Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 269–285

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 517.958

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ

Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева

Аннотация. Изучается многомерная обратная задача определения сверточного ядра интегрального члена в интегродифференциальном волновом уравнении. Прямую задачу представляет обобщенная начально-краевая задача для этого уравнения с нулевыми начальными данными и граничным условием Неймана в виде дельта-функции Дирака. Для решения обратной задачи в качестве дополнительного условия задаются следы решения прямой задачи на границе области $(x,t) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $z > 0$. Основной результат работы – теорема глобальной однозначной разрешимости обратной задачи в классе функций, непрерывных по временной переменной t и аналитических по пространственным переменным $x \in \mathbb{R}^m$. Для доказательства применяются методы шкал банаховых пространств вещественных аналитических функций действительного переменного и весовых норм в классе непрерывных функций.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.203

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, обратная задача, глобальная разрешимость, оценка устойчивости, весовая норма.

1. Введение. Постановка задачи

Согласно терминологии, принятой в [1], обратная задача называется *одномерной*, если искомая функция зависит от одной переменной, и *многомерной*, если она зависит от двух и более переменных.

В данной работе получена глобальная однозначная разрешимость многомерной обратной задачи. Даже в одномерных обратных задачах имеются теоремы существования только для достаточно малых областей определения неизвестных коэффициентов, т. е. для таких задач разрешимость носит локальный характер. В [2] приведен пример отсутствия глобального решения обратной задачи. При гладких данных решение обратной задачи может не существовать на любом наперед заданном интервале. Связано это явление с нелинейностью задачи. Однако Лоренци [3] и А. Л. Бухгеймом [4] отмечено, что в обратных задачах определения ядра в гиперболических интегродифференциальных уравнениях второго порядка, в которых нелинейность носит сверточный характер, удается получить глобальные теоремы существования в пространстве непрерывных функций с экспоненциальным весом. В этом направлении по одномерным обратным задачам помимо работ авторов [5–8], отметим также [9, 10] (см. также библиографию в них).

Для многомерных обратных задач имеются только специальные случаи, для которых установлена разрешимость. Одним из таких классов функций, в которых разрешимость имеет место, является класс непрерывных по одной из переменных и аналитических по остальным переменным функций. Используемая здесь техника основана на методе шкал банаховых пространств аналитических функций, развитом в работах Л. В. Овсянникова [11–13] и Ниренберга [14]. Этот метод с некоторой модификацией впервые был применен В. Г. Романовым к вопросам разрешимости многомерных коэффициентных обратных задач [2, 15–17]. В [18–23] на основе этого метода исследованы многомерные обратные задачи определения сверточного ядра в гиперболических интегродифференциальных уравнениях второго порядка; получены теоремы локальной однозначной разрешимости обратных задач в классе функций, обладающих конечной гладкостью по временной переменной и аналитических по части пространственных переменных.

Рассмотрим задачу об определении пары функций $u(x,z,t)$ и $k(x,t)$, удовлетворяющих равенствам

$$u_{tt} - u_{zz} - \Delta u = \int\limits_0^t k(x,\tau)u(x,z,t-\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{m+1},\ z>0, \tag{1}$$

$$u|_{t<0}\equiv 0, \quad u_z|_{z=0} = \delta'(t) + h(x,t)\theta(t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{m+1}, \tag{2}$$

$$u|_{z=0} = -\delta(t) + f(x,t)\theta(t), \quad (x,t)\in\mathbb{R}^{m+1}. \tag{3}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по переменным $(x_1,x_2,\dots,x_m)=x$, $\delta'(t)$ — производная дельта-функции Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда, h, f — заданные гладкие функции.

Доказано, что поставленная задача (1)–(3) глобально однозначно разрешима в классе функций, непрерывных по переменной t и аналитических по x. Для решения обратной задачи выписывается оценка устойчивости.

Изложение исследования строится следующим образом. В разд. 2 вводится шкала банаховых пространств аналитических по пространственным переменным функций и задача (1)–(3) переписывается относительно регулярной части функции $u(x,z,t)$. В разд. 3 полученная в разд. 2 задача сводится эквивалентным образом к решению системы интегродифференциальных уравнений для неизвестных функций. В разд. 4 доказываются основные результаты работы, состоящие из теоремы глобальной разрешимости и оценки условной устойчивости решения обратной задачи.

2. Предварительные сведения

Следуя [2, гл. 3], введем в рассмотрение банахово пространство $A_s(r)$, $s>0$, функций $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^m$, аналитических в окрестности начала координат, для которых справедливо соотношение

$$\|\varphi\|_s(r) := \sup_{|x|<r}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{s^{|\alpha|}}{\alpha!}|D^\alpha\varphi(x)| < \infty.$$

Здесь $r>0$, $s>0$ и

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}, \quad \alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_m),$$

$$|\alpha| := \alpha_1+\dots+\alpha_m, \quad \alpha! := (\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_m)!.$$

В дальнейшем параметр r будет считаться фиксированным, в то время как s рассматривается как переменный параметр. При этом возникает шкала банаховых пространств $A_s(r)$, $s > 0$. Очевидно следующее свойство: если $\varphi(x) \in A_s(r)$, то $\varphi(x) \in A_{s'}(r)$ для всех $s' \in (0,\ s)$, а значит, $A_s(r) \subset A_{s'}(r)$, если $s' \in (0, s)$ и справедливо неравенство

$$\|D^\alpha \varphi\|_{s'}(r) \le c_\alpha \frac{\|\varphi\|_s(r)}{(s-s')^{|\alpha|}} \tag{4}$$

для любого α с постоянной c_α, которая зависит только от α.

Так как параметр r фиксирован, будем в дальнейшем опускать его и писать $\|\varphi\|_s$ и A_s вместо $\|\varphi\|_s(r)$ и $A_s(r)$.

Пусть

$$D_T = G_T \times \mathbb{R}^m, \quad G_T = \{(z,t) \mid 0 \le z \le t \le T - z\}, \quad T > 0.$$

Через $C(A_{s_0}; G_T)$ обозначим класс функций, непрерывных по переменным (z,t) в области G_T со значениями в A_{s_0}.

При фиксированных (z,t) норму функции $g(x,z,t)$ в A_{s_0} будем обозначать через $\|g\|_{s_0}(z,t)$. Норма функции g в $C(A_{s_0}; G_T)$ определяется равенством

$$\|g\|_{C(A_{s_0};G_T)} = \sup_{(z,t)\in G_T} \|g\|_{s_0}(z,t). \tag{5}$$

Из равенств (1), (2) следует, что $u \equiv 0$, $0 < t < z$, $x \in \mathbb{R}^m$. Функция $u(x,z,t)$ как решение задачи (1), (2) имеет в окрестности характеристической поверхности $t = z$ следующую структуру:

$$u(x,z,t) = -\delta(t-z) + \tilde{u}(x,z,t)\theta(t-z), \tag{5$'$}$$

где $\tilde{u}(x,z,t)$ — функция, непрерывная при переходе через поверхность $t = z$. Используя метод выделения особенностей, из равенства (5$'$) получаем

$$\tilde{u}(x,z,z+0) = 0.$$

Отсюда, в частности, возникает одно из необходимых условий разрешимости поставленной задачи

$$f(x,+0) = 0, \tag{6}$$

которое в дальнейшем будем предполагать выполненным. Учитывая равенство $u(x,z,t) = \tilde{u}(x,z,t)$, справедливое при $x \in \mathbb{R}^m$, $0 < z < t$, запишем задачу (1)–(3) в виде

$$u_{tt} - u_{zz} = \Delta u - k(x,t-z) + \int\limits_0^{t-z} k(x,\tau)u(x,z,t-\tau)\,d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^m,\ 0<z<t, \tag{7}$$

$$u|_{z=0} = f(x,t), \quad u_z\big|_{z=0} = h(x,t), \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^m, \tag{8}$$

$$u|_{t=z+0} \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{9}$$

Таким образом задача (1)–(3) свелась к задаче определения функций $u(x,z,t)$ и $k(x,t)$ из равенств (7)–(9).

3. Сведение обратной задачи к эквивалентной системе интегральных уравнений

Пусть $C(A_{s_0};[0,T])$ — класс непрерывных функций по переменной t со значениями в A_{s_0}. Справедлива

Лемма. *Пусть $T>0$, $s_0>0$ — фиксированные числа, условие (6) выполнено и*

$$(h(x,t), f_t(x,t), h_t(x,t), f_{tt}(x,t)) \in C(A_{s_0};[0,T]).$$

Тогда обратная задача (7)–(9) для $(x,z,t)\in D_T$ эквивалентна задаче нахождения вектор-функции $u(x,z,t)$, $u_t(x,z,t)$, $k(x,t)$ из следующей системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$u(x,z,t) = \int_z^t u_t(x,z,\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} u_t(x,z,t) &= \frac{1}{2}f_t(x,t-z) - \frac{1}{2}h(x,t-z) - \frac{z}{2}k(x,t-z) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^z \left[\Delta u(x,\xi,t-z+\xi) + \int_0^{t-z} k(x,\tau)u(x,\xi,t-z+\xi-\tau)\,d\tau\right] d\xi \\ &+ \frac{1}{2}\int_z^{(t+z)/2} \Bigg[\Delta u(x,\xi,t+z-\xi) - k(x,t+z-2\xi) \\ &+ \int_0^{t+z-2\xi} k(x,\tau)u(x,\xi,t+z-\xi-\tau)\,d\tau\Bigg] d\xi, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} k(x,t) &= 2f_{tt}(x,t) + 2h_t(x,t) \\ &- \int_0^{t/2}\left[\Delta u_t(x,\xi,t-2\xi) + \int_0^{t-2\xi} k(x,\tau)u_t(x,\xi,t-\xi-\tau)\,d\tau\right] d\xi. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Заметим, что справедливы равенства

$$u_{tt} - u_{zz} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)(u_t+u_z) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)(u_t-u_z).$$

С учетом этого интегрируем (7) вдоль соответствующих характеристик дифференциальных операторов первого порядка для $(z,t)\in G_T$. Интегрирование вдоль характеристики оператора $\partial/\partial t - \partial/\partial z$ совершим от точки (z,t) до точки $((z+t)/2,(z+t)/2)$ на плоскости переменных (ξ,τ). Используя равенство (9) и дифференцирование по z, получим

$$\begin{aligned} (u_t+u_z)(x,z,t) = \int_z^{(z+t)/2} \Bigg[&\Delta u(x,\xi,t+z-\xi) - k(x,t+z-2\xi) \\ &+ \int_0^{t+z-2\xi} k(x,\tau)u(x,\xi,t+z-\xi-\tau)\,d\tau\Bigg] d\xi. \end{aligned} \tag{13}$$

Интегрирование вдоль характеристики оператора $\partial/\partial t + \partial/\partial z$ совершим от точки $(0,\ t-z)$ до точки (z,t). Используя условия (8) и дифференцирование по t, имеем

$$(u_t - u_z)(x,z,t) = f_t(x,t-z) - h(x,t-z) - k(x,t-z)z + \int_0^z \Bigg[\Delta u(x,\xi,t-z+\xi) + \int_0^{t-z} k(x,\tau)u(x,\xi,t-z+\xi-\tau)\,d\tau \Bigg] d\xi. \quad (14)$$

Из равенств (13) и (14) легко можно получить уравнение (11). В уравнении (13) полагая $z = 0$ и используя (8), находим

$$f_t(x,t) + h(x,t) = \int_0^{t/2} \Bigg[\Delta u(x,\xi,t-\xi) - k(x,t-2\xi) + \int_0^{t-2\xi} k(x,\tau)u(x,\xi,t-\xi-\tau)\,d\tau \Bigg] d\xi. \quad (15)$$

Дифференцируя равенство (15), после несложных выкладок приходим к уравнению (12).

При выполнении условия согласования (6) нетрудно показать, что обратные преобразования тоже имеют место. Действительно, заменяя в правой и левой частях (12) t на $t-2\tau$, умножим обе части на $d\tau$ и интегрируем по τ в пределах от 0 до $t/2$. Меняя порядок интегрирования в повторных интегралах получающегося равенства и учитывая соотношение (9), получим уравнение (15), которое, в свою очередь, эквивалентно равенству (10) при $z = 0$. Эквивалентность равенства (10) равенствам (13), (14) и вывод из последних уравнений соотношений (7)–(9) очевидны. Равенство (10) приведено для замыкания системы уравнений (11), (12). Тем самым лемма доказана.

Система уравнений (10)–(12) является замкнутой системой интегродифференциальных уравнений относительно функций u, u_t, k. Заметим, что оператор Δ от функций u, u_t входит в эту систему только под знаком интеграла.

4. Основной результат и его доказательство

Введем обозначение $v(x,z,t) := u_t + \frac{z}{2}k(x,t-z)$ и запишем систему уравнений (10)–(12) в виде

$$u(x,z,t) = \int_z^t \left(v(x,z,\tau) - \frac{z}{2}k(x,\tau-z) \right) d\tau, \quad (16)$$

$$v(x,z,t)=v_0(x,z,t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^z\left[\Delta u(x,\xi,t-z+\xi)+\int\limits_0^{t-z}k(x,\tau)u(x,\xi,t-z+\xi-\tau)\,d\tau\right]d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_z^{(t+z)/2}\Bigg[\Delta u(x,\xi,t+z-\xi)-k(x,t+z-2\xi)$$
$$+\int\limits_0^{t+z-2\xi}k(x,\tau)u(x,\xi,t+z-\xi-\tau)\,d\tau\Bigg]d\xi, \qquad (17)$$

$$k(x,t)=k_0(x,t)-\int\limits_0^{t/2}\Bigg[\Delta v(x,\xi,t-2\xi)-\frac{\xi}{2}\Delta k(x,t-2\xi)$$
$$+\int\limits_0^{t-2\xi}k(x,\tau)\left(v(x,\xi,t-\xi-\tau)-\frac{\xi}{2}k(x,t-\xi-\tau)\right)d\tau\Bigg]d\xi, \qquad (18)$$

где

$$v_0(x,z,t)=\frac{1}{2}f_t(x,t-z)-\frac{1}{2}h(x,t-z), \quad k_0(x,t)=2f_{tt}(x,t)+2h_t(x,t). \qquad (19)$$

Будем рассматривать систему (16)–(18) в более узкой чем D_T области, а именно в области $D_T^\varepsilon=G_T^\varepsilon\times\mathbb{R}^m$, $G_T^\varepsilon=\left\{(z,t)\mid 0\le z\le t\le\frac{T}{1+\varepsilon}-z\right\}$, при некотором фиксированном $\varepsilon>0$.

Через $C_\sigma\big(A_{s_0};G_T^\varepsilon\big)$ обозначим пространство функций, непрерывных по переменным (z,t) в области G_T^ε со значениями в A_{s_0}, порожденное семейством весовых норм

$$\|g\|_{C_\sigma(A_s;G_T^\varepsilon)}=\sup_{(z,t)\in G_T^\varepsilon}\|g\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{T-t-z}}, \quad \sigma\ge 0,\ 0<s<s_0. \qquad (20)$$

Очевидно, что при $\sigma=0$ весовая норма (20) совпадает с нормой (5). Число σ будет выбрано позже.

Теорема 1. *Пусть $T>0$, $s_0>0$, $\varepsilon>0$ — фиксированные числа и выполнены условия леммы. Кроме того,*

$$\max_{t\in[0,T]}\left\{\|h\|_{s_0}(t),\|f_t\|_{s_0}(t),\frac{1}{4}\|f_{tt}\|_{s_0}(t),\frac{1}{4}\|h_t\|_{s_0}(t)\right\}=R,$$

$R>0$ — известное число. Тогда для любых a и s таких, что $a\in(0,T/s_0)$, $s\in(0,s_0)$, в области $\Gamma_{sT}^\varepsilon=D_T^\varepsilon\cap\left\{(x,z,t)\mid 0\le t<\frac{1}{1+\varepsilon}a(s_0-s)-z\right\}$ существует единственное решение системы уравнений (16)–(18), для которого

$$(u(x,z,t),v(x,z,t))\in C\big(A_s;P_{sT}^\varepsilon\big), \quad k(x,t)\in C\left(A_{s_0};\left[0,\frac{1}{1+\varepsilon}a(s_0-s)\right)\right),$$

кроме того,

$$\|u-u_0\|_{C(A_s;P_{sT}^\varepsilon)}\le\widetilde{R},\ \|v-v_0\|_{C(A_s;\ P_{sT}^\varepsilon)}\le\frac{\widetilde{R}}{s_0-s},\ \|k-k_0\|_{C(A_s;P_{sT}^\varepsilon)}\le\frac{\widetilde{R}}{(s_0-s)^2},$$

$$P_{sT}^{\varepsilon} = G_T^{\varepsilon} \cap \left\{ (z,t) \mid 0 \le z \le t < \frac{1}{1+\varepsilon} a(s_0 - s) - z \right\},$$

где $u_0 = 0$, k_0, v_0 *определяются равенствами* (19), $\widetilde{R} = Re^{\sigma/\varepsilon}$, $\sigma > 0$.

Доказательство. В условиях теоремы имеем

$$(v_0, k_0) \in C(A_{s_0}; G_T), \quad \|k_0\|_{C_\sigma(A_s; P_{sT})} \le \|k_0\|_{C(A_s; G_T)} \le R,$$

$$\|v_0\|_{C_\sigma(A_s; P_{sT})} \le \|v_0\|_{C(A_s; G_T)} \le R, \quad 0 < s < s_0.$$

Пусть a_n являются членами монотонно убывающей последовательности, определяемой равенствами

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 1/(n+1)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Положим

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \prod_{n=0}^{\infty} (1 + 1/(n+1)^2)^{-1}.$$

Здесь a_0 — произвольное число, принадлежащее интервалу $(0, T/s_0)$. Для системы уравнений (16)–(18) построим процесс последовательных приближений по схеме

$$u_{n+1}(x,z,t) = \int_z^t \left(v_n(x,z,\tau) - \frac{z}{2} k_n(x, \tau - z) \right) d\tau,$$

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x,z,t) &= v_0(x,z,t) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^z \left[\Delta u_n(x,\xi,t-z+\xi) + \int_0^{t-z} k_n(x,\tau) u_n(x,\xi,t-z+\xi-\tau)\, d\tau \right] d\xi \\ &+ \frac{1}{2} \int_z^{(t+z)/2} \Bigg[\Delta u_n(x,\xi,t+z-\xi) - k_n(x,t+z-2\xi) \\ &\qquad + \int_0^{t+z-2\xi} k_n(x,\tau) u_n(x,\xi,t+z-\xi-\tau)\, d\tau \Bigg] d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{n+1}(x,t) = k_0(x,t) - \int_0^{t/2} \Bigg[&\Delta v_n(x,\xi,t-2\xi) - \frac{\xi}{2} \Delta k_n(x,t-2\xi) \\ &+ \int_0^{t-2\xi} k_n(x,\tau) \left(v_n(x,\xi,t-\xi-\tau) - \frac{\xi}{2} k_n(x,t-\xi-\tau) \right) d\tau \Bigg] d\xi. \end{aligned}$$

Определим функцию $s_n'(z,t)$ формулой

$$s_n'(z,t) = \frac{s + \nu^n(z,t)}{2}, \quad \nu^n(z,t) = s_0 - \frac{t+z}{a_n}. \tag{21}$$

Введем обозначения $p_n = u_{n+1} - u_n$, $r_n = v_{n+1} - v_n$, $q_n = k_{n+1} - k_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда p_n, q_n, r_n удовлетворяют соотношениям

$$p_0(x,z,t) = \int_z^t \left(v_0(x,z,\tau) - \frac{z}{2}k_0(x,\tau - z)\right) d\tau,$$

$$r_0(x,z,t) = -\frac{1}{2}\int_z^{(t+z)/2} k_0(x, t+z-2\xi)\, d\xi,$$

$$q_0(x,t) = -\int_0^{t/2}\Bigg[\Delta v_0(x,\xi,t-2\xi) - \frac{\xi}{2}\Delta k_0(x,t-2\xi)$$
$$+ \int_0^{t-2\xi} k_0(x,\tau)\left(v_0(x,\xi,t-\xi-\tau) - \frac{\xi}{2}k_0(x,t-\xi-\tau)\right) d\tau\Bigg] d\xi,$$

$$p_{n+1}(x,z,t) = \int_z^t \left(r_n(x,z,\tau) - \frac{z}{2}q_n(x,\tau-z)\right) d\tau,$$

$$r_{n+1}(x,z,t) = \frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[\Delta p_n(x,\xi,t-z+\xi)$$
$$+ \int_0^{t-z} \left(k_n(x,\tau)p_n(x,\xi,t-z+\xi-\tau) + u_{n+1}(x,\xi,t-z+\xi-\tau)q_n(x,\tau)\right) d\tau\Bigg] d\xi$$
$$+ \frac{1}{2}\int_z^{(t+z)/2}\Bigg[\Delta p_n(x,\xi,t+z-\xi) - q_n(x,t+z-2\xi)$$
$$+ \int_0^{t+z-2\xi} \left(k_n(x,\tau)p_n(x,\xi,t+z-\xi-\tau) + q_n(x,\tau)u_{n+1}(x,\xi,t+z-\xi-\tau)\right) d\tau\Bigg] d\xi,$$

$$q_{n+1}(x,t) = -\int_0^{t/2}\Bigg[\Delta r_n(x,\xi,t-2\xi) - \frac{\xi}{2}\Delta q_n(x,t-2\xi)$$
$$+ \int_0^{t-2\xi}\Bigg\{q_n(x,\tau)\left(v_{n+1}(x,\xi,t-\xi-\tau) - \frac{\xi}{2}k_{n+1}(x,t-\xi-\tau)\right)$$
$$+ k_n(x,\tau)\left(r_n(x,\xi,t-\xi-\tau) - \frac{\xi}{2}q_n(x,t-\xi-\tau)\right)\Bigg\} d\tau\Bigg] d\xi.$$

Докажем, что можно выбрать $\sigma > 0$ так, что для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ будут выполнены неравенства

$$\lambda_n(\sigma) = \max\{ \sup_{(z,t,s)\in F_n} [\|p_n\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_n - t - z}}], \\ \sup_{(z,t,s)\in F_n} [\|r_n\|_s(z,t)(\nu^n(z,t)-s)e^{-\frac{\sigma t}{b_n - t - z}}], \\ \sup_{(z,t,s)\in F_n} [\|q_n\|_s(t)(\nu^n(z,t)-s)^2 e^{-\frac{\sigma t}{b_n - t - z}}]\} < \infty, \quad (22)$$

$$\|u_{n+1} - u_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_n - t - z}} \le R, \quad \|v_{n+1} - v_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_n - t - z}} \le \frac{R}{s_0 - s},$$

$$\|k_{n+1} - k_0\|_s(t)e^{-\frac{\sigma t}{b_n - t - z}} \le \frac{R}{(s_0 - s)^2}, \quad (z,t,s) \in F_{n+1}, \quad (23)$$

где

$$b_n := a_n(s_0 - s), \quad F_n = \left\{(z,t,s) \mid (z,t) \in G_T^\varepsilon,\ 0 < z < t < \frac{b_n}{1+\varepsilon} - z,\ 0 < s < s_0\right\}.$$

В самом деле, используя ранее выписанные соотношения для p_n, q_n, r_n, находим

$$\|p_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0 - t - z}} \le \int\limits_z^t \Bigg(\|v_0(x,z,\tau)\|_s(z,\tau)e^{-\frac{\sigma\tau}{b_0-\tau-z}} e^{\frac{\sigma\tau}{b_0-\tau-z}} e^{-\frac{\sigma t}{b_0 - t - z}} \\ + \frac{z}{2}\|k_0(x,\tau - z)\|_s(\tau - z)e^{-\frac{\sigma(\tau - z)}{b_0 - \tau}} e^{\frac{\sigma(\tau - z)}{b_0 - \tau}} e^{-\frac{\sigma t}{b_0 - t - z}} \Bigg) d\tau \\ \le \int\limits_z^t \left(\|v_0\|_{s,0}^\sigma e^{-\frac{\sigma(b_0 - z)(t-\tau)}{(b_0-\tau-z)(b_0-t-z)}} + \frac{T}{4}\|k_0\|_{s,0}^\sigma e^{-\frac{\sigma(b_0-z)(t+z-\tau)}{(b_0-\tau)(b_0-t-z)}} \right) d\tau \\ \le \int\limits_z^t \left(\|v_0\|_{s,0}^\sigma e^{-\frac{\sigma(t-\tau)}{b_0-t-z}} + \frac{T}{4}\|k_0\|_{s,0}^\sigma e^{-\frac{\sigma(t+z-\tau)}{b_0-t-z}} \right) d\tau \\ \le R\left(1 + \frac{T}{4}\right)\frac{b_0 - t - z}{\sigma} \le R\left(1 + \frac{T}{4}\right)\frac{a_0 s_0}{\sigma}, \quad (z,t,s) \in F_0,$$

где $\|\cdot\|_{s,i}^\sigma := \sup\limits_{(z,t,s)\in F_i} \|\cdot\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_i - t - z}}$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Аналогично

$$\|r_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0 - t - z}} \le \frac{1}{2} \int\limits_z^{(t+z)/2} \|k_0\|_{s,0}^\sigma e^{-\frac{\sigma(2\xi - z)}{b_0 - t - z}}\, d\xi \\ \le \frac{1}{2}R\frac{b_0 - t - z}{\sigma} \le \frac{R}{2(\nu^0(z,t) - s)}\frac{a_0 s_0^2}{\sigma},$$

$$\|q_0\|_s(t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0 - t - z}} \le \int\limits_0^{t/2} \Bigg[\|\Delta v_0\|_s(\xi, t - 2\xi)e^{-\frac{\sigma(t-2\xi)}{b_0-(t-\xi)}} e^{-\frac{2\sigma\xi(b_0 - t/2)}{(b_0-(t-\xi))(b_0-t-z)}}$$

$$+\frac{\xi}{2}\|\Delta k_0\|_s(t-\xi)e^{-\frac{\sigma(t-\xi)}{b_0-(t-\xi)}}e^{-\frac{\sigma(b_0-t/2)}{(b_0-(t-\xi))(b_0-t-z)}}$$

$$+\int\limits_0^{t-2\xi}\|k_0\|_s(\tau)e^{-\frac{\sigma\tau}{b_0-\tau-z}}e^{\frac{\sigma\tau}{b_0-\tau-z}}\left(\|v_0\|_s(\xi,t-\xi-\tau)+\frac{\xi}{2}\|k_0\|_s(t-\xi-\tau)\right)$$

$$\left.\times e^{-\frac{\sigma(t-\xi-\tau)}{b_0-(t-\tau)}}e^{\frac{\sigma(t-\xi-\tau)}{b_0-(t-\tau)}}e^{-\frac{\sigma t}{b_0-t-z}}\,d\tau\right]d\xi$$

$$\le\int\limits_0^{t/2}\left[\|\Delta v_0\|^\sigma_{s,0}(\xi,t-2\xi)e^{-\frac{2\sigma\xi}{b_0-t-z}}+\frac{\xi}{2}\|\Delta k_0\|^\sigma_{s,0}(t-2\xi)e^{-\frac{2\sigma\xi}{b_0-t-z}}\right.$$

$$+\int\limits_0^{t-2\xi}\|k_0\|^\sigma_{s,0}(\tau)\left(\|v_0\|^\sigma_{s,0}(\xi,t-\xi-\tau)+\frac{\xi}{2}\|k_0\|^\sigma_{s,0}(t-\xi-\tau)\right)$$

$$\left.\times e^{-\frac{\sigma\xi(b_0-t+z+2\tau)}{(b_0-(t-\tau))(b_0-t-z)}}\,d\tau\right]d\xi.$$

Пусть c_0 — положительная постоянная такая, что

$$\|\Delta\varphi\|_s\le c_0\frac{\|\varphi\|_{s'_n}}{(s'_n-s)^2},\quad s'_n>s>0,\ n=0,1,2,\dots.$$

Можно проверить, что $c_0=4m$.

Взяв функцию $s'_n(z,t)$ из (21) ($s'_n(z,t)>s$), для $n=0$ имеем

$$\|q_0\|_s(t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0-t-z}}\le\int\limits_0^{t/2}\left[\frac{Rc_0e^{-\frac{2\sigma\xi}{b_0-t-z}}}{(s'_0(\xi,t-2\xi)-s)^2}\left(1+\frac{T}{4}\right)+TR^2e^{-\frac{\sigma\xi}{b_0-t-z}}\left(1+\frac{T}{4}\right)\right]d\xi$$

$$\le\frac{R(1+T/4)\big(4c_0+s_0^2TR\big)}{(\nu^0(z,t)-s)^2}\frac{a_0s_0}{\sigma},\quad (z,t,s)\in F_0.$$

Следовательно,

$$\lambda_0(\sigma)\le\frac{1}{\sigma}\left(1+\frac{T}{4}\right)a_0s_0\max(1,s_0,4c_0+s^2TR)R=:\frac{1}{\sigma}\mu_0R.$$

Таким образом, $\lambda_0(\sigma)$ конечно, т. е. неравенство (22) выполнено при $n=0$. Кроме того, для множества $(z,t,s)\in F_1$ имеют место следующие неравенства:

$$\|u_1-u_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0-t-z}}=\|p_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0-t-z}}\le\lambda_0(\sigma),$$

$$\|v_1-v_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0-t-z}}=\|r_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0-t-z}}\le\frac{\lambda_0(\sigma)}{\nu^0(z,t)-s}\le\frac{2\lambda_0(\sigma)}{s_0-s},$$

$$\|k_1-k_0\|_s(t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0-t-z}}=\|q_0\|_s(t)e^{-\frac{\sigma t}{b_0-t-z}}\le\frac{\lambda_0(\sigma)}{(\nu^0(z,t)-s)^2}\le\frac{4\lambda_0(\sigma)}{(s_0-s)^2}.$$

При выборе $\sigma>0$ таком, что $\sigma>4\mu_0$, неравенства (23) будут выполняться для $n=0$.

Покажем методом индукции, что неравенства (22), (23) имеют место и для других n, если σ выбрать подходящим образом. Пусть неравенства (22), (23) справедливы для $n = 0, 1, 2, \ldots, i$. Тогда для $(z,t,s) \in F_{i+1}$

$$\|p_{i+1}\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_{i+1}-t-z}} \le \int\limits_z^t \biggl(\|r_i\|_s(z,\tau)e^{-\frac{\sigma\tau}{b_{i+1}-\tau-z}}e^{-\frac{\sigma(b_{i+1}-z)(t-\tau)}{(b_{i+1}-\tau-z)(b_{i+1}-t-z)}}$$
$$+\frac{z}{2}\|q_i\|_s(\tau-z)e^{-\frac{\sigma(\tau-z)}{b_{i+1}-\tau}}e^{-\frac{\sigma(b_{i+1}-z)(t-\tau+z)}{(b_{i+1}-\tau)(b_{i+1}-t-z)}}\biggr)\,d\tau$$
$$\le \int\limits_z^t \frac{\lambda_i(\sigma)}{\nu^{i+1}(z,\tau)-s}e^{-\frac{\sigma(t-\tau)}{b_{i+1}-t-z}}\,d\tau + \int\limits_0^{t-z}\frac{t-\eta}{2}\frac{\lambda_i(\sigma)}{(\nu^{i+1}(z,\eta)-s)^2}e^{-\frac{\sigma(t-\eta)}{b_{i+1}-t-z}}\,d\eta$$
$$\le \frac{\lambda_i(\sigma)(1+a_0/2)}{\nu^{i+1}(z,t)-s}\frac{b_{i+1}-t-z}{\sigma} \le \frac{\lambda_i(\sigma)a_0(1+a_0/2)}{\sigma}.$$

При выводе использовались очевидные неравенства $a_i \le a_0$, $\nu^{i+1}(z,t) \le \nu^i(z,t)$, $t-\eta < \frac{b_{i+1}}{1+\varepsilon} - (z+\eta) < b_{i+1} - (z+\eta)$. Аналогичные рассуждения для r_{i+1}, q_{i+1} приводят к неравенствам

$$\|r_{i+1}\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_{i+1}-t-z}} \le \frac{1}{2}\int\limits_0^z\Biggl[\frac{c_0\lambda_i(\sigma)}{(s_i'(\xi,t-z+\xi)-s)^2}e^{-\frac{\sigma(z-\xi)(b_{i+1}+t-z)}{(b_{i+1}-t+z-2\xi)(b_{i+1}-t-z)}}$$
$$+\int\limits_0^{t-z}\left(\frac{R\bigl(1+s_0^2\bigr)\lambda_i(\sigma)}{(s_0-s)^2}+2R\frac{\lambda_i(\sigma)}{(\nu^i(\xi,\tau)-s)^2}\right)e^{-\frac{\sigma(z-\xi)(b_{i+1}-t+z+2\tau)}{(b_{i+1}-t+z-2\xi+\tau)(b_{i+1}-t-z)}}\,d\tau\Biggr]\,d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_z^{(t+z)/2}\Biggl[\frac{c_0\lambda_i(\sigma)e^{-\frac{\sigma(\xi-z)}{b_{i+1}-t-z}}}{(s_i'(t+z-\xi)-s)^2}+\frac{\lambda_i(\sigma)e^{-\frac{\sigma(2\xi-z)}{b_{i+1}-t-z}}}{(\nu^i(\xi,\tau)-s)^2}$$
$$+\int\limits_0^{t+z-2\xi}\left(\frac{R\bigl(1+s_0^2\bigr)\lambda_i(\sigma)}{(s_0-s)^2}+2R\frac{\lambda_i(\sigma)}{(\nu^i(\xi,\tau)-s)^2}\right)e^{-\frac{\sigma(\xi-z)}{b_{i+1}-t-z}}\,d\tau\Biggr]\,d\xi$$
$$\le \frac{\lambda_i(\sigma)(b_{i+1}-t-z)}{2\sigma(\nu^{i+1}(z,t)-s)^2}\bigl[8c_0+1+2RT\bigl(3+s_0^2\bigr)\bigr]$$
$$\le \frac{\lambda_i(\sigma)}{\sigma}\frac{a_0\bigl[4c_0+1/2+RT\bigl(3+s_0^2\bigr)\bigr]}{\nu^{i+1}(z,t)-s},\quad (z,t,s)\in F_{i+1}.$$

В промежуточных выкладках функция s_n' определена равенством (21) при $n = i$. При выводе использовался тот факт, что неравенства

$$\|\cdot\|_{s,i+1}^\sigma < \|\cdot\|_{s,i}^\sigma,\quad \frac{1}{s_0-s} \le \frac{1}{\nu^i(z,t)-s}\quad i=0,1,2,\ldots,$$
$$\|u_i\|_{s,i+1}^\sigma < \|u_i\|_{s,i-1}^\sigma \le 2R,\quad \|v_i\|_{s,i+1}^\sigma < \|v_i\|_{s,i-1}^\sigma \le R\frac{1+s_0}{s_0-s},$$
$$\|k_i\|_{s,i+1}^\sigma < \|k_i\|_{s,i-1}^\sigma \le R\frac{1+s_0^2}{(s_0-s)^2},\quad (z,t,s)\in F_{i+1},$$

справедливы согласно индуктивному предположению. Аналогичные рассуждения для q_{i+1} приводят к неравенству (предварительно осуществлена замена переменной $t-2\xi=\eta$)

$$
\begin{aligned}
\|q_{i+1}\|_s(z)e^{-\frac{\sigma t}{b_{i+1}-t-z}} \leq \frac{\lambda_i(\sigma)}{2}
&\times \int_0^t \Bigg[\frac{c_0 e^{-\frac{\sigma(t-\eta)}{b_{i+1}-t-z}}}{\big(s_i'\big(\frac{t-\eta}{2},\eta\big)-s\big)^2} \left(\frac{1}{\nu^{i+1}\big(\frac{t-\eta}{2},\eta\big)-s} + \frac{t-\eta}{4\big(\nu^{i+1}\big(\frac{t-\eta}{2},\eta\big)-s\big)^2} \right) \\
&\quad + \int_0^\eta \Bigg\{ \frac{1}{\big(\nu^{i+1}\big(\frac{t-\eta}{2},\tau\big)-s\big)^2} \left(\frac{R(1+s_0)}{s_0-s} + \frac{t-\eta}{4}\frac{R\big(1+s_0^2\big)}{(s_0-s)^2} \right) \\
&\quad + \frac{R(1+s_0^2)}{(s_0-s)^2} \Bigg(\frac{1}{\nu^{i+1}\big(\frac{t-\eta}{2},\frac{t+\eta-2\tau}{2}\big)-s} \\
&\quad + \frac{t-\eta}{4\big(\nu^{i+1}\big(\frac{t-\eta}{2},\frac{t+\eta-2\tau}{2}\big)-s\big)^2} \Bigg) \Bigg\} e^{-\frac{(t-\eta)\sigma}{2(b_{i+1}-t-z)}}\,d\tau \Bigg] d\xi \\
&\leq \frac{\lambda_i(\sigma)(b_{i+1}-t-z)}{\sigma} \Bigg[\frac{4c_0(4+a_0)}{4(\nu^{i+1}(z,t)-s)^3} \\
&\quad + RT\frac{4(1+s_0)+a_0\big(1+s_0^2\big)}{4(\nu^{i+1}(z,t)-s)^3} + RT\frac{(4+a_0)\big(1+s_0^2\big)}{4(\nu^{i+1}(z,t)-s)^3} \Bigg] \\
&\leq \frac{\lambda_i(\sigma)a_0}{\sigma}\frac{c_0(4+a_0)+RT\big[1+s_0+(2+3a_0)\big(1+s_0^2\big)/4\big]}{(\nu^{i+1}(z,t)-s)^2}, \quad (z,t,s)\in F_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Из полученных оценок следует, что

$$
\lambda_{i+1}(\sigma) \leq \lambda_i(\sigma)\rho, \quad \lambda_{i+1} < \infty,
$$

$$
\begin{aligned}
\rho = \frac{a_0}{\sigma}\max\big\{1+a_0/2; 1/2+4c_0+RT\big(3+s_0^2\big); \\
c_0(4+a_0)+RT\big[1+s_0+(2+3a_0)\big(1+s_0^2\big)/4\big]\big\}.
\end{aligned}
$$

Вместе с тем для $(z,t,s)\in F_{i+2}$ имеем

$$
\|u_{i+2}-u_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_{i+1}-t-z}} \leq \sum_{n=0}^{i+1}\|p_n\|_s e^{-\frac{\sigma t}{b_n-t-z}} \leq \sum_{n=0}^{i+1}\lambda_n(\sigma) \leq \lambda_0(\sigma)\sum_{n=0}^{i+1}\rho^n,
$$

$$
\begin{aligned}
\|v_{i+2}-v_0\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b_{i+1}-t-z}} &\leq \sum_{n=0}^{i+1}\|r_n\|_s e^{-\frac{\sigma t}{b_n-t-z}} \leq \sum_{n=0}^{i+1}\frac{\lambda_n(\sigma)}{\nu^n(z,t)-s} \\
&\leq \frac{1}{s_0-s}\sum_{n=0}^{i+1}\frac{\lambda_n(\sigma)a_n}{a_n-a_{n+1}} \leq \frac{\lambda_0(\sigma)}{s_0-s}\sum_{n=0}^{i+1}\rho^n[(n+1)^2+1],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|k_{i+2}-k_0\|_s(t)e^{-\frac{\sigma t}{b_{i+1}-t-z}} &\leq \sum_{n=0}^{i+1}\|q_n\|_s e^{-\frac{\sigma t}{b_n-t-z}} \\
&\leq \sum_{n=0}^{i+1}\frac{\lambda_n(\sigma)}{(\nu^n(z,t)-s)^2} \leq \frac{1}{(s_0-s)^2}\sum_{n=0}^{i+1}\frac{\lambda_n(\sigma)a_n^2}{(a_n-a_{n+1})^2} \\
&\leq \frac{\lambda_0(\sigma)}{(s_0-s)^2}\sum_{n=0}^{i+1}\rho^n[(n+1)^2+1]^2,
\end{aligned}
$$

Выберем $\sigma > 0$ таким, что

$$\rho < 1, \quad \lambda_0(\sigma)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n[(n+1)^2+1]^2 \le R.$$

Тогда

$$\|u_{i+2}-u_0\|^{\sigma}_{s,i+1} \le R, \quad \|v_{i+2}-v_0\|^{\sigma}_{s,i+1} \le \frac{R}{s_0-s},$$

$$\|k_{i+2}-k_0\|^{\sigma}_{s,i+1} \le \frac{R}{(s_0-s)^2}, \quad (z,t,s)\in F_{i+2}.$$

Заметим, что нормы $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|^{\sigma}_{s,i}$ эквивалентны для $i = 0,1,2,\dots$. Действительно,

$$e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}}\|\cdot\|_s(z,t) \le \|\cdot\|^{\sigma}_{s,i}(z,t) \le \|\cdot\|_s(z,t), \quad (z,t)\in F_{i+1}.$$

Следовательно, неравенства (23) можно переписать в виде

$$\|u_{n+1}-u_0\|_s \le Re^{\frac{\sigma}{\varepsilon}}, \quad \|v_{n+1}-v_0\|_s \le \frac{Re^{\frac{\sigma}{\varepsilon}}}{s_0-s},$$

$$\|k_{n+1}-k_0\|_s \le \frac{Re^{\frac{\sigma}{\varepsilon}}}{(s_0-s)^2}, \quad (z,t,s)\in F_{n+1}. \tag{24}$$

Так как выбор $\sigma > 0$ не зависит от номера приближений, последовательные приближения (u_n,k_n,v_n) принадлежат $C(A_s;F)$, $F = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty}F_n$ и для них имеют место неравенства

$$\|u_n-u_0\|_s(z,t) \le \widetilde{R}, \quad \|v_n-v_0\|_s(z,t) \le \frac{\widetilde{R}}{s_0-s},$$

$$\|k_n-k_0\|_s(t) \le \frac{\widetilde{R}}{(s_0-s)^2}, \quad (z,t,s)\in F.$$

При $s\in(0,s_0)$ ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n-u_{n-1}), \quad \sum_{n=0}^{\infty}(v_n-v_{n-1}), \quad \sum_{n=0}^{\infty}(k_n-k_{n-1})$$

сходятся равномерно в норме пространства $C\big(A_s;P^{\varepsilon}_{sT}\big)$, поэтому $u_n\to u$, $v_n\to v$, $k_n\to k$, предельные функции u, k, v являются элементами $C\big(A_s;P^{\varepsilon}_{sT}\big)$ и удовлетворяют уравнениям (16)–(18).

Докажем, что найденное решение единственно. Пусть (u,v,k) и $(\hat u,\hat v,\hat k)$ — любые два решения, удовлетворяющие неравенствам

$$\|u-u_0\|_s(y,t) \le \widetilde{R}, \quad \|v-v_0\|_s(y,t) \le \frac{\widetilde{R}}{s_0-s},$$

$$\|k-k_0\|_s(t) \le \frac{\widetilde{R}}{(s_0-s)^2}, \quad (z,t,s)\in F.$$

Положим $\tilde p = u-\hat u$, $\tilde r = v-\hat v$, $\tilde q = k-\hat k$, и пусть

$$\lambda(\sigma) = \max\{\sup_{(z,t,s)\in F}[\|\tilde p\|_s(z,t)e^{-\frac{\sigma t}{b-t-z}}], \sup_{(z,t,s)\in F}[\|\tilde r\|_s(z,t)(\nu(z,t)-s)e^{-\frac{\sigma t}{b-t-z}}],$$

$$\sup_{(z,t,s)\in F}[\|\tilde q\|_s(t)(\nu(z,t)-s)^2e^{-\frac{\sigma t}{b-t-z}}]\} < \infty,$$

где $b := a(s_0 - s)$, $\nu(z,t) = s_0 - \frac{t+z}{a}$, $a = a_0 \prod_{n=0}^{\infty}(1 + 1/(n+1)^2)^{-1}$. Тогда для функций $\tilde{p}$, $\tilde{r}$, $\tilde{q}$ можно получить соотношения

$$\tilde{p}(x,z,t) = \int_z^t \Big(\tilde{r}(x,z,\tau) - \frac{z}{2}\tilde{q}(x,\tau - z)\Big)\, d\tau,$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}(x,z,t) = \frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[&\Delta\tilde{p}(x,\xi,t-z+\xi) \\ &+ \int_0^{t-z} (k(x,\tau)\tilde{p}(x,\xi,t-z+\xi-\tau) + \hat{u}(x,\xi,t-z+\xi-\tau)\tilde{q}(x,\tau))\, d\tau\Bigg] d\xi \\ &+ \frac{1}{2}\int_z^{(t+z)/2}\Bigg[\Delta\tilde{p}(x,\xi,t+z-\xi) - \tilde{q}(x,t+z-2\xi) \\ &+ \int_0^{t+z-2\xi} (k(x,\tau)\tilde{p}(x,\xi,t+z-\xi-\tau) + \tilde{q}(x,\tau)\hat{u}(x,\xi,t+z-\xi-\tau))\, d\tau\Bigg] d\xi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{q}(x,t) = -\int_0^{t/2}\Bigg[&\Delta\tilde{r}(x,\xi,t-2\xi) - \frac{\xi}{2}\Delta\tilde{q}(x,t-2\xi) \\ &+ \int_0^{t-2\xi}\Big\{\tilde{q}(x,\tau)\Big(\hat{v}(x,\xi,t-\xi-\tau) - \frac{\xi}{2}\hat{k}(x,t-\xi-\tau)\Big) \\ &+ k(x,\tau)\Big(\tilde{r}(x,\xi,t-\xi-\tau) - \frac{\xi}{2}\tilde{q}(x,t-\xi-\tau)\Big)\Big\}\, d\tau\Bigg] d\xi.\end{aligned}$$

Применяя к ним оценки, приведенные выше, находим

$$\begin{aligned}\lambda \le \lambda\rho', \quad \rho' := \frac{a}{\sigma}\max\big\{&1 + a/2; 1/2 + 4c_0 + 2RT + RT\big(1+s_0^2\big); \\ &c_0(4+a) + RT\big[1 + s_0 + (2+3a)\big(1+s_0^2\big)/4\big]\big\} < \rho < 1.\end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda = 0$, поэтому $u = \hat{u}$, $v = \hat{v}$, $k = \hat{k}$. Теорема доказана.

Рассмотрим множество Υ всех пар функций (f,h), являющихся элементами $C(A_{s_0};[0,T])$, $s_0 > 0$, для которых выполнены условия теоремы 1 с фиксированными R, T, s_0, ε. Имеет место следующая теорема устойчивости.

Теорема 2. *Пусть* $(f,h) \in \Upsilon$, $(\bar{f},\bar{h}) \in \Upsilon$. *Тогда для соответствующих решений* (u,k,v), $(\bar{u},\bar{k},\bar{v})$ *системы уравнений* (16)–(18) *справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\|u - \bar{u}\|_s \le cM, \quad \|k - \bar{k}\|_s \le \frac{cM}{(s_0 - s)^2}, \\ \|v - \bar{v}\|_s \le \frac{cM}{s_0 - s}, \quad (z,t) \in P^{\varepsilon}_{sT},\ 0 < s < s_0,\end{gathered} \tag{25}$$

где

$$M = \max[\max \|h\| - \|\bar{h}\|_{s_0}(t),\ \max \|f_t\| - \|\bar{f}_t\|_{s_0}(t),$$
$$\max \|h_t\| - \|\bar{h}_t\|_{s_0}(t),\ \max \|f_{tt}\| - \|\bar{f}_{tt}\|_{s_0}(t)], \quad t \in [0,T],$$

а постоянная c зависит от R, T, s_0, σ, ε.

Доказательство. Для разностей $u-\bar{u}=\tilde{u}$, $k-\bar{k}=\tilde{k}$, $v-\bar{v}=\tilde{v}$, $f-\bar{f}=\tilde{f}$, $h-\bar{h}=\tilde{h}$ из соотношений (16)–(18) следуют равенства

$$\tilde{u}(x,z,t) = \int_z^t \Big(\tilde{v}(x,z,\tau) - \frac{z}{2}\tilde{k}(x,\tau-z)\Big)\,d\tau, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}(x,z,t) = \frac{1}{2}\int_0^z \Bigg[&\Delta\tilde{u}(x,\xi,t-z+\xi)\\ &+ \int_0^{t-z} (\bar{k}(x,\tau)\tilde{u}(x,\xi,t-z+\xi-\tau) + u(x,\xi,t-z+\xi-\tau)\tilde{k}(x,\tau))\,d\tau\Bigg]\,d\xi\\ &+ \frac{1}{2}\int_z^{(t+z)/2}\Bigg[\Delta\tilde{u}(x,\xi,t+z-\xi) - \tilde{k}(x,t+z-2\xi)\\ &+ \int_0^{t+z-2\xi} (\bar{k}(x,\tau)\tilde{u}(x,\xi,t+z-\xi-\tau) + \tilde{k}(x,\tau)u(x,\xi,t+z-\xi-\tau))\,d\tau\Bigg]\,d\xi,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}(x,t) = -\int_0^{t/2}\Bigg[&\Delta\tilde{v}(x,\xi,t-2\xi) - \frac{\xi}{2}\Delta\tilde{k}(x,t-2\xi)\\ &+ \int_0^{t-2\xi}\Bigg\{\tilde{k}(x,\tau)\Big(v(x,\xi,t-\xi-\tau) - \frac{\xi}{2}k(x,t-\xi-\tau)\Big)\\ &+ \bar{k}(x,\tau)\Big(\tilde{v}(x,\xi,t-\xi-\tau) - \frac{\xi}{2}\tilde{k}(x,t-\xi-\tau)\Big)\Bigg\}\,d\tau\Bigg]\,d\xi.\end{aligned} \tag{28}$$

в которых

$$\tilde{v}_0(x,z,t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}_t(x,t-z) - \tilde{h}(x,t-z)), \quad \tilde{k}_0(x,t) = 2(\tilde{f}_{tt}(x,t) + \tilde{h}_t(x,t)).$$

Очевидно, что

$$\|\tilde{v}_0\|_{s_0}(z,t) \le M, \quad \|\tilde{k}_0\|_{s_0}(z) \le 4M, \quad (z,t) \in P^{\varepsilon}_{sT}. \tag{29}$$

Из теоремы 1 следуют оценки

$$\|u\|_s \le 2\widetilde{R}, \quad \|v\|_s \le \frac{\widetilde{R}(1+s_0)}{s_0-s}, \quad \|k\|_s \le \frac{\widetilde{R}\big(1+s_0^2\big)}{(s_0-s)^2}.$$

Применяя к линейной относительно $\tilde{u}$, $\tilde{k}$, $\tilde{v}$ системе уравнений (26)–(28) метод последовательных приближений, используемый при доказательстве теоремы 1, найдем, что при том же выборе σ для решения системы (26)–(28) справедливы неравенства

$$\|\tilde{u}-\tilde{u}_0\|_{\leq} c_1 M, \quad \|\tilde{v}-\tilde{v}_0\| \leq \frac{c_1 M}{s_0 - s},$$

$$\|\tilde{k}-\tilde{k}_0\| \leq \frac{c_1 M}{(s_0 - s)^2}, \quad (z,t) \in P^{\varepsilon}_{sT},\ 0 < s < s_0,$$

в которых c_1 зависит от R, T, s_0, σ, ε. Отсюда с учетом (29) вытекают неравенства (25). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969.
2. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
3. *Lorenzi A.* Identification problems for integro-differential equations // Ill-Posed problems in Natural Sciences (Ed. A. Tikhonov). Moscow: TVP Sci. Publ., 1992. P. 342–366.
4. *Bukhgeym A. L.* Inverse problems of memory reconstruction // J. Inverse Ill Posed Probl. 1993. V. 1, N 3. P. 193–206.
5. *Durdiev D. K., Totieva Zh. D.* The problem of determining the onedimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41, N 17. P. 8019–8032.
6. *Durdiev D. K., Totieva Zh. D.* The problem of determining the one-dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type // J. Inverse Ill Posed Probl. 2020. V. 28, N 1. P. 43–52.
7. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 72–82.
8. *Durdiev D. K.* Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics // Differ. Equations. 2008. V. 44, N 7. P. 893–899.
9. *Бухгейм А. Л., Калинина Н. И.* Глобальная сходимость метода Ньютона в обратных задачах восстановления памяти // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1018–1033.
10. *Janno J., von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
11. *Овсянников Л. В.* Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163, № 4. С. 819–822.
12. *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкалах банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 789–792.
13. *Овсянников Л. В.* Аналитические группы. Новосибирск: Наука, 1972.
14. *Nirenberg L.* Topics in nonlinear functional analysis. New York: Courant Inst. Math. Sci.; New York Univ., 1974.
15. *Романов В. Г.* О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 275–284.
16. *Романов В. Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 125–134.
17. *Романов В. Г.* О разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений в классе функций, аналитических по части переменных // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 4. С. 807–811.
18. *Бозоров З. Р.* Задача определения двумерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 1. С. 28–45.
19. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80.
20. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, № 4. С. 18–43.

21. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Локальная разрешимость задачи определения пространственной части многомерного ядра в интегродифференциальном уравнении гиперболического типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т. 29, № 4. С. 37–47.

22. *Durdiev D. K.* Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations // Журн. мат. физики, анал. геометрии. 2007. V. 3, N 4. P. 411–423.

23. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 574–582.

Поступила в редакцию 20 октября 2020 г.
После доработки 23 января 2021 г.
Принята к публикации 24 февраля 2021 г.

Дурдиев Дурдимурод Каландарович
Бухарское отделение Института Математики АН Республики Узбекистан,
ул. М. Икбол, 11, Бухара 200100, Узбекистан
durdiev65@mail.ru

Тотиева Жанна Дмитриевна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027;
Северо-Осетинский государственный университет,
ул. Ватутина, 44–46, Владикавказ 362025
jannatuaeva@inbox.ru