$. Как видно, этот результат «на ε » хуже предыдущего, но зато ослаблен тип перемешивания. Скорость стремления $\alpha(k)$ и $\varphi(k)$ к нулю при $n \rightarrow \infty$ в условиях теорем 2.4 и 2.5 довольно велика, и авторы не убеждены в окончательности этих результатов.

§ 3. Центральная предельная теорема

Предположим сначала, что $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$) — независимые одинаково распределенные случайные поля, определенные на множестве T . Будем предполагать на протяжении всего параграфа, что $M\xi_i^2(t) < \infty$ для любого $t \in T$. Положим

$$\rho_p = \|\xi_i(t) - \xi_i(s)\|_p, \quad p \geq 1.$$

Теорема 3.1. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^{2/(p+1)} (\rho_p, 2^{-n}) 2^{-pn/(p+1)},$$

то поля $\xi_i(t)$, $i=1, 2, \dots$, удовлетворяют ц. п. т. в пространстве $C(T, \rho_p)$.

Доказательство опустим, поскольку оно вытекает из теоремы 1.1.

Введем обозначения

$$\bar{\Psi}(x) = \sup_n n \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right), \quad h(x) = \exp(-\bar{\Psi}^*(x)). \tag{18}$$

Теорема 3.2. Пусть существует псевдометрика $\rho(t, s)$, удовлетворяющая условию: для любого $\lambda > 0$

$$\sup_{\rho(t,s) \neq 0} M \operatorname{ch} \left\{ \lambda \frac{\xi_i(t) - \xi_i(s)}{\rho(t,s)} \right\} \leq \exp \Psi(\lambda).$$

Тогда поля $\xi_i(t)$ удовлетворяют ц. п. т. в $C(T, \rho)$, если для некоторого $C > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^2 (\rho, 2^{-n}) h_*(C 2^{-n} N^{-2} (\rho, 2^{-n})).$$

Доказательство. Определим для фиксированных $t, s \in T$ величины η_i равенством

$$\eta_i = \frac{\xi_i(t) - \xi_i(s)}{\rho(t, s)}.$$

По теореме 2.1

$$\sup_n \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n \eta_i / \sqrt{n} \right| > x \right) \leq h(x).$$

Тогда равномерно по $(t, s) \in (T \times T)$

$$\sup_n \mathbf{P} \left(\left| \frac{S_n(t) - S_n(s)}{\rho(t, s)} \right| > x \right) \leq h(x),$$

и слабая компактность $S_n(t)$ следует из теоремы 1.1. Сходимость конечномерных распределений очевидна.

Теорема доказана.

Теорема 3.3. В условиях предыдущей теоремы *ц. н. т.* для полей $\xi_i(t)$ имеет место, если положить в (18) $\overline{\Psi}(x) = \exp \Psi(x)$.

Доказательство аналогично предыдущему с заменой ссылки на (12) ссылкой на неравенство (13).

Теорема 3.4. Пусть поля $\xi_i(t)$ удовлетворяют условию *р. с. н.* с коэффициентом $\varphi(i)$, причем $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(i) < \infty$.

Тогда в пространстве $C(T, \rho_p)$ для последовательности $\xi_i(t)$ выполнена *ц. н. т.*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^{2/(p+1)}(\rho_p, 2^{-n}) 2^{-pn/(p+1)}.$$

Доказательство. По теореме 2.3 существует константа $C = C(p)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_n \|S_n(t) - S_n(s)\|_p \leq C \|\xi_i(t) - \xi_i(s)\|_p = c\rho_p(t, s).$$

Компактность семейства $S_n(t)$ вытекает теперь из (7), а сходимость конечномерных распределений — из теоремы 18.5.3 монографии [8, с. 440].

Теорема 3.5. Пусть существует псевдометрика $\rho(t, s)$ на T , удовлетворяющая условию: при $\lambda > 1$ и некотором $r \geq 1$

$$\mathbf{M} \left| \operatorname{ch}_{\frac{1}{\lambda}} \left\{ \lambda \frac{\xi_i(t) - \xi_i(s)}{\rho(t, s)} \right\} \right| \leq \exp \lambda^r$$

и $\varphi(k) \leq \exp(-k^q)$, $q \geq r$. Пусть s' находится из уравнения $1/s' + 1/q = 1/r$. Положим $s = s'$, если $s' > 2$, и $s = 2 + \varepsilon$ в противном случае, где ε — сколь угодно малое положительное число; $1/p' = \max(1/2, 1/p)$, $1/p' + 1/s = 1$.

Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} N^{1/p'}(2^{-n}, \rho),$$

то *ц. н. т.* для $\xi_i(t)$ в $C(T, \rho)$ имеет место.

Доказательство. По теореме 2.4 и следствию из него

$$\mathbf{M} \left| \operatorname{ch} \left\{ \lambda \frac{S_n(t) - S_n(s)}{\rho(t, s)} \right\} \right| \leq \exp |\lambda|^{s'}.$$

Слабая компактность семейства мер, порожденного семейством $S_n(t)$, вытекает из теоремы 1.1 и формул (9), (10). Сходимость же конечномерных распределений следует из существования всех моментов $\xi_i(t)$ и сходимости ряда $\sum_k \varphi^{1/2}(k) < \infty$.

Теорема доказана.

Предположим теперь, что $\xi_i(t)$ обладает с. п. с коэффициентом $\alpha(i)$.

Теорема 3.6. Пусть существуют такие натуральное число $l \geq 1$ и положительное число $p > 2l$, что

$$\sup_{n \geq 1} n^{1-l} \sum_{i=1}^n i^{2l-2} \alpha^{1-(2l/p)}(i) < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^{2/(2l+1)}(\rho, 2^{-n}) 2^{-2ln/(2l+1)} < \infty.$$

Тогда ц. п. т. для $\xi_i(t)$ имеет место в пространстве $C(T, \rho_{2l})$.

Доказательство. Как следует из (13), (14), для некоторого $C < \infty$

$$\|S_n(t) - S_n(s)\|_{2l} \leq C \|\xi_i(t) - \xi_i(s)\|_p = c\rho_p(t, s).$$

Наш результат вытекает теперь из (7).

§ 4. Обобщения и некоторые применения

Рассмотрим теперь случай произвольного сепарабельного банахова пространства B , т. е. $\xi_i \in B \pmod{P}$. Когда мы говорим о центральной предельной теореме в пространстве B , то имеем в виду, что последовательность нормированных частных сумм $S_n = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \xi_i$ слабо сходится в пространстве B при $n \rightarrow \infty$ к некоторой гауссовской величине S , также сосредоточенной в B с вероятностью единица.

На наш взгляд, в пространствах с нормой интегрального типа, например L_p, l_p , ц. п. т. должна изучаться методами, отличными от изложенных выше. См., например, [4], [6], и т. д. Универсальность же пространства непрерывных функций $C(T)$ может принести пользу в случаях пространств $C^m[D], W^n$ и др.

Покажем, как, исходя из наших результатов, можно сформулировать ц. п. т. в случае произвольного сепарабельного B . Предположим, что существует сепарабельное банахово пространство L , сопряженное к которому L^* линейно вложено в B : $L^* \subset B$. Последнее означает, что L^* есть линейное подпространство B , необязательно замкнутое, но с топологией более сильной, чем топология B . Пусть все случайные величины ξ_i с вероятностью единица сосредоточены в L^* и, таким образом, для любого $\varphi \in L$ имеет смысл выражение $\xi_i(\varphi) = (\varphi, \xi_i)$. Фиксируем некоторое тотальное подмножество T единичной сферы пространства L , являющееся метризуемым компактом в топологии $\tau(L, L^*)$. Тогда, если последовательность $\xi_i(t), t \in T$, удовлетворяет ц. п. т. в пространстве $C(T, \tau)$, то исходная последовательность ξ_i удовлетворяет ц. п. т. в пространстве B .

Заметим, что сформулированные условия не представляются искусственными. Как показано в [20], справедливо и в некотором смысле обратное утверждение: если последовательность ξ_i удовлетворяет ц. п. т. в сепарабельном банаховом пространстве B , то пространство L с указанными выше свойствами всегда существует.

Если $\xi_\lambda(t)$ образует стационарный в узком смысле по $\lambda \in \mathbb{R}^1$ процесс, то, положив $\eta_n = \int_n^{n+1} \xi_\lambda(t) d\lambda$, мы сведем ц. п. т. для $\xi_\lambda(t)$ к ц. п. т. для η_n , добавив, разумеется, условие измеримости $\xi_\lambda(t)$ по переменной λ . Этот прием указан еще в [15].

Мы не останавливаемся на других типах перемешивания, например, β -перемешивании, ρ -перемешивании и др. Заметим, что коэффициент ρ -перемешивания может быть оценен через коэффициенты α , ϕ и что рассуждения в целом аналогичны.

Укажем возможные применения ц. п. т. в банаховом пространстве. Пусть интеграл $J(t) = \int_G f(t, x) \mu(dx)$ от функции $f(t, x)$, принадлежащей при почти всех x банаховому пространству B , по некоторой вероятностной мере μ вычисляется методом Монте-Карло по формуле

$$J(t) \approx J_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n f(t, \eta_i),$$

где величины η_i независимы, и $P(\eta_i \in \Gamma) = \mu(\Gamma)$. Желая оценить погрешность метода, т. е. величину

$$\Delta = n^{1/2} \| J_n(t) - J(t) \|$$

необходимо убедиться в приближенной гауссовости поля

$$S_n = n^{1/2} (J_n(t) - J(t)),$$

т. е. в справедливости ц. п. т. в пространстве B .

В некоторых работах, посвященных методу статистических испытаний, рассматриваются модели, в которых (псевдо-) случайные числа образуют стационарный процесс и, вообще говоря, зависимы. Как вытекает из наших результатов, имеются некоторые основания применять ц. п. т. и в этой ситуации.

Укажем также некоторые приложения к статистике. Пусть η_t — стационарный в узком смысле, вообще говоря, негауссовский процесс, $M \eta_t \equiv 0$, $M \eta_t \eta_s = r(t - s)$. Рассмотрим статистику

$$\hat{r}_T(t) = T^{-1} \int_0^T \eta_{s+t} \eta_s ds$$

и поле

$$\tau_T(t) = T^{1/2} (\hat{r}_T(t) - r(t)).$$

При $T \rightarrow \infty$, в случае справедливости ц. п. т. в некотором банаховом пространстве, поле $\tau_T(t)$ приближенно гауссово. Это соображение позволяет строить доверительные интервалы для корреляционной функции $r(t)$ и спектральной плотности $f(\lambda)$ процесса η_t . Подробнее об этих и других применениях см. [10—12].

В заключение авторы выражают признательность Ю. К. Беляеву и всем участникам его семинара за внимание к работе и плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 351 с.
2. Strassen V., Dudley R. M. The central limit theorem and ε -entropy. — Lect. Notes Math., 1969, В. 89, S. 224—231.
3. Jain N. C., Markus M. B. The central limit theorem for $C(S)$ -valued random variables. — J. Funct. Anal., 1975, v. 19, № 3, p. 216—231.
4. Вахания Н. Н. Вероятностные распределения в линейных пространствах. Тбилиси: Мецниереба, 1974, 156 с.
5. Hoffmann-Jorgensen J., Pisier G. The strong law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. — Ann. Probab., 1976, v. 4, p. 587—599.
6. Паулаускас В. И. О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1976, т. XXI, в. 4, с. 775—791.
7. Йоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1965, 480 с.
8. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.]
9. Дмитровский В. А., Островский Е. И. Оценка прогрешности метода зависимых испытаний. — Ж. выч. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 5, с. 1312—1316.
10. Иванов А. В., Леоценко Н. Н. О сходимости распределений функционалов от оценки корреляционной функции. — Лит. матем. сб., 1978, т. 16, № 4, с. 35—44.
11. Gine E. On the central limit theorem for sample continuous processes. — Ann. Probab., 1974, v. 2, № 4, p. 629—641.
12. Бакина О. П., Островский Е. И. Инвариантные статистики и доверительные интервалы для корреляционной функции гауссовского процесса в различных метриках. — В сб.: Материалы Всесоюзного симпозиума по статистике случайных процессов. Киев.: ИМ АН УССР и КГУ, 1975, с. 148—149.
13. Давыдов Ю. А. О сходимости распределений, порожденных стационарными случайными процессами. — Теория вероятн. и ее примен., 1968, т. XIII, в. 4, с. 730—737.
14. Боровков А. А. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972, 288 с.
15. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. — Успехи матем. наук, 1938, т. 17, в. 5, с. 5—41.
16. Pisier G. Le theoreme la limite centrale et la loi du logarithme itere dans les espaces de Banach. — Seminaire Maurey — Schwartz, 1975—1976, exp. 3—4 et Annexe 1.
17. Pisier G., Zinn J. On the limit theorems for random variables with values in the spaces L_p ($2 \leq p < \infty$). — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1978, В. 41, S. 269—304.
18. Chobangan S. A., Tarieladze V. I. Gaussian characterization of certain Banach spaces. — J. Multivar. Anal., 1977, v. 7, № 1, p. 187—203.
19. Pisier G. Conditions d'entropie assurant la continuite de certains processus et applications a l'analyse Harmonique. — Seminaire d'Analyse fonctionnelle, 1979—1980, exp. 13—14 et Annexe 1.
20. Островский Е. И. О носителях вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах. — Докл. АН СССР, 1980, т. 255, № 6, с. 1319—1320.

Поступила в редакцию
2.VII.1979

**CENTRAL LIMIT THEOREM
FOR THE BANACH-VALUED WEAKLY DEPENDENT RANDOM VARIABLES****DMITROVSKIĬ V. A., ERMAKOV S. V., OSTROVSKIĬ E. I. (OBNINSK)***(Summary)*

Let B be a separable Banach space, ξ_i — a stationary sequence of B -valued random variables with zero mean. In this paper we investigate some conditions on the character and rate of mixing under which the sequence ξ_i satisfies the central limit theorem, i. e. the sequence

$$S_n = n^{-1/2} (\xi_1 + \dots + \xi_n), \quad n \rightarrow \infty,$$

converges weakly to some Gaussian B -valued variable.