Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, О квазилинейной стационарной задаче Вентцеля, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1995, том 221, 20–29

Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров

О КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕНТЦЕЛЯ

УЧИТЕЛЮ

Рассматривается краевая задача

$$-a^{ij}(x;u;Du)D_iD_ju = a(x;u;Du) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$-\alpha^{ij}(x;u;\delta u)\delta_i\delta_j u = \alpha(x;u;Du) \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2}$$

где Ω – ограниченная область в $\mathfrak{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$; D_i – оператор дифференцирования по переменной x_i, $Du = (D_1u, \dots, D_{n-1}u, D_nu) = (D'u, D_nu)$;
δ_i – касательный дифференциальный оператор на $\partial\Omega$, т.е.

$$\delta_i = D_i - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_jD_j,$$

$(\mathbf{n}(x) = (\mathbf{n}_i(x))$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x)$; $\delta u = (\delta_i u)$ – проекция Du на касательную к $\partial\Omega$ плоскость.

Отметим, что (2) не является автономным уравнением на $\partial\Omega$, т.к. оно содержит не только касательную, но и нормальную составляющую Du.

Задача (1)–(2) была впервые (в линейном варианте) поставлена А. Д. Вентцелем ([1]) и исследовалась Я. Луо и Н. Трудингером ([2–5]). Отметим также, что общая линейная H^k-теория для эллиптических систем уравнений, связанных на многообразиях различных размерностей (частным случаем которых является задача Вентцеля) изложена в работе [6].

Будем считать, что уравнение (1) является равномерно эллиптическим, т.е.

$$\forall\, x \in \Omega, \quad z \in \mathfrak{R}^1, \quad p \in \mathfrak{R}^n$$

$$(a^{ij}) \text{ – симметричная матрица;}$$

(A0) $\quad \nu|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x;z;p)\xi_i\xi_j \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathfrak{R}^n, \quad \nu = \text{const} > 0;$

и выполняются следующие естественные структурные ограничения:

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант No. 93-011-1696.

$$\forall\, x \in \Omega, \quad z \in \mathfrak{R}^1, \quad p \in \mathfrak{R}^n$$

(A1) $|a(x;z;p)| \leqslant \mu_1 \mid p \mid^2 + b(x)|p| + \Phi_1(x)$, $\mu_1 = \text{const} > 0$;

(A2) функции $a^{ij}(x;z;p)$ имеют производные первого порядка по всем своим аргументам;

(A3) $\left|\frac{\partial a^{ij}(x;z;p)}{\partial p_r}\right|(1+|p|) \leqslant \mu_2$ при $|p| \geqslant 1$, $\mu_2 = \text{const} > 0$;

(A4) $\left|\frac{\partial a^{ij}(x;z;p)}{\partial z}p_r + \frac{\partial a^{ij}(x;z;p)}{\partial x_r}\right| \leqslant \mu_3|p| + \Phi_2(x)$, $\mu_3 = \text{const} > 0$;

(A5) функции b, Φ_1, Φ_2 принадлежат $L_q(\Omega)$, $q > n$;

Далее, предположим, что граничное условие (2) является равномерно-эллиптическим условием Вентцеля, т.е.

$$\forall\, x \in \partial\Omega, \quad z \in \mathfrak{R}^1, \quad p \in \mathfrak{R}^n$$

(B) функция $\alpha(x;z;p)$ дифференцируема по переменным p_i и

$$0 \leqslant -\alpha_{p_i}(x;z;p)\mathbf{n}_i(x) \leqslant \beta(x);$$

при $p \perp \mathbf{n}(x)$

$$(\alpha^{ij}) \text{ – симметричная матрица;}$$

(B0) $\nu_1|\xi|^2 \leqslant \alpha^{ij}(x;z;p)\xi_i\xi_j \leqslant \nu_1^{-1}|\xi|^2 \ \forall\, \xi \in \mathfrak{R}^n$, $\xi \perp \mathbf{n}(x)$, $\nu_1 = \text{const} > 0$;

а также выполнен ряд естественных структурных ограничений:

$$\forall\, x \in \partial\Omega, \quad z \in \mathfrak{R}^1, \quad p \in \mathfrak{R}^n, \quad p \perp \mathbf{n}(x)$$

(B1) $|\alpha(x;z;p)| \leqslant \pi_1 \mid p \mid^2 + \beta(x) \mid p \mid + \Theta_1(x)$, $\pi_1 = \text{const} > 0$;

(B2) функции $\alpha^{ij}(x;z;p)$ имеют производные первого порядка по всем своим аргументам;

(B3) $\left|\frac{\partial \alpha^{ij}(x;z;p)}{\partial p_r}\right|(1+|p|) \leqslant \pi_2$ при $|p| \geqslant 1$, $\pi_2 = \text{const} > 0$;

(B4) $\left|\frac{\partial \alpha^{ij}(x;z;p)}{\partial z}p_r + \frac{\partial \alpha^{ij}(x;z;p)}{\partial x_r}\right| \leqslant \pi_3|p| + \Theta_2(x)$, $\pi_3 = \text{const} > 0$;

(B5) функции β, Θ_1, Θ_2 принадлежат $L_{q-1}(\partial\Omega)$;

Заметим, что в работе [2] задача (1)–(2) исследуется при существенно более сильных ограничениях: от правых частей (1)–(2) требуется дифференцируемость по всем переменным, функция $\alpha(x;z;p)$ предполагается невырождающейся по нормальной компоненте градиента и имеет лишь линейный рост по p.

В настоящей статье мы используем следующие обозначения: Ω^+ – часть Ω, лежащая в полупространстве $x_n > 0$. $\Gamma(\Omega^+)$ – часть $\partial\Omega$, расположенная в гиперплоскости $x_n = 0$.

$$B_r(x^0) = \{x \in \mathfrak{R}^n : |x - x^0| < R\} - \text{шар в } \mathfrak{R}^n,$$
$$B_R = B_R(0), \quad \Gamma_R = \Gamma(B_R^+).$$

Всюду в работе индексы i, j изменяются от 1 до n, а индексы k, m – от 1 до $n-1$. По повторяющимся индексам везде предполагается суммирование.

Обозначим через $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ норму в $L_p(\Omega)$.

$W_p^2(\Omega)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} = \|D(Du)\|_{p,\Omega} + \|u\|_{p,\Omega},$$

аналогично, $W_p^2(\partial\Omega)$ – пространство с нормой

$$\|u\|_{W_p^2(\partial\Omega)} = \|\delta(\delta u)\|_{p,\partial\Omega} + \|u\|_{p,\partial\Omega},$$
$$V_p(\Omega) = W_p^2(\Omega) \cap W_{p-1}^2(\partial\Omega),$$
$$\|u\|_{V_p(\Omega)} = \|u\|_{W_p^2(\Omega)} + \|u\|_{W_{p-1}^2(\partial\Omega)}.$$

$C(\overline{\Omega})$ – пространство непрерывных функций. Через $\|\cdot\|_\Omega$ обозначается норма $C(\overline{\Omega})$.

$C^\gamma(\overline{\Omega})$, $C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})$ $(0 < \gamma < 1)$ – пространства Гельдера с нормами

$$\|u\|_{C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_\Omega + [u]_{\gamma,\Omega},$$
$$\|u\|_{C^{2+\gamma}(\overline{\Omega})} = \|u\|_\Omega + \|D(Du)\|_\Omega + [D(Du)]_{\gamma,\Omega},$$

(здесь $[\cdot]_{\gamma,\Omega}$ – константа Гельдера с показателем γ).

$$\operatorname*{osc}_\Omega g = \sup_\Omega g - \inf_\Omega g.$$
$$\sigma = 1 - \frac{n}{q}, \quad \sigma_1 = 1 - \frac{n-1}{q-1}.$$

Различные постоянные обозначаются через M, N, C с индексами или без. Запись $N(\ldots)$ означает, что N зависит только от параметров, указанных в скобках.

Изучение задачи (1)–(2) мы начнем с получения априорной оценки градиента решения.

Теорема. *Пусть $\partial\Omega \in W_q^2$, функция $u \in V_q(\Omega)$ – решение задачи* (1)–(2),

$$\|u\|_\Omega \leqslant M_0.$$

Предположим также, что при $|z| \leqslant M_0$ *выполнены условия* (A0)–(A5), (B), (B0)–(B5).

Тогда

$$\|Du\|_\Omega \leqslant C_1, \quad [Du]_{\gamma,\Omega} \leqslant C_2, \quad \|u\|_{V_q(\Omega)} \leqslant C_3, \tag{3}$$

где константы $\gamma \in]0;1[$, $C_1 - C_3$ *зависят от* ν, ν_1, q, $\mu_1 - \mu_3$, $\pi_1 - \pi_3$, $\|\beta\|_{q-1,\partial\Omega}$, $\|\Phi_h\|_{q,\Omega}$, $\|\Theta_h\|_{q-1,\partial\Omega}$, $(h = 1,2)$, M_0 *и свойств* $\partial\Omega$.

Доказательство. Рассмотрим граничное условие (2) как автономное уравнение на $\partial\Omega$, переписав его в виде:

$$-\alpha^{ij}(x;u;\delta u)\delta_i\delta_j u = \widehat{\alpha}(x;u;\delta u). \tag{4}$$

Здесь

$$\widehat{\alpha}(x;u;\delta u) = \alpha(x;u;\delta u) + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\int_0^1 \alpha_{p_i}\left(x;u;\delta u + \tau\mathbf{n}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathbf{n}_i d\tau, \tag{5}$$

$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ – производная от u по нормали.

В силу соотношений (B) и (5) условие (B1) примет вид:

(B1$'$) $\quad \left|\widehat{\alpha}^{ij}(x;z;p)\right| \leqslant \pi_1|p|^2 + \beta(x)|p| + \widehat{\Theta}_1(x)$,

где $\widehat{\Theta}_1(x) = \Theta_1(x) + \beta(x)\max\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|$.

Выберем $x^0 \in \partial\Omega$ так, чтобы $\max\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x^0)\right|$ и распрямим границу $\partial\Omega$ в окрестности точки x^0. При этом все структурные условия сохраняются, а "новые" константы, входящие в эти условия будут определяться лишь "старыми" постоянными и свойствами $\partial\Omega$. В связи с этим мы будем сохранять в новых координатах прежние обозначения. Аналогично,

$$\max_{\Gamma_R}\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right| = \max_{\Gamma_R}|D_n u| \leqslant N_0|D_n u(0)|,$$

где N_0 зависит только от свойств $\partial\Omega$. Радиус R окрестности, в которой производится распрямление также определяется только свойствами $\partial\Omega$.

Далее, возьмем $r < R$ и произведем покоординатное растяжение B_r^+ в $\frac{1}{r}$ раз по всем переменным. Тогда B_r^+ превратится в B_1^+ и в "растянутой " системе координат задача (1), (4) примет вид

$$-\widetilde{a}^{ij}(x;u_{(r)};Du_{(r)})D_iD_ju_{(r)} = \widetilde{a}(x;u_{(r)};Du_{(r)}) \quad \text{в} \quad B_1^+, \tag{6}$$

$$-\widetilde{\alpha}^{km}(x;u_{(r)};D'u_{(r)})D_kD_mu_{(r)} = \widetilde{\alpha}(x;u_{(r)};D'u_{(r)}) \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{7}$$

(здесь использованы обозначения

$$u_{(r)}(x) = u(rx), \quad \widetilde{a}^{ij}(x;z;p) = a^{ij}\left(rx;z;\frac{p}{r}\right) \quad \text{и т.д.,}$$

$$\widetilde{\alpha}(x;z;p) = \widehat{\alpha}\left(rx;z;\frac{p}{r}\right)).$$

Легко видеть, что константы ν, ν_1, $\mu_1-\mu_3$, $\pi_1-\pi_3$ в структурных ограничениях при растяжении сохранятся, а функции из правых частей (A1), (A4), (B1′), (B4) изменятся следующим образом:

$$\widetilde{b}(x) = rb(rx), \quad \widetilde{\Phi}_1(x) = r^2\Phi_1(rx), \widetilde{\Phi}_2(x) = r\Phi_2(rx),$$

$$\widetilde{\beta}(x) = r\beta(rx), \quad \widetilde{\Theta}_2(x) = r\Theta_2(rx); \tag{8}$$

$$\widetilde{\Theta}_1(x) = r^2\Theta_1(rx) + r\beta(rx)N_0\left|D_n u_{(r)}(0)\right|. \tag{9}$$

Применим к граничному уравнению (7) теорему 4.1 [7] с параметрами $\rho = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Получим

$$\max_{\Gamma_{\frac{1}{2}}} \left|D' u_{(r)}\right| \leqslant N_1,$$

где $N_1 = N_1\left(n, \nu_1^{-1}, \pi_1-\pi_3, \|\widetilde{\beta}\|_{q-1,\Gamma_1}, \|\widetilde{\Theta}_1\|_{q-1,\Gamma_1}, \|\widetilde{\Theta}_2\|_{q-1,\Gamma_1}, \sigma_1^{-1}, M_0\right)$

есть возрастающая функция своих аргументов.

Теперь условия (B1′), (B4) можно переписать так:

$$\left|\widetilde{\alpha}\left(x; u_{(r)}; D' u_{(r)}\right)\right| \leqslant \Psi_1(x) \equiv \pi_1 N_1^2 + \widetilde{\beta}(x) N_1 + \widetilde{\Theta}_1(x),$$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{\alpha}^{km}(x;z;p)}{\partial z}\right|, \quad \left|\frac{\partial \widetilde{\alpha}^{km}(x;z;p)}{\partial x_k}\right| \leqslant \Psi_2(x) \equiv \pi_3 N_1 + \widetilde{\Theta}_2(x).$$

Теорема 4.3 [7] с параметрами $\rho = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ дает оценку

$$\left[D' u_{(r)}\right]_{\gamma_1, \Gamma_{\frac{1}{4}}} \leqslant N_2,$$

где $\gamma_1 = \gamma_1\left(n, \nu_1^{-1}, \sigma_1^{-1}, \pi_2, N_1\right) \in \left]0;1\right[$ есть убывающая, а $N_2 = N_2\left(n, \nu_1^{-1}, \sigma_1^{-1}, \pi_2, N_1, \|\Psi_1\|_{q-1,\Gamma_{\frac{1}{2}}} \|\Psi_2\|_{q-1,\Gamma_{\frac{1}{2}}}\right)$ – возрастающая функция своих аргументов.

Воспользовавшись леммой 6.1 [8], продолжим функцию $u_{(r)}\big|_{\Gamma_{\frac{1}{4}}}$ в цилиндр $Q = \Gamma_{\frac{1}{8}} \times \left]0; \frac{1}{8}\right[$ (естественно, продолженаая функция $\widetilde{u}_{(r)}$, так же как $u_{(r)}$, не зависит от переменной t). Имеем

$$\left\|D\widetilde{u}_{(r)}\right\|_Q \leqslant N_3, \qquad \left|D\big(D\widetilde{u}_{(r)}\big)(x)\right| \leqslant N_3 \cdot (x_n)^{\gamma_1 - 1}, \tag{10}$$

где $N_3 = \widehat{N}(M_0 + N_1 + N_2)$, $\widehat{N}$ – абсолютная контанта.

Рассмотрим теперь уравнение (6). Из теоремы 2.1 [9] следует (см. также лемму 3.1 [8]), что если $B_\rho(x) \subset B_1^+$ и $\omega(\rho) = \operatorname*{osc}_{B_\rho(x)} u_{(r)} \leqslant \omega_0$, то

$$\left|Du_{(r)}(x)\right| \leqslant N_4 \cdot \left[\omega(\rho)\right]^\lambda \cdot \rho^{-1}, \tag{11}$$

где $\lambda = \lambda(n, \nu, q, \mu_2) > 0$

$$N_4 = N_4\left(n, \nu^{-1}, \sigma^{-1}, \mu_1 - \mu_3, \|\widetilde{b}\|_{q, B_1^+}, \|\widetilde{\Phi}_h\|_{q, B_1^+} \, (h = 1, 2)\right) -$$

возрастающая функция своих аргументов, а ω_0 – убывающая функция тех же аргументов.

Комбинируя (11) с оценкой константы Гельдера для решения задачи Вентцеля (теорема 1′ [10]), приходим к неравенству

$$\left|Du_{(r)}(x)\right| \leqslant N_5 \cdot \left(x_n\right)^{\gamma - 1}, \tag{12}$$

здесь $\gamma = \gamma(n, \nu, \nu_1, q, \mu_2) > 0$, а N_5 – возрастающая функция тех же аргументов , что и N_4, а также $\nu_1^{-1}, \pi_1, M_0, \|\widetilde{\Theta}_1\|_{q-1,\Gamma_1}$ и $\|\widetilde{\beta}\|_{q-1,\Gamma_1}$. Не умаляя общности можно считать $\gamma \leqslant \gamma_1$.

Теперь, аналогично рассуждению из теоремы 3.1 [8], соотношения (6), (A1) и (12) дают

$$\left|Lu_{(r)}\right| \equiv \left| -\widetilde{a}^{ij} D_i D_j u_{(r)} + \big(\widetilde{b}_1^i + \widetilde{b}_2^i\big) D_i u_{(r)}\right| \leqslant \widetilde{\Phi}_1(x) \quad \text{в} \quad B_1^+, \tag{13}$$

$$\text{где} \quad \left|\widetilde{b}_1^i(x)\right| \leqslant \widetilde{b}(x), \left|\widetilde{b}_2^i(x)\right| \leqslant \mu_1 \, N_5 \cdot \left(x_n\right)^{\gamma - 1}. \tag{14}$$

Положим $v(x) = u_{(r)}(x) - \widetilde{u}_{(r)}(x)$. Очевидно, что $v\big|_{\Gamma_1} = 0$. Далее, из (13), (10), (14), (A0) получаем

$$\left|Lv\right| \leqslant \widetilde{\Psi}(x) + H \cdot (x_n)^{\gamma - 1} \quad \text{в} \quad Q, \tag{15}$$

$$\widetilde{\Psi} \in L_q(Q), \qquad \|\Psi\|_{q,Q} \leqslant \|\widetilde{\Phi}_1\|_{q,Q} + N_3 \|\widetilde{b}\|_{q,Q},$$

$$H = N_3\big(\nu^{-1} + \mu_1 N_5\big). \tag{16}$$

Неравенства (14)–(16) показывают, что к функции v применима теорема 3.1’ [11] (точнее, ее локальный вариант). Поэтому

$$\left|Dv(0)\right| \leqslant N_6\left[1 + \|\widetilde{\Psi}\|_{q,Q} + H\right], \tag{17}$$

где $N_6 = N_6\big(n, \nu^{-1}, \gamma^{-1}, \sigma^{-1}, \mu_1 \cdot N_5, M_0, \|\widetilde{b}\|_{q,\mathcal{Q}}\big)$ – возрастающая функция своих аргументов.

Учитывая первое из неравенств (10), имеем

$$\begin{aligned}\big|D_n u_{(r)}(0)\big| \leqslant \big|Du_{(r)}(0)\big| \leqslant \big|Dv(0)\big| + \big|D\widetilde{u}_{(r)}(0)\big| \leqslant \\ \leqslant N_3 + N_6\big[1 + \|\widetilde{\Psi}\|_{q,\mathcal{Q}} + H\big],\end{aligned} \tag{18}$$

Положим $M_1(r) = \big|D_n u_{(r)}(0)\big|$. Тогда, объединяя соотношения (18), (16), (8), (9), учитывая зависимость констант $N_1 - N_6$ от своих аргументов, а также очевидные неравенства

$$\|f(rx)\|_{q,B_1^+} = r^{-\frac{n}{q}} \|f(x)\|_{q,B_r^+},$$

$$\|\varphi(rx)\|_{q-1,\Gamma_1} = r^{-\frac{n-1}{q-1}} \|\varphi(x)\|_{q-1,\Gamma_r},$$

мы получим

$$M_1(r) \leqslant F\big(r, r^{\sigma_1} \cdot M_1(r)\big), \tag{19}$$

где F – возрастающая функция своих аргументов, определяемая величинами, приведенными в условии теоремы.

Обозначим $F_1(t) = \max\{t; F(R,t)\}$. Тогда для $r \leqslant r_0 \equiv [F_1(1)]^{-\frac{1}{\sigma_1}}$ неравенство (19) не может выполняться при $M_1(r) = r^{-\sigma_1}$. Отсюда

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x^0)\right| = \frac{M_1(r)}{r} \leqslant r_0^{-\sigma_1 - 1}.$$

После того как получена оценка $\max\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x^0)\right|$, граничное уравнение (2) становится полностью автономным. Применив к нему теорему 4.1 [7], мы получим оценку $\|\delta u\|_{\partial\Omega}$, затем из теоремы 4.3 [7] – оценку $[\delta u]_{\gamma_1,\partial\Omega}$ и, наконец, из теоремы 5.1 [7] – оценку $\|u\|_{W^2_{q-1}(\partial\Omega)}$. Далее, аналогично теореме 6.1 [8], продолжим функцию $u\big|_{\partial\Omega}$ в область Ω так, чтобы

$$\|(\Pi u)\|_{W^2_q(\Omega)} \leqslant C\big(n, q, \partial\Omega\big) \|u\|_{W^2_{q-1}(\partial\Omega)},$$

где Π – оператор продолжения.

Функция $(u - \Pi u)$, очевидно, удовлетворяет неоднородному условию Дирихле на $\partial\Omega$. Поэтому к ней можно применить последовательно теоремы 3.1, 4.1, 4.3, 5.1 [7], которые вместе с оценками для Πu дадут требуемые неравенства (3). ■

Из теоремы 1 стандартным рассуждением, использующим принцип Лерэ–Шаудера и результаты о разрешимости линейной задачи Вентцеля (см. теорему 7 [2]) можно получить теоремы существования решения задачи (1)–(2), аналогичные соответствующим теоремам для задачи Дирихле (теоремы 7.1, 7.2 [7]).

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) $\partial\Omega \in W_q^2$, $q > n$;

б) *для всех возможных решений* $u(\cdot;\tau) \in V_q(\Omega)$ *задач*

$$\begin{gathered}(\tau-1)D_iD_iu - \tau a^{ij}(x;u;Du)D_iD_ju = \tau a(x;u;Du) \quad \text{в} \quad \Omega \\ (\tau-1)\delta_i\delta_iu - \tau\alpha^{ij}(x;u;\delta u)\delta_i\delta_ju = \\ = \tau\alpha(x;u;Du) + (\tau-1)u \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \\ \tau \in [0;1]\end{gathered} \tag{20}$$

справедлива оценка:

$$\|u(\cdot;\tau)\|_\Omega \leqslant M_0, \quad \forall\, \tau \in [0;1]; \tag{21}$$

в) *при* $|z| \leqslant M_0$ *выполнены условия* (A0)–(A5), (B), (B0)–(B5);

г) *при* $|z| \leqslant M_0$, $|p| \leqslant C_1$ (C_1 *– константа из теоремы* 1) *функции* $a(\cdot;z;p)$ *и* $\alpha(\cdot;z;p)$ *непрерывны по* $(z;p)$ *как элементы* $L_q(\Omega)$ *и* $L_{q-1}(\partial\Omega)$, *соответственно.*

Тогда задача (20) *имеет при любом* $\tau \in [0;1]$ *хотя бы одно решение* $\widehat{u}(\cdot;\tau) \in V_q(\Omega)$. *В частности,* $\widehat{u}(\cdot;1)$ *– решение задачи* (1)–(2).

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) $\partial\Omega \in C^{2+\widehat{\gamma}}$, $\widehat{\gamma} \in \,]0;1[$;

б) *для всех возможных решений* $u(\cdot;\tau) \in C^{2+\widehat{\gamma}}(\overline{\Omega})$ *задач* (20) *справедлива оценка* (21);

в) *при* $|z| \leqslant M_0$ *выполнены условия* (A0), (A2)–(A4), (B0), (B2)–(B4), *а также структурные условия:*

(A1′) $\forall\, x \in \Omega$, $p \in \mathfrak{R}^n$, $|a(x;z;p)| \leqslant \mu_1(1+|p|^2)$, $\mu_1 = \mathrm{const} > 0$;

(A5′) $\Phi_2 \in L_q(\Omega)$;

$$\forall\, x \in \partial\Omega, \quad p \in \mathfrak{R}^n$$

(B′) $0 \leqslant -\alpha_{p_i}(x;z;p)\mathbf{n}_i(x) \leqslant \pi_0$, $\pi_0 = \mathrm{const} > 0$;

(B1′) *если* $p \perp \mathbf{n}(x)$, *то*

$$|\alpha(x;z;p)| \leqslant \pi_1(1+|p|^2), \quad \pi_1 = \mathrm{const} > 0;$$

г) $a \in C^{\widehat{\gamma}}(\mathbf{m}_1)$, *где* $\mathbf{m}_1 = \{\overline{\Omega} \times [-M_0;M_0] \times B_{C_1}\}$;
$\alpha \in C^{\widehat{\gamma}}(\mathbf{m}_2)$, *где* $\mathbf{m}_2 = \{\partial\Omega \times [-M_0;M_0] \times B_{C_1}\}$.

Тогда задача (20) *имеет при любом* $\tau \in [0;1]$ *хотя бы одно решение* $\widehat{u}(\cdot;\tau) \in C^{2+\widehat{\gamma}_1}(\overline{\Omega})$, $\widehat{\gamma}_1 = \min\{\widehat{\gamma},\sigma,\sigma_1\}$. *Если* $\widehat{\gamma} > \widehat{\gamma}_1$ *и* $a^{ij} \in C^{\widehat{\gamma}}(\mathbf{m}_1)$, $\alpha^{ij} \in C^{\widehat{\gamma}}(\mathbf{m}_2)$, *то* $\widehat{u}(\cdot;\tau) \in C^{2+\widehat{\gamma}_1}(\overline{\Omega})$. *В частности,* $\widehat{u}(\cdot;1)$ *– решение задачи* (1)–(2).

Теоремы 2 и 3 носят условный характер: для их применения к конкретной задаче необходимо иметь априорную оценку $\|u\|_{\Omega}$. Такая оценка может быть получена при различных условиях. Приведем простейший пример (лемма 6 [2]):

Пусть $\partial\Omega \in C^{2+\hat{\gamma}}$, выполнены условия (A0), (B0), (B) и

$$D_z a(x;z;p),\ D_z \alpha(x;z;p) \leqslant -C_0, \quad C_0 = \text{const} > 0,$$

(не умаляя общности будем считать $C_0 \leqslant 1$).

Тогда для всех возможных решений $\hat{u}(\cdot;\tau) \in C^{2+\hat{\gamma}}(\overline{\Omega})$ задач (20) справедлива оценка (21) с

$$M_0 = \frac{\tau}{C_0}\left(\big\|a(\cdot;0;0)\big\|_{\Omega} + \big\|\alpha(\cdot;0;0)\big\|_{\partial\Omega}\right).$$

Литература

1. А. Д. Вентцель *О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов.* — Теория вероятностей и ее применения **4**, вып. **2** (1959), 172–185.
2. Y. Luo *On the quasilinear elliptic Venttsel boundary value problem.* — Nonlinear Analysis, Methods & Applications **16**, **No. 9** (1991), 761–769.
3. Y. Luo and N. S. Trudinger *Linear second order elliptic equations with Venttsel boundary conditions.* CMA–R1–90, (1990), — Research rep., Austral. nat. univ. Centre for math. analysis.
4. Y. Luo *An Aleksandrov–Bakel'man type maximum principle and applications.* CMA–R1–90, (1990), — Research rep., Austral. nat. univ. Centre for math. analysis.
5. Y. Luo and N. S. Trudinger *Quasilinear second order elliptic equations with Venttsel boundary condition.* CMA–R5–91, (1990), — Research rep., Austral. nat. univ. Centre for math. analysis.
6. S. Nazarov and K. Pileckas *On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier– Stokes equations.* — J. Reine Angew. Math. **438** (1993), 103–141.
7. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева *Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные возможности.* — УМН **41**, вып. **5(251)** (1986), 69–83.
8. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров *Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений.* — Алгебра и анализ **6** (1994), 1–29.
9. О. А. Ладыжеенская, Н. Н. Уральцева *Об оценках* $\max|u_x|$ *для решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида и теоремах существования.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **138** (1984), 90–107.
10. D. E. Apushkinskaya and A. I. Nazarov *Holder estimates for solutions of the initial-boundary value problems to parabolic equations of nondivergent form with Vent'cel boundary condition.* Advances in Soviet Math..
11. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров *Оценки на границе области градиента решения недивергентного параболического уравнения с "составной" правой*

частью и коэффициентами при младших производных. — Проблемы мат. анализа вып. 4 (1995).

Apushkinskaya D. E. , Nazarov A. I. On the quasilinear stationary Vent'cel boundary value problem.

A priori estimates for gradient of solutions of the boundary value problem for the quasilinear nondivergent elliptic equation with quasilinear Vent'cel boundary condition are established. By these estimates the existence theorems in Holder and Sobolev spaces are proved.

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступило 20 января 1995 г.

С.-Петербургский государственный
университет