1999. Т. 35, № 1. С. 128 — 130

УДК 517.983:517.986

ОПЕРАТОРНАЯ ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЮ ПОЛУГРУППЫ И МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

А. В. Глушак

1. В банаховом пространстве $\mathbb{E}$ рассматривается задача

$$u''(t)+(k/t)u'(t)=\mathbb{A}u(t),\quad t>0, \tag{1}$$

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=0, \tag{2}$$

с замкнутым плотно определенным оператором $\mathbb{A}$ $(\mathbb{A}=\mathbb{A}(k))$ и действительным параметром $k>0$.

Определение 1. Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, которая при $t>0$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, принимает значения, принадлежащие области определения $\mathbb{D}(\mathbb{A})$, и удовлетворяет этому уравнению.

Определение 2. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на $\mathbb{E}$, коммутирующая с $\mathbb{A}$ операторная функция $\mathbb{Y}_k(t)$ и числа $M\geq 1$, $\omega\geq 0$ такие, что для любого $u_0\in\mathbb{D}(\mathbb{A})$ функция $\mathbb{Y}_k(t)u_0$ является ее единственным решением и при этом

$$\|\mathbb{Y}_k(t)\|\leq M\exp(\omega t). \tag{3}$$

Функция $\mathbb{Y}_k(t)$ называется операторной функцией Бесселя, а множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерна корректна, обозначим через $\mathbb{G}_k$.

Как доказано в [1], задача (1), (2) будет равномерно корректной, если, например, оператор $\mathbb{A}$ является генератором операторной косинус-функции [1] (по поводу терминологии см. [2]). Операторная функция Бесселя играет для задачи (1), (2) такую же роль, как операторная косинус-функция для абстрактного волнового уравнения. Отметим также, что множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, шире множества генераторов операторной косинус-функции, т. е. $\mathbb{G}_0\subset\mathbb{G}_k$. Покажем теперь, как операторная функция Бесселя может быть использована при построении полугрупп и абстрактного аналога преобразования Гильберта.

Теорема 1. *Оператор $\mathbb{A}$, для которого задача (1), (2) равномерно корректна, является генератором полугруппы класса C_0 вида*

$$\mathbb{T}_k(t)u_0=2^{-k}\Gamma^{-1}((1+k)/2)t^{-(k+1)/2}\int\limits_0^\infty s^k\exp(-s^2/(4t))\mathbb{Y}_k(s)u_0\,ds.$$

2. В дальнейшем будем считать, что $\mathbb{A}\in\mathbb{G}_k$ и при этом в неравенстве (3) постоянная $\omega=0$. Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачу Дирихле

$$w''(t)+(m/t)w'(t)=-\mathbb{A}w(t), \tag{4}$$

$$w(0)=u_0,\quad \|w(t)\|\leq M \tag{5}$$

(неравенство (5) означает, что существует такая постоянная $M>0$, что оно выполняется для любого $t\in[0,\infty)$).

Теорема 2. *Пусть $u_0\in\mathbb{D}(\mathbb{A})$. Тогда при $m<1$ функция*

$$\mathbb{W}_{m,k}(t)u_0=2t^{1-m}B^{-1}(1/2-m/2,1/2+k/2)\int\limits_0^\infty y^k(t^2+y^2)^{(m-k)/2-1}\mathbb{Y}_k(y)u_0\,dy \tag{6}$$

является единственным решением задачи Дирихле (4), (5).

При $-1<m<1$ определим операторную функцию $\mathbb{U}_{m,k}(t)$ по формуле

$$\mathbb{U}_{m,k}(t)u_0=2B^{-1}(1/2-m/2,1/2+k/2)\int\limits_0^\infty y^k((1-m)y^2-(1+k)t^2)(t^2+y^2)^{(m-k)/2-2}(\mathbb{Y}_k(y)-\mathbb{I})u_0\,dy.$$

Теорема 3. *Пусть* $-1 < m < 1$ *и* $u_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$. *Тогда при* $t > 0$ *справедливы равенства*

$$t^m(\mathbb{W}_{m,k}(t)u_0)' = \mathbb{U}_{m,k}(t)u_0, \quad (\mathbb{U}_{m,k}(t)u_0)' = -t^m\mathbb{W}_{m,k}(t)\mathbb{A}u_0. \tag{7}$$

Замечание. В частном случае $\mathbb{A} = d^2/dx^2$ формулы (7) означают p-аналитичность (см. [3, с. 36]) при $p = t^{-m}$ функции $\mathbb{U}_{m,k}(t)u_0(x) + i\mathbb{W}_{m,k}(t)u_0'(x)$ по переменной $x + it$.

Теорема 4. *Если* $-1 < m < 1$ *и* $u_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$, *то существует* $\lim\limits_{t\to 0}\mathbb{U}_{m,k}(t)u_0 = -\mathbb{H}_k(m)u_0$, *где*

$$\mathbb{H}_k(m)u_0 = 2(1-m)B^{-1}(1/2 - 1/m, 1/2 + k/2)\int\limits_0^\infty y^{m-2}(\mathbb{I} - \mathbb{Y}_k(y))u_0\,dy. \tag{8}$$

Следствие. *При* $-1 < m < 1$ *и* $u_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A}^2)$ *функция* $\mathbb{U}_{m,k}(t)u_0$ *является единственным решением задачи*

$$w''(t) - (m/t)w'(t) = -\mathbb{A}w(t), \quad w(0) = -\mathbb{H}_k(m)u_0, \quad \lim_{t\to\infty} w(t) = 0.$$

При $\omega = 0$, $0 < \alpha < 1$ и $u_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A})$ с учетом теоремы 1 можно определить дробные степени [4, с. 357] оператора $-\mathbb{A}$ по формуле

$$(-\mathbb{A})^\alpha u_0 = \frac{2^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha + k/2 + 1/2)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k/2+1/2)}\int\limits_0^\infty y^{-1-2\alpha}(\mathbb{Y}_k(y) - \mathbb{I})u_0\,dy,$$

и мы получаем связь между дробной степенью оператора $-\mathbb{A}$ и оператором $\mathbb{H}_k(m)$, а именно $\mathbb{H}_k(m)u_0 = 2^m\Gamma(m/2+1/2)\Gamma^{-1}(1/2-m/2)(-\mathbb{A})^{1/2-m/2}u_0$.

Следовательно [4, с. 366], для $u_0 \in \mathbb{D}(\mathbb{A}^2)$

$$\mathbb{H}_k(\mu)\mathbb{H}_k(m)u_0 =$$

$$= 2\Gamma(1-m/2-\mu/2)\Gamma(m/2+1/2)\Gamma(\mu/2+1/2)(\Gamma(m/2+\mu/2)\Gamma(1/2-m/2)\Gamma(1/2-\mu/2))^{-1}\mathbb{H}_k(m+\mu-1)u_0,$$

где $-1 < m$, $\mu < 1$, $m + \mu > 0$, и

$$\lim_{\mu\to -m}\mathbb{H}_k(\mu)\mathbb{H}_k(m)u_0 = -\mathbb{A}u_0. \tag{9}$$

Замечание. Если $\mathbb{A} = \mathbb{B}^2$, где $\mathbb{B}$ — генератор ограниченной группы $\mathbb{T}(t)$ класса C_0, то

$$\mathbb{H}_k(m)u_0 = \mathbb{H}_0(m)u_0 = B^{-1}(1/2 - m/2, 1/2)\int\limits_0^\infty s^{m-1}(\mathbb{T}(-s) - \mathbb{T}(s))\mathbb{B}u_0\,ds$$

(ср. с [5, 6]) является абстрактной формой обобщенного, если $m \neq 0$, и обычного, если $m = 0$, преобразования Гильберта элемента банахова пространства $\mathbb{B}u_0$, а равенство (9) представляет собой аналог формулы обращения для преобразования Гильберта. В случае, когда $\mathbb{E} = \mathbb{L}_p(-\infty,\infty)$, $1 < p < \infty$, и $\mathbb{A} = d^2/dx^2 + (k/x)d/dx$,

$$\mathbb{H}_k(m)u_0(x) = 2(1-m)B^{-1}(1/2 - m/2, k/2 + 1/2)\int\limits_0^\infty y^{m-2}(1 - T_x^y)u_0(x)\,dy,$$

где $T_x^y u_0(x) = B^{-1}(k/2, 1/2)\int\limits_0^\pi u_0\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right)\sin^{k-1}\varphi\,d\varphi$ — оператор обобщенного сдвига (см. [7]).

3. Еще одну полугруппу, связанную с $\mathbb{Y}_k(t)$, можно получить, когда в уравнении (4) постоянная $m = 0$ (по-прежнему $\omega = 0$).

Теорема 5. *Замыкание оператора* $-\mathbb{H}_k(0) = -(-\mathbb{A})^{1/2}$ *является генератором равномерно ограниченной полугруппы* $\mathbb{W}_{0,k}(t)$ *(см. формулу (6)) класса* C_0, *аналитически продолжаемой в некоторый сектор комплексной плоскости.*

4. Если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \in \mathbb{G}_0$, то, вообще говоря, оператор $\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$ (или его замыкание) не принадлежит $\mathbb{G}_0$ даже в случае, когда они коммутируют (см. [2]).

Множество, которому принадлежит сумма коммутирующих операторов из $\mathbb{G}_k$, $k \geq 0$, устанавливает

Теорема 6. *Пусть* $\mathbb{A}_i \in \mathbb{G}_{k_i}$, $k_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, *при* $i \neq j$ $\mathbb{Y}_{k_i}(t, \mathbb{A}_i)$ *и* $\mathbb{Y}_{k_j}(t, \mathbb{A}_j)$ *коммутируют на* $\mathbb{D} = \bigcap\limits_{i=1}^n \mathbb{D}(\mathbb{A}_i)$ $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{E}$. *Тогда замыкание оператора* $\mathbb{A} = \sum\limits_{i=1}^n \mathbb{A}_i$ *принадлежит* $\mathbb{G}_k$ *для* $k = n - 1 + \sum\limits_{i=1}^n k_i$ *и при этом*

$$\mathbb{Y}_k(t, \mathbb{A})u_0 = \omega_{n,k}^{-1}\int\limits_\Omega \prod_{i=1}^n y_i^{k_i}\mathbb{Y}_{k_i}(ty_i, \mathbb{A}_i)u_0\,dy, \tag{10}$$

где $\Omega = \{|y| = 1,\ y_1, \ldots, y_n \geq 0\}$, $\omega_{n,k} = \prod\limits_{i=1}^n \Gamma((k_i+1)/2)\Big/\left(2^{n-1}\Gamma\left(\left(\sum\limits_{i=1}^n k_i + n\right)/2\right)\right)$.

С помощью функции $\mathbb{Y}_k(t, \mathbb{A})$, задаваемой равенством (10), по формуле (8) определяется абстрактный аналог многомерного преобразования Гильберта.

Автор благодарен участникам семинара под руководством Е. И. Моисеева за внимание к работе.

Литература

1. *Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмулевич С. Д.* // Изв. вузов. Математика. 1986. № 6. С. 55 — 56.

2. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1990. Т. 28. С. 87 — 102.

3. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций. Киев, 1973.

4. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.

5. *Dettman J. W.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1977. 79A, N 1 — 2. P. 173 — 182.

6. *Кононенко В. И., Шмулевич С. Д.* О некоторых свойствах обратного преобразования Гильберта. Деп. в ВИНИТИ, № 9064 — В88.

7. *Левитан Б. М.* // Успехи мат. наук. 1951. Т. 1, вып. 2 (42). С. 102 — 143.

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 12 декабря 1996 г.