V. V. Rozen, Equilibrium in games with ordered outcomes,
Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform., 2009, Volume 9, Issue 3, 61–66

Замечание 2.3. Утверждение, подобное теореме 2.3, для внешних частей булевых матриц не выполняется. Действительно, если для матрицы A существует матрица B такая, что $\check{A} \subseteq \check{B} \subseteq A$, то это влечет неравенства $\check{A} \cap (\operatorname{Per} A)' \subseteq \check{B} \cap (\operatorname{Per} A)' \subseteq A \cap (\operatorname{Per} A)'$ и, следовательно, равенство $\check{A} = \check{B} \cap (\operatorname{Per} A)'$. При этом матрицы $\check{A}$ и $\check{B}$ могут быть различными, если рассматривать булеву алгебру мощности $|\mathbf{B}| > 2$. Примером таких матриц над четырехэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B} = \{0, a, b, 1\}$ могут служить матрицы

$$\check{A} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \check{B} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ b & b & 0 \end{pmatrix} \subset A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & b & b \end{pmatrix},$$

для которых $\operatorname{Per} B = 0$, $\operatorname{Per} A = b$ и, следовательно, $(\operatorname{Per} A)' = a$.

Библиографический список

1. *Поплавский В.Б.* О разложении определителей булевых матриц // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 199–223.

2. *Поплавский В.Б.* Объемы и определители степеней транзитивных и рефлексивных булевых отношений на конечных множествах // Изв. Тульск. госун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10, вып. 1. С. 134–141.

3. *Поплавский В.Б.* О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискрет. мат. 2008. Т. 20, № 4. С. 42–60.

4. *Сачков В.Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982.

5. *Минк Х.* Перманенты. М.: Мир, 1982.

6. *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.

7. *Golan J.S.* Semirings and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

8. *Reutenauer C., Straubing H.* Inversion of matrices over a commutative semiring // J. of Algebra. 1984. № 88. С. 350–360.

УДК 519.83

РАВНОВЕСИЕ В ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

В.В. Розен

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: RozenVV@info.sgu.ru

Рассмотрены условия существования ситуаций равновесия в смешанных расширениях игр с упорядоченными исходами. Предложены общие методы описания множества ситуаций равновесия, а также равновесий по Нэшу.

Ключевые слова: ситуация равновесия, равновесие по Нэшу, отношение порядка, вероятностная мера.

Equilibrium in Games with Ordered Outcomes

V.V. Rozen

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: RozenVV@info.sgu.ru

We consider some conditions of existence of equilibrium points in mixed extensions of games with ordered outcomes. General methods for description of the set of equilibrium points and also for Nash equilibrium points are proposed.

Key words: equilibrium points, Nash equilibrium, ordering relation, stochastic measure.

ВВЕДЕНИЕ

Игра с упорядоченными исходами характеризуется тем, что ее целевая структура задана с помощью отношений порядка, выражающих предпочтения игроков на множестве исходов игры. Игра с упорядоченными исходами в нормальной форме задается в виде набора объектов

$$G = \langle (X_i)_{i \in I},\, A,\, (\omega_i)_{i \in I},\, F \rangle, \tag{1}$$

где X_i — множество стратегий игрока $i \in I$, $I = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, A — множество исходов, ω_i — отношение (частичного) порядка на A, выражающее предпочтения игрока i, $F\colon \prod\limits_{i \in I} X_i \to A$ — функция реализации.

Основным некооперативным принципом оптимальности для игр этого класса является принцип равновесия.

Определение. Ситуация $x^0 \in \prod\limits_{i \in I} X_i$ называется *ситуацией равновесия* в игре G, если ни у одного игрока $i \in I$ не существует такой стратегии $x_i \in X_i$, для которой выполняется

$$F(x^0 || x_i) >^{\omega_i} F(x^0).$$

Ситуация равновесия обладает устойчивостью, так как в такой ситуации ни один игрок не заинтересован в одностороннем отклонении от нее.

Ситуация x^0 называется *равновесием по Нэшу*, если для всех $i \in I$, $x_i \in X_i$ имеет место

$$F(x^0 || x_i) \leq^{\omega_i} F(x^0).$$

Отметим, что если все отношения ω_i являются линейными (в частности, для игр с функциями выигрыша), то понятия равновесия и равновесия по Нэшу становятся равнозначными; в общем случае равновесие по Нэшу есть специализация понятия равновесия.

Настоящая работа представляет собой краткий обзор результатов, полученных автором в разные годы (в том числе неопубликованных), которые касаются условий существования и методов нахождения ситуаций равновесия в играх с упорядоченными исходами [1–6]. Как и в играх с численными выигрышами, в играх с упорядоченными исходами принцип равновесия обладает универсальной реализуемостью лишь в смешанных стратегиях. Переход к смешанным стратегиям в играх с упорядоченными исходами требует продолжения порядков ω_i $(i \in I)$ на множество вероятностных мер. Проблемы продолжения порядка на множество вероятностных мер обсуждались на Международной конференции, посвященной 100-летию профессора В.В. Вагнера, и опубликованы в работе [7].

1. ПРОДОЛЖЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ НА МНОЖЕСТВО ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР С ПОМОЩЬЮ КОНУСОВ ИЗОТОННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Под вероятностной мерой на произвольном (частично) упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ понимается неотрицательная счетно-аддитивная нормированная функция, заданная на σ-алгебре Ω, порожденной семейством всех мажорантно стабильных в $\langle A, \omega \rangle$ подмножеств. Последнее условие обеспечивает выполнение включения $A \subseteq \Sigma$, а также измеримость относительно такой σ-алгебры любой функции, являющейся изотонным отображением упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в числовую прямую R. Множество всех вероятностных мер на упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ обозначается далее через $P_\omega(A)$. *Продолжением порядка ω на множество вероятностных мер* называется любое содержащее ω отношение квазипорядка на $P_\omega(A)$, ограничение которого на A совпадает с ω. Через $C_0(\omega)$ будем обозначать множество всех ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в числовую прямую. Для $f \in C_0(\omega), \mu \in P_\omega(A)$ будем полагать: $\bar{f}\,(\mu) = (f, \mu) = \int\limits_A f d\mu$. Зафиксируем некоторый конус $C \subseteq C_0(\omega)$ изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в R. Определим на $P_\omega(A)$ отношение ω^C формулой

$$\mu \geq^C \nu \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, f \in C) \;\; \bar{f}\,(\mu) \geq \bar{f}\,(\nu).$$

Замечание 1. При всяком конусе $C \subseteq C_0(\omega)$ отношение ω^C является отношением квазипорядка на множестве вероятностных мер $P_\omega(A)$, содержащим отношение ω. Квазипорядок ω^C будет продолжением порядка ω тогда и только тогда, конус С аппроксимирует отношение ω.

Основные типы структур, рассматриваемых на множестве вероятностных мер $P_\omega(A)$, — выпуклая структура и топология. Выпуклая структура на $P_\omega(A)$ определена в силу того, что для любых двух вероятностных мер $\mu, \nu \in P_\omega(A)$ их выпуклая комбинация $\alpha\mu + (1-\alpha)\nu$, где $0 \leq \alpha \leq 1$, также является вероятностной мерой. Топология на $P_\omega(A)$ определяется при помощи сходимости (сходимость последовательности вероятностных мер (μ_n) к вероятностной мере μ означает сходимость числовой последовательности $\int\limits_A f d\mu_n$ к $\int\limits_A f d\mu$ при любой функции $f \in C_0(\omega)$).

Отметим основные математические свойства отношений вида ω^C.

Теорема 1. *При всяком конусе $C \subseteq C_0(\omega)$ отношение квазипорядка ω^C обладает свойствами:*
(a) *двусторонней стабильности относительно смешивания:*

$$\mu \geq^{\omega^C} \nu \Leftrightarrow \lambda\mu + (1-\lambda)\theta \geq^{\omega^C} \lambda\nu + (1-\lambda)\theta \ (\mu, \nu, \theta \in P_\omega(A),\ 0 < \lambda < 1),$$

(b) *замкнутости: из условий $\mu_n \geq^{\omega^C} \nu_n,\ \mu_n \to \mu,\ \nu_n \to \nu\ (n = 1, 2, \ldots)$ следует $\mu \geq^{\omega^C} \nu$.*

Свойства двусторонней стабильности относительно смешивания и замкнутости, которыми обладают квазипорядки ω^C, полностью их характеризуют в случае, когда A — конечное множество. А именно справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть ω — отношение порядка на конечном множестве A и квазипорядок ρ является его продолжением на множество вероятностных мер $P_\omega(A)$. Для того, чтобы для некоторого конуса изотонных отображений $C \subseteq C_0(\omega)$ имело место $\rho = \omega^C$, необходимо и достаточно, чтобы отношение ρ было двусторонне стабильным относительно смешивания и замкнутым.*

2. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОРЯДКА НА МНОЖЕСТВО ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Среди квазипорядков ω^C существует наименьший — им является квазипорядок $\omega^{C_0(\omega)}$. Он называется *каноническим продолжением* порядка ω на множество вероятностных мер и обозначается далее через $\widetilde{\omega}$. Так как конус $C_0(\omega)$ аппроксимирует отношение ω, то в силу замечания 1 квазипорядок $\widetilde{\omega}$ будет продолжением порядка ω на множество вероятностных мер $P_\omega(A)$.

Теорема 3. *Каноническое продолжение порядка ω на множество вероятностных мер является отношением порядка.*

Эффективное выражение для канонического продолжения порядка ω дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть $\langle A, \omega \rangle$ — произвольное упорядоченное множество. Для любых вероятностных мер $\mu, \nu \in P_\omega(A)$ условие $\mu \geq^{\widetilde{\omega}} \nu$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mu(B) \geq \nu(B)$ для любого подмножества $B \subseteq A$, которое является мажорантно стабильным в упорядоченном множестве$\langle A, \omega \rangle$.*

Рассмотрим теперь случай, когда упорядоченное множество $\langle A, \omega \rangle$ является конечным. Полагаем $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. В этом случае множество вероятностных мер $P_\omega(A)$ может быть отождествлено со стандартным $(n-1)$-мерным симплексом S_n вероятностных векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, где $x_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, а каноническое продолжение порядка ω задается равносильностью

$$x \geq^{\widetilde{\omega}} y \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\ f \in C_0(\omega)) \quad (f, x) \geq (f, y),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в R^n.

Дается полное описание структуры канонического продолжения порядка, заданного на конечном множестве, на множество его вероятностных мер.

Определение. *Декомпозиционной матрицей* n-элементного упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ будем называть квадратную матрицу $D = (d_i^j)$ порядка n, удовлетворяющую следующим условиям: $a)\ d_i^j \geq 0,\quad b)\ \sum\limits_{j=1}^{n} d_i^j = 1,\quad c)\ d_i^j \neq 0 \Rightarrow a_i \leq^\omega a_j$ (заметим, что первые два условия означают, что матрица D является стохастической).

Теорема 5 (теорема декомпозиции). *Для любых вероятностных векторов $x, y \in S_n$ условие $y \geq^{\widetilde{\omega}} x$ выполняется тогда и только тогда, когда $y = xD$ для некоторой декомпозиционной матрицы D упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$.*

Следствие. *Для n-элементного упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ каноническое продолжение порядка ω на стандартный симплекс S_n совпадает с наименьшим отношением на S_n, содержащим отношение ω и стабильным относительно смешивания.*

3. ОПИСАНИЕ РАВНОВЕСИЙ В ИГРАХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ

Пусть G — игра с упорядоченными исходами вида (1). Зафиксируем для каждого $i \in I$ некоторый конус C_i ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega_i \rangle$ в числовую прямую R, аппроксимирующий отношение ω_i. Смешанное расширение игры G с помощью набора конусов

$(C_i)_{i\in I}$ есть игра игроков I с квазиупорядоченными исходами:

$$\widetilde{G}_{(C_1,\ldots,C_n)} = \langle (\widetilde{X}_i)_{i\in I}, \widetilde{A}, (\omega_i^{C_i})_{i\in I}, \widetilde{F}\rangle,$$

где $\widetilde{X}_i$ — множество вероятностных мер на X_i, $\widetilde{A}$ — множество вероятностных мер на A, $\widetilde{F}$ — отображение множества $\prod\limits_{i\in I}\widetilde{X}_i$ в $\widetilde{A}$, которое каждому набору вероятностных мер $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\prod\limits_{i\in I}\widetilde{X}_i$ ставит в соответствие вероятностную меру $F_\mu \in \widetilde{A}$, представляющую собой образ произведения вероятностных мер $\mu_1\otimes\ldots\otimes\mu_n$ относительно отображения F; отношение квазипорядка $\omega_i^{C_i}$ есть продолжение порядка ω_i на множество вероятностных мер с помощью конуса изотонных отображений C_i.

Пусть наряду с игрой G задана еще одна игра с упорядоченными исходами того же множества игроков $H = \langle (Y_i)_{i\in I}, B, (\sigma_i)_{i\in I}, \Phi\rangle$. Исходя из общего определения гомоморфизма многоосновных алгебраических систем, можно определить гомоморфизм игры G в игру H как такой набор отображений $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\psi)$, где $\varphi_i : X_i \to Y_i, \quad \psi : A\to B$, что

$$\psi\circ F = \Phi\circ(\mathop{\Box}_{i\in I}\varphi_i),$$

$$a_1 \leq^{\omega_i} a_2 \Rightarrow \psi(a_1)\leq^{\sigma_i}\psi(a_2) \text{ для всех } i\in I.$$

Для игры H при каждом $i\in I$ зафиксируем некоторый конус K_i ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle B,\sigma_i\rangle$ в R, аппроксимирующий отношение σ_i. Тогда определено смешанное расширение $\widetilde{H}_{(K_1,\ldots,K_n)}$ игры H с помощью набора конусов $(K_1,\ldots,K_n)$. Можно показать, что если набор отображений $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\psi)$ является гомоморфизмом игры G в игру H, причем каждая компонента гомоморфизма является измеримой функцией относительно соответствующих σ-алгебр и при каждом $i\in I$ выполнено включение $K_i\circ\psi\subseteq C_i$, тогда набор $(\widetilde{\varphi}_1,\ldots,\widetilde{\varphi}_n,\widetilde{\psi})$, состоящий из продолжений отображений $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\psi$ на множества вероятностных мер, будет гомоморфизмом смешанного расширения игры G в смешанное расширение игры H. В частности, для конусов, состоящих из *всех* изотонных отображений соответствующих упорядоченных множеств, включение $K_i^0\circ\psi\subseteq C_i^0$ выполнено всегда. Поэтому всякий гомоморфизм игр с упорядоченными исходами продолжается на их смешанные расширения, если в качестве продолжений отношений порядка на множества вероятностных мер рассматривать их канонические продолжения.

На базе понятия гомоморфизма решается задача описания оптимальных решений смешанного расширения игры с упорядоченными исходами, где оптимальность понимается в смысле равновесия.

Рассмотрим игру с упорядоченными исходами $G = \langle (X_i)_{i\in I},\ A,\ (\omega_i)_{i\in I}, F\rangle$, и пусть C_i — конус ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A,\omega_i\rangle$ в R, аппроксимирующий отношение $\omega_i (i\in I)$. Рассмотрим смешанное расширение $\widetilde{G}_{(C_1,\ldots,C_n)}$ игры G с помощью набора конусов $(C_1,\ldots,C_n)$.

Ситуация $\mu\in\prod\limits_{i\in I}\widetilde{X}_i$ будет *ситуацией равновесия* в игре $\widetilde{G}_{(C_1,\ldots,C_n)}$, если вероятностная мера F_μ является максимальным элементом подмножества вероятностных мер $F_{\mu'}$, где $\mu' = \{(\mu_1,\ldots,\mu_i',\ldots,\mu_n) : \mu_i'\in\widetilde{X}_i\}$, относительно квазипорядка $\omega_i^{C_i}$.

Предположим, что G — конечная игра с упорядоченными исходами и при каждом $i\in I$ конус C_i является конечно-порожденным. Пусть $\{\lambda_1^i,\ldots,\lambda_m^i\}$ — множество образующих конуса C_i. С каждым набором чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ связана игра с функциями выигрыша того же множества игроков

$$G_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} = \langle (X_i)_{i\,\in\,I}, (f_i\circ F)_{i\in I}\rangle,$$

где $f_i = \alpha_1\lambda_1^i + \ldots + \alpha_m\lambda_m^i$.

С использованием теоремы 5 доказывается следующий результат.

Теорема 6. *Множество всех ситуаций равновесия игры $\widetilde{G}_{(C_1,\ldots,C_n)}$ совпадает с теоретико-множественным объединением множеств ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении игр с численными выигрышами вида $G_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)}$ по всем наборам положительных чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$.*

Для конечного упорядоченного множества $\langle A,\omega_i\rangle$ конус C_i^0 всех его изотонных отображений в R является конечно-порожденным, причем в качестве образующих этого конуса выступает набор характеристических функций его мажорантно стабильных подмножеств. В этом случае множество функций вида $f_i = \alpha_1\lambda_1^i + \ldots + \alpha_m\lambda_m^i$, где все $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ строго положительны, совпадает с множеством всех строго изотонных отображений из $\langle A, \omega_i\rangle$ в R. Поэтому как частный случай теоремы 6 получаем следующее описание множества ситуаций равновесия для смешанного расширения конечной игры с упорядоченными исходами, в котором в качестве продолжений отношений порядка игроков на множество вероятностных мер взяты их канонические продолжения.

Следствие. *Для конечной игры с упорядоченными исходами $G = \langle (X_i)_{i\in I}, A, (\omega_i)_{i\in I}, F\rangle$ множество ситуаций равновесия в ее смешанном расширении при помощи набора конусов $(C_1^0, \ldots, C_n^0)$ совпадает с теоретико-множественным объединением множеств ситуаций равновесия по Нэшу в смешанных расширениях игр с численными выигрышами вида $\langle (X_i)_{i\,\in\,I}, (f_i\circ F)_{i\in I}\rangle$, где при каждом $i \in I$ функция f_i пробегает всевозможные строго изотонные отображения упорядоченного множества $\langle A, \omega_i\rangle$ в R.*

4. РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

Пусть G — игра с упорядоченными исходами вида (1), $\widetilde{G}$ — ее смешанное расширение, в котором используется каноническое продолжение порядка на множество вероятностных мер. Через $\operatorname{Sp}\mu$ будем обозначать спектр меры μ, через δ_x — вероятностную меру, сосредоточенную в точке x, через $\widetilde{\omega}_i$ — каноническое продолжение порядка ω_i на множество вероятностных мер. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы ситуация в смешанных стратегиях была ситуацией равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры G.

Теорема 7. *Для того чтобы ситуация $\mu^0 \in \prod\limits_{i\in I}\widetilde{X}_i$ была ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $i \in I$ выполнялись следующие условия:*

$$(a)\quad F_{\mu^0\|\delta_{x_i'}} = F_{\mu^0} \quad \text{для} \quad x_i' \in \operatorname{Sp}\mu_i^0, \qquad\qquad (b)\quad F_{\mu^0\|\delta_{x_i''}} \leq^{\widetilde{\omega}_i} F_{\mu^0} \quad \text{для} \quad x_i'' \notin \operatorname{Sp}\mu_i^0.$$

Отметим, что условие (a) теоремы 7 формулируется на языке функции реализации F без привлечения отношений порядка ω_i, выражающих предпочтения игроков. Это обстоятельство накладывает сильные ограничения на спектры мер, образующих ситуацию равновесия по Нэшу в смешанном расширении игры G, и лежит в основе методов нахождения ситуаций равновесия по Нэшу для игр указанного класса.

Укажем теперь общий метод нахождения ситуаций равновесия по Нэшу в смешанном расширении конечной игры с упорядоченными исходами. Для упрощения записи будем рассматривать игру двух лиц

$$G = \langle X,\, Y,\, A,\, \omega_1,\, \omega_2,\, F\rangle, \tag{2}$$

где $X = \{1, \ldots, n\}$, $Y = \{1, \ldots, m\}$. Смешанное расширение игры (2) есть игра

$$\tilde{G} = \langle \widetilde{X},\, \widetilde{Y},\, \widetilde{A},\, \widetilde{\omega}_1,\, \widetilde{\omega}_2,\, \widetilde{F}\rangle, \tag{3}$$

в которой $\widetilde{X} = S_n$, $\widetilde{Y} = S_m$ — стандартные симплексы соответствующих размерностей, $\widetilde{\omega}_k$ — каноническое продолжение порядка ω_k $(k = 1,\, 2)$ на $\widetilde{A}$, функция реализации $\widetilde{F}$ задается равенством

$$\widetilde{F}_{(x,\,y)}(a) = \sum_{F(i,\,j)=a} x_i y_j.$$

Определение. Матрица $\| F(i,\,j) \|$ формата $n\times m$ над множеством A называется *сбалансированной*, если существует такая пара векторов $x \in S_n$, $y \in S_m$ с положительными компонентами, что при любом $a \in A$ и любых $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ выполнено $\widetilde{F}_{(i,\,y)}(a) = \widetilde{F}_{(x,\,j)}(a)$. При этом пара $(x,\, y)$ называется *балансовой парой* векторов данной матрицы.

Теорема 8. 1. *Пусть $(x^0,\, y^0) \in S_n\times S_m$ — ситуация равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$. Тогда подматрица, являющаяся ограничением матрицы $\| F(i,\,j) \|$ относительно пары спектров $(\operatorname{Sp}x^0,\, \operatorname{Sp}y^0)$, является сбалансированной.*

2. *Пусть $\| F(i,\,j) \|$ $(i \in N_1,\, j \in N_2)$ — сбалансированная подматрица матрицы функции реализации и $(x_i^0)_{i\in N_1}$, $(y_j^0)_{j\in N_2}$ — ее балансовая пара векторов. Рассмотрим вероятностные*

векторы x^0 и y^0, которые получаются из указанных балансовых векторов добавлением нулевых компонент для тех индексов, которые отсутствуют в N_1 и N_2 соответственно. Для того, чтобы (x^0, y^0) была ситуацией равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$ вида (3)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие дополнительные условия:*

$$\widetilde{F}_{(i',\, y^0)} \leq^{\widetilde{\omega}_1} \widetilde{F}_{(x^0,\, y^0)} \quad \text{для всех} \quad i' \notin N_1, \tag{4}$$

$$\widetilde{F}_{(x^0,\, j')} \leq^{\widetilde{\omega}_2} \widetilde{F}_{(x^0,\, y^0)} \quad \text{для всех} \quad j' \notin N_2. \tag{5}$$

Таким образом, нахождение ситуаций равновесия по Нэшу в игре $\widetilde{G}$ сводится к нахождению сбалансированных подматриц матрицы функции реализации и проверке для ее балансовых векторов дополнительных условий (4), (5). Отметим, что условие сбалансированности матрицы сводится к положительной разрешимости некоторой системы линейных уравнений, а проверка дополнительных условий (4), (5) состоит, в силу теоремы 4, в выполнимости некоторой системы линейных неравенств.

Библиографический список

1. *Розен В.В.* Об упорядоченности множества вероятностных мер // Изв. вузов. Сер. Математика. 1988. № 11. С. 72–74.
2. *Розен В.В.* Ситуации равновесия в играх с упорядоченными исходами // Кибернетика. 1989. № 6. С. 98–104.
3. *Розен В.В.* О мерах на упорядоченных множествах // Теория полугрупп и ее приложения: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1993. Вып. 11. С. 35–39.
4. *Розен В.В.* Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные линейные пространства // Изв. вузов. Сер. Математика. 1998. №7 (434).
5. *Розен В.В.* Математические модели принятия решений на основе частичной упорядоченности исходов // Таврический вест. информатики и математики. 2004. № 1. С. 54–59.
6. *Розен В.В.* Продолжение упорядоченности на множество вероятностных мер // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5. С. 61–70.
7. *Розен В.В.* Упорядочение вероятностных мер // Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры: Тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию проф. В.В. Вагнера. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 52–59.

УДК 519.83

КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРАВАРИАНТНЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Т.Ф. Савина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: suri-cat@yandex.ru

Для игр с отношениями предпочтения мы рассматриваем в качестве принципов оптимальности равновесие по Нэшу, а также некоторые его модификации. Для описания оптимальных решений игр с отношениями предпочтения введены ковариантно и контравариантно полные семейства гомоморфизмов.

Ключевые слова: ситуация равновесия, равновесие по Нэшу, отношение предпочтения, гомоморфизм.

Covariant and Contrvariant Homomorphisms of Games with Preference Relations

T.F. Savina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: suri-cat@yandex.ru

We consider Nash equilibrium and some its modifications as principles of optimality for games with preference relations. For description of the optimal solutions of games with preference relations covariantly and contrvariantly complete families of homomorphisms are introduced.

Key words: equilibrium points, Nash equilibrium, preference relation, homomorphism.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе объектом изучения являются игры с отношениями предпочтения, т.е. трехосновные алгебраические системы вида

$$G = \langle X,\, Y,\, A,\, \rho_1,\, \rho_2,\, F\rangle,$$