Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 70—71.

УДК 519.4

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ КЛАССА ДВА С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

С. Д. Берман, Е. Ш. Керер

Известно, что все неприводимые комплексные представления конечной нильпотентной группы и все унитарные неприводимые представления связной нильпотентной группы Ли мономиальны (см. [1]). Другая ситуация возникает при изучении алгебраически неприводимых представлений нильпотентных групп. Согласно [2] каждая неабелева конечно порожденная нильпотентная группа без кручения обладает неприводимыми немономиальными комплексными представлениями. В настоящей заметке исследуются представления простейшей нильпотентной группы без кручения, изоморфной группе треугольных целочисленных матриц порядка 3. Эта группа G порождается двумя образующими b и c и задается соотношениями $b\,[b, c] = [b, c]\,b$, $c\,[b, c] = [b, c]\,c$.

Пусть KG — групповая алгебра группы G над полем комплексных чисел K. Все неприводимые K-представления группы G реализуются в фактор-модулях KG/I, где I — максимальный левый идеал KG (KG и I рассматриваются как KG-модули).

Каждое неприводимое K-представление Γ на центре (a) ($a = [b, c]$) группы G имеет вид $\Gamma(a) = \lambda E$, где $\lambda \in K$, E — единичная матрица. Отсюда вытекает, что изучение максимальных идеалов (здесь и в дальнейшем под идеалом следует понимать левый идеал) кольца KG сводится к изучению максимальных идеалов кольца R — скрещенной групповой алгебры прямого произведения свободных циклических групп $(b) \times (c)$, где система факторов определяется соотношением $c^{-1}bc = \lambda b$. Если λ — корень из 1, то соответствующее представление Γ группы G конечномерно и, следовательно, мономиально. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что λ не является корнем из 1. Элементы кольца R с точностью до обратимых множителей имеют вид

$$f_0 b^n + f_1 b^{n-1} + \ldots + f_n, \tag{1}$$

где $f_0, f_1, \ldots, f_n$ — полиномы от c.

Теорема 1. *Неприводимое представление группы G, соответствующее максимальному идеалу I кольца R, мономиально тогда и только тогда, когда для некоторых n и m идеал I содержит ненулевой комплексный полином от $b^n c^m$.*

В связи с теоремой 1 для изучения немономиальных представлений группы G можно ограничиться изучением идеалов кольца R, не содержащих полиномов от c.

Кольцо R содержит подкольцо R_1 — групповую алгебру группы (c) над полем K. Пусть T — поле отношений кольца R_1. Тогда кольцо R естественным образом погружается в кольцо S — скрещенное произведение поля T с группой (b), где $c^{-1}bc = \lambda b$. Кольцо S — некоммутативное кольцо главных идеалов. Для такого кольца развита теория разложения на множители, основанная на понятии подобия элементов (см. [3]). Максимальные идеалы кольца S порождаются неприводимыми (неразложимыми) элементами.

Пусть I — максимальный идеал кольца R, не содержащий полиномов от c. Будем называть минимальным элементом идеала I элемент $\varphi \in I$ вида (1), наименьшей степени по b. Элемент φ с точностью до обратимых множителей однозначно определен идеалом I. Идеал I кольца R совпадает с пересечением $R \cap (\varphi)_S$, где $(\varphi)_S$ — главный идеал кольца S, порожденный элементом φ. (Идеал $(\varphi)_S$ — максимальный идеал кольца S и элемент φ неприводим в S.) Тем самым, максимальный идеал кольца R, не содержащий полиномов от c, однозначно определяется своим минимальным элементом.

Идеалы I и J кольца R (S) будем называть эквивалентными, если фактор-кольца R/I и R/J (S/I и S/J) изоморфны как R (S)-модули, т. е. соответствующие представления эквивалентны.

Согласно [3] эквивалентность идеалов кольца S означает подобие порождающих их элементов.

Теорема 2. *Максимальные идеалы I и J кольца R, не содержащие полиномов от c, эквивалентны тогда и только тогда, когда их минимальные элементы подобны в S.*

Ниже дается классификация максимальных идеалов $I \subset R$ (и фактор-модулей R/I), содержащих двучлен по b.

Положим для полинома $g(c)$ $g^{(n)} = b^n g b^{-n}$.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»,
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

Теорема 3. *Пусть двучлен* $F = f_0 b^n + f_n \in R$. *Максимальный идеал* I, *содержащий этот двучлен и некоторый нетривиальный полином от* c (см. теорему 1), *существует тогда и только тогда, когда* $\exists m \geqslant 1$ $(f_0, f_n^{(mn)}) \neq 1$.

Теорема 4. *Пусть* $I = (f_0 b^n + f_n)$ — *главный идеал кольца* R *и* $\forall m \geqslant 1$ $(f_0, f_n^{(mn)}) = 1$ (см. теорему 3). *Тогда число максимальных идеалов кольца* R, *содержащих идеал* I, *делит* n *и равно* n/k, *где* k — *наименьшее натуральное число, такое, что множество всех корней полинома* $f_n f_0^{(k)} f_0^{(2k)} \ldots f_0^{(n-k)}$ (*или, что эквивалентно,* $f_0 f_n^{(k)} f_n^{(2)} \ldots \ldots f_n^{(n-k)}$) *распадается на непересекающиеся подмножества мощности* n/k, *в каждом из которых все корни либо нулевые, либо сравнимы между собой в мультипликативной группе поля* K *по модулю* λ^k *и попарно не сравнимы по модулю* λ^n. *Максимальные идеалы кольца* R, *содержащие идеал* I, *попарно не эквивалентны. Их минимальные элементы — также двучлены по* b.

Теорема 5. *Главный идеал* $I = (f_0 b^n + f_n)$ *кольца* R *максимален тогда и только тогда, когда элемент* $f_0 b^n + f_n$ *неприводим в* S *и* $\forall m, l \geqslant 0$ $(f_0^{(mn)}, f_n^{(ln)}) = 1$.

Теорема 6. *Два главных максимальных идеала* $I = (f_0 b^{n_1} + f_{n_1})$ *и* $J = (h_0 b^{n_2} + h_{n_2})$ *кольца* R *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $n_1 = n_2 = n$ *и найдется такое целое* $0 \leqslant l < n$, *что*

1) *ненулевые корни* $f_0^{(l)}$ *и* h_0 (*соответственно* $f_n^{(l)}$ *и* h_n) *находятся во взаимно однозначном соответствии, при котором соответствующие корни сравнимы по модулю* λ^n;

2) *если* α_0, α_n, β_0, β_n — *старшие коэффициенты соответственно* $f_0^{(l)}$, $f_n^{(l)}$, h_0, h_n, *то* $\alpha_0 \beta_n \equiv \alpha_n \beta_0 \pmod{\lambda^n}$.

Теорема 7. *Каждый максимальный идеал кольца* R, *содержащий двучлен* $f_0 b^n + f_n$, *где* $\forall m \geqslant 1$ $(f_0, f_n^{(mn)}) = 1$ (см. теорему 3), *эквивалентен главному максимальному идеалу* $(h_0 b^k + h_k)$.

Наибольшую трудность представляет доказательство теоремы 4, которую можно отнести к «некоммутативной алгебраической геометрии». Это доказательство основано на изучении неприводимых делителей двучленов в кольце S. При этом оказывается, что всякий неприводимый делитель двучлена $f_0 b^n + f_n$ $(f_0, f_n \in K[c])$ с точностью до обратимых множителей имеет вид $h_0 b^k + h_k$ $(h_0, h_k \in K[c])$, где k делит n, а h_0, h_k удовлетворяют уравнению

$$h_0 h_0^{(k)} h_0^{(2k)} \ldots h_0^{(n-k)} f_n = (-1)^{\frac{n}{k}} h_k h_k^{(k)} h_k^{(2k)} \ldots h_k^{(n-k)} f_0.$$

Харьковский институт радиоэлектроники

Поступило в редакцию 23 июля 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., «Наука», 1972. 2. Берман С. Д., Шарая В. В., Укр. матем. ж. 29, № 4 (1977), 435. 3. Кон П., Свободные кольца и их связи, М., «Мир», 1975.