## Литература

1. Бицадзе А. В. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 4. С. 749—752.
2. Borrelli R. // J. Math. and Mech. 1966. Vol. 1. P. 51—81.
3. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. // Мат. сб. 1969. Т. 78. С. 148—176.
4. Хёрмандер Л. // Псевдодифференциальные операторы. М., 1967. С. 297—367.
5. Мазья В. Г. // Мат. сб. 1972. Т. 87. С. 417—454.
6. Melin A., Sjostrand J. // Comm. in Partial Diff. Equat. 1976. Vol. 1. P. 313—400.
7. Winzell B. // Math. Scand. 1978. Vol. 43. P. 169—176.
8. Панеях Б. П. // Мат. сб. 1981. Т. 114, № 2. С. 226—268.
9. Алимов Ш. А. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1738—1751.
10. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М., 1984.
11. Хёрмандер Л. // Математика (сб. пер.). 1969. Т. 13, № 6. С. 114—137.
12. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.
13. Соболевский П. Е. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 804—807.



*Самаркандский государственный университет им. Алишера Навои*



*Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.*

*УДК 517.956.4*



Е. А. БАДЕРКО


# О «ПОЧТИ» МОДЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Рассматривается параболический оператор порядка $2m$ ($m$ — произвольное натуральное число) с вещественными постоянными коэффициентами

$$\mathscr{L} \equiv D_t + (-1)^m \sum_{|k|=2m} a_k D^k,$$

где $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j = D_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $D^k = D_1^{k_1} \cdots D_n^{k_n}$, причем $\mathscr{A}(\sigma) \equiv \sum\limits_{|k|=2m} a_k \sigma^k \geqslant \delta_0 |\sigma|^{2m}$, $\sigma \in R^n$, для некоторого $\delta_0 > 0$.

В слое $\Omega_T = R^n \times (0, T)$ ($T > 0$ фиксировано) выделяется полуограниченная область $\Omega_T^+ = \{(x, t) \in \Omega_T \mid x_n > X(t)\}$ с негладкой боковой границей $\Sigma_T = \{(x, t) \in \Omega_T \mid x_n = X(t)\}$, где $X$ — непрерывная на $[0, T]$ функция, удовлетворяющая условию Гёльдера:

$$[X]_{r, \alpha} \equiv \sup_{t,\, t+\Delta t \in (0, T)} \frac{|X(t+\Delta t) - X(t)|}{|\Delta t|^{1-(r+1-\alpha)/2m}} < +\infty, \quad \alpha \in (0, 1), \tag{0.1}$$

число $r$ указано ниже в (0.6).

Пусть $\Omega_T' = R^{n-1} \times (0, T)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $k' = (k_1, \ldots, k_{n-1})$, $\alpha \in (0, 1)$. Следуя [1, с. 705], через $H^{s+\alpha, (s+\alpha)/2m}(\overline{\Omega}_T')$ при $0 \leqslant s \leqslant 2m-1$ обозначаем класс функций $\psi$, непрерывных в $\overline{\Omega}_T'$ вместе со всеми производными $D^{k'}\psi$ при $|k'| \leqslant s$, и с конечной нормой

$$|\psi|^{(s+\alpha)}_{\Omega'_T} \equiv \sum_{0 \leqslant |k'| \leqslant s} \Big\{ \sup_{\Omega'_T} |D^{k'}\psi(x', t)| +$$

$$+ \sup_{(x', t),\, (x', t+\Delta t) \in \Omega'_T} \frac{|D^{k'}\psi(x', t+\Delta t) - D^{k'}\psi(x', t)|}{|\Delta t|^{(s-|k'|+\alpha)/2m}} \Big\} +$$

$$+\sum_{|k'|=s}\ \sup_{(x',t),\,(x'+\Delta x',t)\in\Omega'_T}\frac{|D^{k'}\psi(x'+\Delta x',t)-D^{k'}\psi(x',t)|}{|\Delta x'|^{\alpha}}.$$

Рассматриваются граничные операторы с вещественными постоянными коэффициентами

$$\mathscr{B}_j\equiv\mathscr{B}_j(D)\equiv\sum_{|k|=r_j}b_{jk}D^k,\ j=\overline{0,\ m-1},\ 0\leqslant r_0<\ldots<r_{m-1}\leqslant 2m-1,$$

удовлетворяющие условию дополнительности (см. [1, с. 700; 2, с. 355] или (1.12) настоящей работы).

Ставится задача отыскания классического решения уравнения

$$\mathscr{L}u=0\ \text{в}\ \Omega_T^+ \tag{0.2}$$

с начальным

$$u(x,\ 0)=0,\ x'\in R^{n-1},\ x_n\geqslant X(0), \tag{0.3}$$

и граничными условиями

$$\mathscr{B}_ju|_{\Sigma_T}=\psi_j,\ j=\overline{0,\ m-1},\ \text{в}\ \overline{\Omega}'_T, \tag{0.4}$$

где

$$\psi_j\in \underset{0}{H}^{2m-r_j-1+\alpha,\ 1-(r_j+1-\alpha)/2m}(\overline{\Omega}'_T),\ \ j=\overline{0,\ m-1}; \tag{0.5}$$

$\underset{0}{H}^{s+\alpha,\ (s+\alpha)/2m}(\overline{\Omega}'_T)$ — множество функций из $H^{s+\alpha,\ (s+\alpha)/2m}(\overline{\Omega}'_T)$, обращающихся в нуль при $t=0$; $\mathscr{B}_ju|_{\Sigma_T}$ — предельные значения $\mathscr{B}_ju$ на $\Sigma_T$, полученные предельным переходом «изнутри» $\Omega_T^+$. В условии (0.1) теперь полагаем

$$r=\min\{r_0,\ 2m-2\}. \tag{0.6}$$

Поставленная задача (0.2)—(0.4) имеет специальный характер: при $X\equiv0$ она превращается в хорошо известную модельную задачу (см. [1, с. 710; 2, с. 352; 3, с. 39], а в общем случае условия (0.1) ее можно рассматривать как «почти» модельную для перехода к решению задач в областях с негладкими боковыми границами. При этом негладкость боковой границы $\Sigma_T$ не позволяет воспользоваться методами, разработанными для цилиндрических областей.

Если $n=1$, $m\geqslant1$ [4—6] или $n\geqslant1$, $m=1$, $r_0=0$ [7], то решение задачи (0.2)—(0.4) при условиях (0.1), (0.5) известно; оно строится методом теории потенциала.

В общем случае также обратимся к этому методу, используя в качестве компонент векторного ядра потенциала фундаментальное решение (ф. р.) уравнения (0.2) и некоторые его интегральные преобразования. Для решения возникающей при этом системы интегральных уравнений вводим специальный интегро-дифференциальный оператор $\mathscr{E}$, играющий роль регуляризатора системы.

Пусть $\nu\in[0,\ 1)$, $(x,\ t)\in R^n\times R^+$, $R^+=(0,\ +\infty)$, и

$$Z_\nu(x,\ t)\equiv(2\pi)^{-n}\int_{R^n}(-i\sigma_n)^{-\nu}\exp\,(ix\sigma-A(\sigma)t)\,d\sigma; \tag{0.7}$$

под $\nu$-й степенью комплексного числа $z$ понимается ветвь $z^\nu=|z|^\nu\exp(i\nu\arg z)$, $-\pi<\arg z\leqslant\pi$. Полагаем

$$\nu_s = s\alpha/m,\ s=\overline{0,\ m-1},\ \alpha - \text{из } (0.1), \tag{0.8}$$
$$Z = (Z_{\nu_0}, \ldots, Z_{\nu_{m-1}}).$$

Будет доказана

Теорема. *При условиях (0.1), (0.5) для задачи (0.2)—(0.4) существует классическое решение u, непрерывное в* $\overline{\Omega}_T^+$, *имеющее вид обобщенного параболического потенциала*

$$u(x,\ t) = \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \varphi(\xi',\ \tau) Z((x'-\xi',\ x_n - X(\tau)),\ t-\tau) d\xi', \tag{0.9}$$

*где плотность* $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})$ *есть решение системы интегральных уравнений Вольтерра*:

$$\gamma_j \varphi_0(x',\ t) + \sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t d\tau \int_{R^{n-1}} \varphi_s(\xi',\ \tau) \mathscr{B}_j(D_x) Z_{\nu_s}((x'-\xi',\ X(t) -$$
$$-X(\tau)),\ t-\tau) d\xi' = \psi_j(x',\ t),\ (x',\ t) \in \overline{\Omega}_T',\ j=\overline{0,\ m-1}, \tag{0.10}$$

*где* $\gamma_j = 0$, *если* $j = \overline{0,\ m-2}$,

$$\gamma_{m-1} = \begin{cases} 0, & \text{если } r_{m-1} \leqslant 2m-2, \\ (-1)^m b_0 / 2a_0, & \text{если } r_{m-1} = 2m-1, \end{cases} \tag{0.11}$$
$$a_0 = a_{(0, \ldots, 0, 2m)},\ b_0 = b_{m-1\,(0, \ldots, 0, 2m-1)}.$$

В пп. 1 и 2 излагаются вспомогательные построения; в п. 3 проводится доказательство теоремы.

Всюду буквами $C$ и $c$ обозначаем положительные постоянные, конкретный вид которых нас не интересует, зависящие, быть может, от $\delta_0$, $T$, $n$, $m$, $\alpha$, $[X]_{r,\alpha}$ и от коэффициентов в (0.2), (0.4).

**1. Об условии дополнительности для граничных операторов.** Функция $Z_0$ из (0.7) есть ф. р. для уравнения (0.2) (см. [2, с. 44]), а для $Z_{\nu_s}$ при $s = \overline{1,\ m-1}$ справедлива формула

$$Z_{\nu_s}(x,\ t) = \Gamma^{-1}(\nu_s) \int_0^{+\infty} \lambda^{-1+\nu_s} Z_0((x',\ x_n + \lambda),\ t) d\lambda, \tag{1.1}$$

$(x,\ t) \in R^n \times R^+$, где $\Gamma(\nu_s)$ — гамма-функция Эйлера. Отсюда, учитывая оценки для ф. р., имеем

$$|D_t^N D^k Z_{\nu_s}(x,\ t)| \leqslant C_{N,k} t^{-(2mN+|k|+n-\nu_s)/2m} \exp(-C_{N,k} |x|^q t^{-q/2m}), \tag{1.2}$$

$(x',\ t) \in R^{n-1} \times R^+$, $x_n \geqslant 0$; $N$, $|k| \geqslant 0$, $s = \overline{0,\ m-1}$; $q = 2m/(2m-1)$ (оценки (1.2) верны и, если $x_n \geqslant -\varepsilon t^{1/2m}$, для произвольного $\varepsilon > 0$ с постоянными $C_{N,k}$, зависящими от $\varepsilon$).

Для $\sigma'$ и комплексных $p$, удовлетворяющих условию

$$\sigma' \in R^{n-1},\ \operatorname{Re} p \geqslant 0,\ |\sigma'| + |p| \neq 0, \tag{1.3}$$

рассмотрим систему функций

$$\tilde{Z}_{\nu_s}(x_n;\ \sigma',\ p) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\sigma_n)^{-\nu_s} [p + \mathscr{A}(\sigma)]^{-1} \exp(ix_n \sigma_n) d\sigma_n, \tag{1.4}$$

$x_n \geqslant 0$, $s = \overline{0,\ m-1}$, полученную из (0.7) преобразованиями Фурье по $x'$ и Лапласа по $t$.

Л е м м а 1. *Для любых* $\sigma'$, $p$, *удовлетворяющих* (1.3), *система* (1.4) *составляет базис в пространстве решений уравнения*

$$[p+\mathscr{A}(\sigma', -iD_n]v=0, \ x_n>0, \tag{1.5}$$

*для которых*

$$v\to 0 \ \textit{при} \ x_n\to+\infty. \tag{1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что $\tilde{Z}_{\nu_s}$ удовлетворяют (1.5) и (1.6), легко следует из (1.4) и (1.2).

Покажем, что эти функции линейно независимы. Предположим обратное. Тогда для некоторых $\sigma'$, $p$, удовлетворяющих (1.3), существуют постоянные $K_j$, $\sum\limits_{j=0}^{m-1} K_j^2 \neq 0$, такие, что

$$\sum_{j=0}^{m-1} K_j D_n^j \ Z_{\nu_s}(0; \sigma', p)=0, \ s=\overline{0, m-1}. \tag{1.7}$$

Положим

$$v(x_n)\equiv\sum_{j=0}^{m-1} K_j D_n^j \tilde{Z}_0(x_n; \sigma', p)$$

и докажем тождество

$$v(x_n)\equiv 0, \ x_n\geqslant 0, \tag{1.8}$$

противоречащее линейной независимости функций $D_n^j \tilde{Z}_0(x_n; \sigma', p)$, $j=\overline{0, m-1}$ [2, с. 360]. Пусть $z_l$, $l=\overline{1, L}$, различные $\sigma_n$ — корни кратности $h_l$ уравнения $p+\mathscr{A}(\sigma', -i\sigma_n)=0$ с отрицательной вещественной частью. Функция $v$, будучи решением (1.5), (1.6), представляется формулой

$$v(x_n)=\sum_{l=1}^{L} \exp(z_l x_n) \sum_{h=0}^{h_l-1} K_{l,h}^* x_n^h, \ x_n\geqslant 0, \tag{1.9}$$

$K_{l,h}^*$ — постоянные. Кроме того, в силу (1.1) и (1.7), $v$ удовлетворяет условиям

$$v(0)=0,$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{-1+\nu_s} v(\lambda)\,d\lambda=0, \ s=\overline{1, m-1}. \tag{1.10}$$

Подставляя (1.9) в (1.10), получаем однородную алгебраическую систему для определения коэффициентов $K_{l,h}^*$, определитель которой отличен от нуля, откуда и вытекает (1.8). Лемма доказана.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{js}(\sigma', p) &\equiv (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{B}_j(i\sigma)(-i\sigma_n)^{-\nu_s}[p+\mathscr{A}(\sigma)]^{-1}d\sigma_n, \ s=\overline{1, m-1}, \\ \tilde{F}_{j0}(\sigma', p) &\equiv \gamma_j+(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{B}_j'(i\sigma)[p+\mathscr{A}(\sigma)]^{-1}d\sigma_n, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $\gamma_j$ из (0.11), $\mathscr{B}_j'(i\sigma)\equiv\mathscr{B}_j(i\sigma)+im^{-1}\gamma_j\dfrac{\partial}{\partial\sigma_n}\mathscr{A}(\sigma)$.

В силу леммы 1 *условию дополнительности для задачи* (0.2)—(0.4) *может быть дана эквивалентная формулировка: для любых $\sigma'$, $p$, удовлетворяющих (1.3),*

$$\det\|\tilde F_{js}(\sigma', p)\|_{j,s=0}^{m-1}\neq 0, \tag{1.12}$$

*где $\tilde F_{js}$ заданы посредством (1.11).*

Заметим, что условие (1.12) в действительности не зависит от условия (0.1), так как $\alpha$, входящее через (0.8) в (1.11), может быть заменено любым фиксированным числом из интервала (0.1).

**2. Построение оператора** $\mathscr{E}$. В силу условия (1.12) для матрицы $\tilde F(\sigma', p)=\|\tilde F_{js}(\sigma', p)\|_{j,s=0}^{m-1}$ существует обратная $T(\sigma', p)=$ $=\|T_{sl}(\sigma', p)\|_{s,l=0}^{m-1}=\tilde F^{-1}(\sigma', p)$, элементы которой — аналитические функции по $\sigma'$ и $p$ в области $\sigma'\in R^{n-1}$, $\operatorname{Re} p>0$, и справедливы оценки

$$|T_{sl}(\sigma', p)|\leqslant C(|\sigma'|^2+|p|^{1/m})^{m-(r_l+1-\nu_s)/2};\ s,\ l=\overline{0,\ m-1}. \tag{2.1}$$

Через $R_{sl}$ обозначим результат последовательного применения обратных преобразований Лапласа и Фурье к функциям $\tilde R_{sl}(\sigma', p)\equiv$ $\equiv(\sigma'^{2m}+p)^{-2+r_l/2m}T_{sl}(\sigma', p)$, т. е.

$$R_{sl}(x',\ t)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^{n-1}}\exp(ix'\sigma')\,d\sigma'\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde R_{sl}(\sigma', p)\exp[(p_0+ip_1)t]\,dp_1,$$

$p_0>0$. $(x', t)\in R^{n-1}\times R^+$; $s,\ l=\overline{0,\ m-1}$. В силу оценок (2.1)

$$|D_t^N D^{k'}R_{sl}(x', t)|\leqslant C_{N,k'}t^{-(2mN+|k'|+n-2+\nu_s)/2m}\exp(-c_{N,k'}|x'|^q t^{-q/2m}), \tag{2.2}$$
$$(x', t)\in R^{n-1}\times R^+;\ N,\ |k'|\geqslant 0.$$

Пусть $\mathscr{M}$ — дифференциальный оператор вида $\mathscr{M}\equiv D_t+(-1)^m\times$ $\times\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}D_j^2\right)^m$ и $G$ — ф.р. уравнения $\mathscr{M}u=0$, т. е.

$$G(x', t)=(2\pi)^{-n+1}\int\limits_{R^{n-1}}\exp(ix'\sigma'-\sigma'^{2m}t)\,d\sigma',\quad (x', t)\in R^{n-1}\times R^+.$$

Полагаем $H_{sl}(x', t)\equiv\mathscr{M}R_{sl}(x', t)$, если $r_l=0$; $H_{sl}(x', t)\equiv\Gamma^{-1}(r_l/2m)\times$ $\times\mathscr{M}\int\limits_0^t(t-\tau)^{-1+r_l/2m}d\tau\int\limits_{R^{n-1}}G(x'-\xi', t-\tau)R_{sl}(\xi', \tau)\,d\xi'$, если $1\leqslant r_l\leqslant 2m-$ $-1$; $(x', t)\in R^{n-1}\times R^+$. Введенные функции используем дальше в качестве элементов матричного ядра

$$H(x', t)=\|H_{sl}(x', t)\|_{s,l=0}^{m-1} \tag{2.3}$$

регуляризатора $\mathscr{E}$ (см. ниже (2.8)). Они обладают свойствами:

1) $|D_t^N\ D^{k'}H_{sl}(x', t)|\leqslant t^{-1+r_l/2m}$ (правая часть (2.2)), (2.4)

$$(x', t)\in R^{n-1}\times R^+,\ N,\ |k'|\geqslant 0;$$

2) если

$$F_{js}(x', t)\equiv\mathscr{B}_j Z_{\nu_s}((x', 0),\ t),\ F(x', t)=\|F_{js}(x', t)\|_{j,s=0}^{m-1} \tag{2.5}$$

и

$$H^1=\left\|\begin{matrix} H_{0\,m-1} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ H_{m-1\,m-1} & 0 & \dots & 0\end{matrix}\right\|,\quad H^2=\left\|\begin{matrix} 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0\\ H_{00} & \dots & H_{0\,m-1}\end{matrix}\right\|,$$

то справедливы соотношения

$$\gamma_{m-1}H^1(x',t)+\int_0^t d\tau\int_{R^{n-1}} H(x'-\xi',t-\tau)F(\xi',\tau)d\xi'=$$

$$=\gamma_{m-1}H^2(x',t)+\int_0^t d\tau\int_{R^{n-1}} F(x'-\xi',t-\tau)H(\xi',\tau)d\xi'=IG(x',t),\qquad(2.6)$$

где $I$ — единичная матрица, $(x',t)\in R^{n-1}\times R^+$;

3) для любого $k'$ такого, что $|k'|\leqslant 2m-1$,

$$\int_{R^{n-1}}(x')^{k'}H_{sl}(x',t)dx'=h_{sl,k'}t^{-1+(r_l+1+|k'|-\nu_s)/2m},\qquad(2.7)$$

$t>0$, $s, l=\overline{0, m-1}$, $h_{sl,k'}$ — постоянные.

Введем интегро-дифференциальный оператор $\mathscr{E}$, действующий на функции $\psi=(\psi_0,\dots,\psi_{m-1})$, определенные в $\Omega'_T$, по правилу

$$(\mathscr{E}\psi)(x',t)\equiv\mathscr{M}\int_0^t d\eta\int_{R^{n-1}}H(x'-y',t-\eta)\psi(y',\eta)dy',\quad (x',t)\in\Omega'_T.\qquad(2.8)$$

Лемма 2. *Если $\psi$ из класса (0.5), то $\mathscr{E}_s\psi\in \overset{0}{H}{}^{\alpha-\nu_s,\,(\alpha-\nu_s)/2m}(\overline{\Omega}'_T)$, $s=\overline{0, m-1}$, где $\mathscr{E}_s\psi$ — компоненты вектора (2.8).*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\Psi_{sj}(x',t)\equiv\mathscr{M}\int_0^t d\eta\int_{R^{n-1}}H_{sj}(x'-y',t-\eta)\psi_j(y',\eta)dy',\quad s, j=\overline{0, m-1},$$

и докажем справедливость в $\overline{\Omega}'_T$ оценок

$$|\Psi_{sj}(x',t)|\leqslant C|\psi_j|^{(2m-r_j-1+\alpha)}_{T}t^{(\alpha-\nu_s)/2m},\qquad(2.9)$$

$$|\Psi_{sj}(x'+\Delta x',t)-\Psi_{sj}(x',t)|\leqslant C|\psi_j|^{(2m-r_j-1+\alpha)}_{\Omega'_T}|\Delta x'|^{\alpha-\nu_s},\qquad(2.10)$$

$$|\Psi_{sj}(x',t+\Delta t)-\Psi_{sj}(x',t)|\leqslant C|\psi_j|^{(2m-r_j-1+\alpha)}_{\Omega'_T}|\Delta t|^{(\alpha-\nu_s)/2m}.\qquad(2.11)$$

В самом деле, в силу (2.7) и (0.5) имеем

$$\Psi_{sj}(x',t)=\sum_{l=0}^{2m-r_j-1}t^{-1+(r_j+l+1-\nu_s)/2m}\sum_{|k'|=l}\bar{h}_{sj,k'}D^{k'}\psi_j(x',t)+$$

$$+\int_0^t d\eta\int_{R^{n-1}}\bar{H}_{sj}(x'-y',t-\eta)f_j(x',t;y',\eta)dy',\qquad(2.12)$$

где $\bar{h}_{sj,\,k'}$ — постоянные, $\bar{H}_{sj}(x', t) \equiv \mathscr{M} H_{sj}(x', t)$ и

$$f_j(x', t;\ y', \eta) \equiv \psi_j(y', \eta) - \sum_{l=0}^{2m-r_j-1} \frac{1}{l!} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i) D_i \right]^l \psi_j(x', t),$$

откуда, учитывая (2.4) и (0.5), получаем (2.9).

В силу (0.5) оценку (2.10) достаточно доказать для интеграла в (2.12), который обозначим через $E_{sj}(x', t)$. Считая $0 < (\Delta x')^{2m} < t$, полагаем

$$E_{sj}(x' + \Delta x', t) - E_{sj}(x', t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{1} \int\limits_{t-(\Delta x')^{2m}}^{t} d\eta \int\limits_{R^{n-1}} \bar{H}_{sj}(x' + i\Delta x' - y', t - \eta) f_j(x' + i\Delta x', t;\ y', \eta)\, dy' +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t-(\Delta x')^{2m}} d\eta \int\limits_{R^{n-1}} \Delta_{x'} [\bar{H}_{sj}(x' - y', t - \eta) f_j(x', t;\ y', \eta)]\, dy',$$

откуда, оценивая отдельно каждое слагаемое, получаем (2.10). Оценка (2.11) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим интегральный оператор $J$, действующий на функции $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})$, определенные в $\Omega'_T$, по правилу

$$(J\varphi)(x', t) \equiv \gamma_{m-1} \Phi^0(x', t) + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_{R^{n-1}} F(x' - y', t - \eta) \varphi(y', \eta)\, dy', \qquad (2.13)$$

где $\Phi^0 = (0, \ldots, 0, \varphi_0)$. Если

$$\varphi_s \in \overset{0}{H}{}^{\alpha - \nu_s,\ (\alpha - \nu_s)/2m}(\bar{\Omega}'_T), \quad s = \overline{0, m-1}, \qquad (2.14)$$

то компоненты вектора (2.13) принадлежат классу (0.5). Поэтому из (2.6) и леммы 2 получаем

Следствие. *Если $\varphi$ из класса (2.14) и $\psi$ из класса (0.5), то*

$$\mathscr{E} J\varphi \equiv \varphi \ \text{ и } \ J\mathscr{E}\psi \equiv \psi \ \text{ в } \ \bar{\Omega}'_T. \qquad (2.15)$$

**3. Доказательство теоремы.** Ищем решение поставленной задачи (0.2)—(0.4) в виде потенциала (0.9), предполагая, что плотность $\varphi$ из класса (2.14). Потенциал (0.9) непрерывен в $\bar{\Omega}^+_T$, удовлетворяет уравнению (0.2) и начальному условию (0.3). Из граничных условий (0.4) для неизвестной $\varphi$ получаем систему интегральных уравнений (0.10). Пусть $V_{js}(x', t, \tau) \equiv \mathscr{B}_j Z_{\nu_s}((x', X(t) - X(\tau)), t - \tau) - \mathscr{B}_j Z_{\nu_s}((x', 0), t - \tau)$ и $V \equiv \| V_{js} \|_{j,\, s=0}^{m-1}$. Систему (0.10) (см. (2.13)) можно переписать в виде

$$(J\varphi)(x', t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} V(x' - \xi', t, \tau) \varphi(\xi', \tau)\, d\xi' = \psi(x', t). \qquad (3.1)$$

В силу условий (0.1) и (0.5) обе части (3.1) принадлежат классу (0.5). Применяя к ним оператор $\mathscr{E}$ из (2.8), получаем на основании (2.15) эквивалентную (3.1) систему уравнений Вольтерра второго рода

$$\varphi(x', t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^{n-1}} K(x', t;\ \xi', \tau) \varphi(\xi', \tau)\, d\xi' = \Psi(x', t), \qquad (3.2)$$

$$(x', t) \in \bar{\Omega}'_T, \text{ где } K(x', t; \xi', \tau) \equiv$$

$$\equiv \mathcal{M}_{x', t} \int_{\tau}^{t} d\eta \int_{R^{n-1}} H(x'-y', t-\eta) V(y'-\xi', \eta, \tau) dy', \ \Psi(x', t) \equiv (\mathscr{E}\psi)(x', t).$$

Элементы ядра $K$ имеют слабую особенность: $|K_{sl}(x', t; \xi', \tau)| \leqslant \leqslant C(t-\tau)^{-1-(n-1-\alpha+\nu_s)/2m} \exp(-c|x'-\xi'|^q (t-\tau)^{-q/2m})$, поэтому решение системы (3.2) может быть найдено методом последовательных приближений, и, используя лемму 2, можно проверить, что это решение принадлежит классу (2.14). Подставляя его в потенциал (0.9), получаем окончательно утверждение теоремы.

Автор признателен А. В. Бицадзе и В. А. Ильину за полезные обсуждения.

## Литература


1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
2. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., 1964.
3. Солонников В. А. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83, № 3. С. 3—162.
4. Gevrey M. // J. math. pures et appl. 1913. Vol. 9, N 1—4. P. 305—471.
5. Камынин Л. И. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 3. С. 1015—1025.
6. Бадерко Е. А. // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 10. С. 1781—1792.
7. Бадерко Е. А. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 1. С. 11—13.


*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

*Поступила в редакцию 3 июля 1986 г.*

*УДК 517.954*

К. Б. БАЙКУЗИЕВ

# ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $H$ — сепарабельное гильбертово пространство, $L$ — положительный самосопряженный оператор в $H$ с дискретным спектром.

Рассмотрим на отрезке $(0, T)$ систему уравнений

$$\begin{aligned} u''(t) - (Lu)(t) &= \mu_1 u(t) - \mu_2 v(t), \\ v''(t) + (Lv)(t) &= \mu_2 u(t) + \mu_1 v(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

со следующими условиями на концах отрезка:

$$u(0) = \varphi, \ v(0) = g, \ u(T) = \psi, \ v'(0) = f, \tag{1.2}$$

где $\varphi, g, \psi, f \in H$.

Пусть $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $H$, $D(A)$ — область определения оператора $A$.

Абстрактные функции $u(t)$, $v(t) \in C((0, T); H)$ назовем слабым решением задачи (1.1), (1.2), если для любого $h \in D(L)$ функции $p(t) = (u(t), h)$, $q(t) = (v(t), h)$ принадлежат классу $C^2[0, T]$ и удовлетворяют следующим равенствам:

$$\begin{aligned} p''(t) - (u(t), Lh) &= \mu_1 p(t) - \mu_2 q(t), \\ q''(t) + (v(t), Lh) &= \mu_2 p(t) + \mu_1 q(t) \end{aligned} \tag{1.3}$$