Дискретная математика

том 19 выпуск 3 * 2007

УДК 519.2

Асимптотические формулы и предельные распределения для комбинаторных конфигураций, порождаемых многочленами

© 2007 г. В. Н. Сачков

Рассматриваются производящие функции вида $\exp\{xg(t)\}$, где $g(t)$ — многочлен. Эти производящие функции порождают последовательности многочленов $a_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ Каждому многочлену $g(t)$ ставится в соответствие конфигурация веса n, размеры компонент которой ограничены степенью многочлена $g(t)$. Многочлен $a_n(x)$ является производящей функцией чисел a_{nk}, $k = 1, 2, \dots$, определяющих число конфигураций веса n, имеющих k компонент.

Для $n \to \infty$ приведены асимптотические формулы для числа конфигураций веса n и предельные распределения для числа компонент в случайной конфигурации.

В качестве примеров показано, как можно получить асимптотические формулы для числа подстановок и числа разбиений множества с ограниченными длинами циклов и размерами блоков соответственно, используя теорию конфигураций, порожденных полиномами. Получены предельные распределения числа циклов и числа блоков таких случайных подстановок и случайных разбиений множеств.

1. Введение

Рассматриваются производящие функции вида $\exp\{xg(t)\}$, где $g(t)$ — многочлен. Эти функции порождают последовательности многочленов $a_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ В разделе 2 описано, как каждому многочлену $g(t)$ ставится в соответствие конфигурация веса n (см. [1]), размеры компонент которой ограничены степенью многочлена $g(t)$. На компонентах определены отношения эквивалентности, заданные группами подстановок, порядки которых определяются коэффициентами $g(t)$. Эти отношения определяют различимость компонент и, следовательно, различимость конфигураций. Многочлен $a_n(x)$ является производящей функцией чисел a_{nk}, $k = 1, 2, \dots$, определяющих число конфигураций веса n, имеющих k компонент.

В разделе 3 для $n \to \infty$ приведены асимптотические формулы для числа конфигураций веса n и предельные распределения для числа компонент в случайной конфигурации.

В разделах 4 и 5 в качестве частных случаев рассмотрены асимптотические формулы для числа подстановок и числа разбиений множества с ограниченными длинами циклов и размерами блоков соответственно. При указанных ограничениях приводятся предельные распределения для числа циклов и числа блоков случайных подстановок и случайных разбиений множеств соответственно.

Результаты, относящиеся к подстановкам с ограниченными длинами циклов, были опубликованы автором в ведомственном издании в 1969 году и, частично, в учебном пособии 1982 года. В книге [2] изложены результаты, относящиеся к разбиениям с ограниченными размерами блоков.

2. Класс многочленных конфигураций

Будем рассматривать многочлены с неотрицательными коэффициентами вида

$$g(t) = \sum_{j=1}^{m} g_j t^j, \tag{1}$$

где $0 \leqslant g_i \leqslant 1$, $g_m > 0$ и $1/g_i$ — целое число для положительных g_i, $i = 1, \ldots, m$. Пусть

$$d = \gcd\{j : g_j \neq 0, 1 \leqslant j \leqslant m\}$$

где здесь и далее gcd — знак взятия наибольшего общего делителя. Не ограничивая общности, предполагаем, что $d = 1$. В случае $d > 1$ можно рассмотреть многочлен от переменной $t' = t^d$.

Каждому многочлену $g(t)$ вида (1) поставим в соответствие комбинаторную конфигурацию. Для этого рассмотрим k пустых ячеек вместимости, определяемой вторичной спецификацией $[1^{n_1} 2^{n_2} \ldots m^{n_m}]$, то есть имеется n_i ячеек вместимости i, $1 \leqslant i \leqslant m$. В ячейки в натуральном порядке размещаются элементы множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и рассматривается совокупность всех $n!$ перестановок. На этой совокупности определяется отношение эквивалентности с использованием прямого произведения групп $S_{n_1} \times S_{n_2} \times \ldots \times S_{n_m}$ и $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$, где S_{n_i} — симметрическая группа степени n_i, а G_i — произвольная группа подстановок степени i, порядок которой определяется равенством

$$|G_i| = 1/g_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Подстановка $s \in S_{n_i}$ осуществляет перестановку содержимого ячеек вместимости i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Классы эквивалентности, определяемые $S_{n_1} \times S_{n_2} \times \ldots \times S_{n_m}$ и $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$, будем называть конфигурациями, порождаемыми многочленом $g(t)$.

Число $n = 1n_1 + 2n_2 + \ldots + mn_m$ назовем весом конфигурации, а величину $k = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ — числом ее компонент. Если $a_{nk}(g_1, \ldots, g_m)$ — число конфигураций веса n, имеющих k компонент, то с учетом формулы (2)

$$a_{nk}(g_1, \ldots, g_m) = \sum_{A_{k,n}} \frac{n!}{n_1! \, n_2! \ldots n_m!}, \tag{3}$$

где

$$A_{k,n} = \{n_1, n_2, \ldots, n_m : 1n_1 + 2n_2 + \ldots + mn_m = n, \; n_1 + n_2 + \ldots + n_m = k\}$$

и $k = 0, 1, \ldots, n$. Положим также

$$a_{n0}(g_1, g_2, \ldots, g_m) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Общее число конфигураций веса n равно

$$a_n(g_1, g_2, \ldots, g_m) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(g_1, g_2, \ldots, g_m).$$

Рассмотрим производящую функцию

$$a_n(x; g_1, g_2, \ldots, g_m) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(g_1, g_2, \ldots, g_m)x^k. \tag{4}$$

Очевидно, что

$$a_n(g_1, g_2, \ldots, g_m) = a_n(1; g_1, g_2, \ldots, g_m).$$

Из формул (3) и (4) следует, что

$$\exp\{xg(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x; g_1, g_2, \ldots, g_m)\frac{t^n}{n!}. \tag{5}$$

Из равенства (5) следует, что многочлены $a_n(x; g_1, \ldots, g_m)$ удовлетворяют соотношению

$$a_n(x+y; g_1, \ldots, g_m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k(x; g_1, \ldots, g_m) g_{n-k}(y; g_1, \ldots, g_m). \tag{6}$$

Многочлены, удовлетворяющие равенствам вида (6), иногда называют биномиальными.

Рассмотрим теперь некоторые классические комбинаторные конфигурации, которые принадлежат классу конфигураций, определяемых многочленами $g(t)$ вида (1).

2.1. A-подстановки

Подстановка степени n, $n = 1, 2, \ldots$, называется A-подстановкой, если длины ее циклов принадлежат некоторой подпоследовательности A натурального ряда (см. [2]). Если a_{nk} — число A-подстановок степени n, имеющих k циклов, и

$$a_{nk}^A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^A x^k,$$

то известно, что если

$$a(t) = \sum_{j \in A} t^j / j,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^A(x) t^n / n! = \exp\{xa(t)\}.$$

Общее число A-подстановок равно $a_n^A = a_n^A(1)$. Если $A = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_n = m$, то $a(t)$ — многочлен степени m вида (1), где

$$g_j = \begin{cases} 1/j, & j \in A, \\ 0, & j \notin A. \end{cases}$$

В этом случае G_i есть группа циклических сдвигов, $1 \leqslant i \leqslant m$. Частным случаем A-подстановок являются решения x уравнения

$$x^d = e \tag{7}$$

в симметрической группе S_n, где e — единичная подстановка.

Если $a_{nk}(d)$ — число решений уравнения (7), имеющих k циклов, и $a_n(d)$ — общее число решений, то, выбирая $A = \{j : j \mid d\}$, получаем, что

$$a_{nk}^A(x; d) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(x; d) x^k,$$

причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x; d) \frac{t^n}{n!} = \exp\left\{x \sum_{j \mid d} \frac{t^j}{j}\right\}$$

и коэффициенты многочлена вида (1) определяются условиями

$$g_j = \begin{cases} 1/j, & j \mid d, \\ 0, & j \nmid d. \end{cases} \tag{8}$$

Так как $a_n(d) = a_n(1; d)$, справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(d) \frac{t^n}{n!} = \exp\left\{\sum_{j \mid d} \frac{t^j}{j}\right\}. \tag{9}$$

Заметим, что если в качестве группы G_i рассматривается группа диэдра, то для соответствующего многочлена $g(t)$ коэффициенты удовлетворяют условию $g_i = 1/(2i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

2.2. A-разбиения

Разбиение n-множества, $n = 1, 2, \ldots$, называется A-разбиением, если величины его блоков принадлежат некоторой подпоследовательности A натурального ряда (см. [2]). Если T_{nk}^A — число A-разбиений n-множеств с k блоками, T_n^A — общее число таких разбиений и

$$T_n^A(x) = \sum_{k=0}^{n} T_{nk}^A x^k, \tag{10}$$

то известно, что если

$$b(t) = \sum_{j \in A} \frac{t^j}{j!},$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n^A(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\{x b(t)\}, \qquad T_n^A = T_n^A(1).$$

Если $A = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, где $j_1 < j_2 < \dots < j_n = m$, то $b(t)$ — многочлен степени m вида (1), где

$$g_j = \begin{cases} 1/j!, & j \in A, \\ 0, & j \notin A. \end{cases}$$

В данном случае G_i — симметрическая группа степени i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Заметим, что в силу теоремы Кэли об изоморфизме любой конечной группы некоторой подгруппе симметрической группы соответствующие конфигурации указанного вида могут ставиться в соответствие также любым конечным группам.

3. Асимптотические формулы и предельные теоремы

С целью отыскания асимптотических формул при $n \to \infty$ для $a_n(x; g_1, \dots, g_m)$ и $a_n(g_1, \dots, g_m)$ из равенства (5), используя интегральную формулу Коши для комплексного переменного z, можно записать, что

$$a_n(x; g_1, \dots, g_m) = (n!/2\pi i) \oint_C \exp\{xg(z)\} \frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{11}$$

где C — замкнутый контур в комплексной плоскости, охватывающий начало координат.

Для получения из формулы (11) асимптотического представления при $n \to \infty$ для оценки интеграла в правой части равенства используем результат из книги [2] (см. с. 50, теорема 4.1), полученный с помощью одной из модификаций метода перевала.

Теорема 1 ([2]). *При фиксированном m и $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$a_n(x; g_1, \dots, g_m) = \frac{n! \exp\{xg(R)\}}{R^n \sqrt{2\pi x \chi^2 R(R)}} (1 + o(1)), \tag{12}$$

где χ есть оператор $\chi = R\frac{d}{dR}$, R — единственное при достаточно больших n действительное положительное решение уравнения

$$\chi g(R) = n/x, \tag{13}$$

и оценка остаточного члена равномерна относительно $x \in W = [1-\delta, 1+\delta]$, $0 < \delta < 1$.

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Для числа конфигураций $a_n(g_1, \dots, g_n)$, порождаемых многочленом $g(t)$, справедлива асимптотическая формула*

$$a_n(g_1, \dots, g_n) = \frac{n! \exp\{g(r)\}}{r^n \sqrt{2\pi x \chi^2 g(r)}} (1 + o(1)), \tag{14}$$

где r — единственное при достаточно больших n решение уравнения $\chi g(r) = n$.

В силу равенства (4) формула (14) является следствием формулы (12).

Можно показать, что из уравнения (13) следует существование асимптотического разложения при $n \to \infty$, $x \in W$ вида

$$R = (n/(xmg_m))^{1/m} + \beta_0 + \frac{\beta_1}{(x/(xmg_m))^{1/m}} + \dots \tag{15}$$

с коэффициентами $\beta_0, \beta_1, \ldots$, не зависящими от отношения n/x.

С использованием разложения (15) из теоремы 1 можно при $n \to \infty$ получить асимптотику вида

$$a_n(x; g_1, \ldots, g_m) = \frac{(xmg_m)^{n/m}}{\sqrt{m}} \left(\frac{n}{e}\right)^{(1-1/m)} \exp\left\{\sum_{k=0}^{m-1} C_k n^{k/m} x^{1-k/m}\right\} (1 + o(1)), \quad (16)$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ не зависят от n и x и оценка остаточного члена равномерна для $x \in W$.

При $x = 1$ из формулы (16) следует, что

$$a_n(x; g_1, \ldots, g_m) = \frac{(mg_m)^{n/m}}{\sqrt{m}} \left(\frac{n}{e}\right)^{(1-1/m)} \exp\left\{\sum_{k=0}^{m-1} C_k n^{k/m}\right\} (1 + o(1)). \quad (17)$$

Коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \ldots$ и $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ в формулах (15) и (16) можно определять либо методом итераций, либо с использованием ряда Бюрмана–Лагранжа. Обычно это связано с громоздкими вычислениями, результаты которых будут ниже приведены для некоторых случаев.

На множестве конфигураций, порождаемых многочленом $g(t)$, зададим равномерное распределение и рассмотрим случайную величину $\xi_n(g_1, \ldots, g_m)$, равную числу компонент в случайной конфигурации. Производящая функция $g_n(g_1, \ldots, g_m)$ имеет вид

$$P_n(x; g_1, \ldots, g_m) = \frac{a_n(x; g_1, \ldots, g_m)}{a_n(1; g_1, \ldots, g_m)}. \quad (18)$$

Из формул (17) и (18) при $n \to \infty$ получаем асимптотику

$$P_n(x; g_1, \ldots, g_m) = x^{n/m} \exp\left\{\sum_{k=0}^{m-1} C_k n^{k/m} (x^{1-k/m} - 1)\right\} (1 + o(1)) \quad (19)$$

с равномерной оценкой остаточного члена для $x \in W$.

Из асимптотической формулы (19) вытекает следствие из теоремы 1.

Следствие 2. *При $n \to \infty$ случайная величина $\xi_n(g_1, \ldots .g_m)$ асимптотически нормальна с параметрами (M, δ), где*

$$M = \frac{n}{m} + \sum_{k=1}^{s} C_k \left(1 - \frac{k}{m}\right) n^{k/m},$$

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^{s} C_k \left(1 - \frac{k}{m}\right) n^{k/m},$$

где s — номер следующего по старшинству после a_m ненулевого коэффициента $g(t)$.

Асимптотическая нормальность $\xi_n(g_1, \ldots, g_m)$ была доказана в [2] (см. теорему 4.3, с. 59) с параметрами нормировки следующего вида:

$$M_n = \frac{n}{m} + \sum_{k=1}^{s} \left(1 - \frac{k}{m}\right) g_k r^k (1 + o(1)),$$

$$\delta_n^2 = \sum_{k=1}^{s} \left(1 - \frac{k}{m}\right)^2 g_k r^k (1 + o(1)).$$

Отметим, что различие в формулировках связано с тем, что при $n \to \infty$ основной вклад в среднее значение и дисперсию $\xi_n(g_1, \ldots, g_m)$ дают компоненты максимальной величины m.

4. Подстановки с циклами ограниченной длины

Пусть $b_{nk}^{(m)}$ — число подстановок степени n, длины циклов которых не превосходят m, и подстановки имеют k циклов; и пусть $b_n^{(m)}$ — общее число таких подстановок. Тогда для производящей функции

$$b_n(x; m) = \sum_{k=0}^{n} b_{nk}^{(m)} x^k$$

справедливо равенство

$$\exp\left\{x \sum_{k=1}^{m} t^k / k\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x; m) \frac{t^n}{n!},$$

и, стало быть,

$$g(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{t^k}{k}. \tag{20}$$

Из теоремы 1 следует, что при $n \to \infty$

$$b_n(x; m) = \frac{n! \exp\left\{x \sum_{k=1}^{m} R^k / k\right\}}{R^n \sqrt{2\pi x \sum_{k=1}^{m} k R^k}} (1 + o(1)), \tag{21}$$

где R — единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} R^k = \frac{n}{x},$$

и оценка остаточного члена равномерна по $x \in W$.

Применение ряда Бюрмана–Лагранжа позволяет в явном виде записать асимптотику для $b_n(x; m)$ с равномерной оценкой остаточного члена

$$b_n(x; m) = \frac{x^{n/m}}{\sqrt{m}} \left(\frac{n}{e}\right)^{n(1-1/m)} \exp\left\{\sum_{k=0}^{m-1} d_k(m) n^{k/m} x^{1-k/m}\right\} (1 + o(1)), \tag{22}$$

где коэффициенты $d_k(m)$ выражаются через Γ-функции следующим образом:

$$d_0(m) = -\frac{1}{m} \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j},$$

$$d_k(m) = \frac{\Gamma((m-k)/m + m - k)}{k\Gamma((m-k)/k + 1)\Gamma(m - k + 1)}, \qquad k = 1, \ldots, m-1. \tag{23}$$

Из равенства (22) при $x = 1$ следует асимптотика для чисел $b_n^{(m)} = b_n(1; m)$:

$$b_n^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{n}{e}\right)^{n(1-1/m)} \exp\left\{\sum_{k=0}^{m-1} d_k(m) n^{k/m}\right\} (1 + o(1)), \tag{24}$$

где $d_k(m)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, определяются равенствами (23).

При $m = 2$ из (24) следует асимптотика для числа J_n инволюций степени n

$$J_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{n/2} e^{\sqrt{m}-1/4}(1 + o(1)).$$

Из формулы (22) при $n \to \infty$ следует асимптотическое представление для производящей функции случайной величины $\xi_n^{(m)}$, равной числу циклов в случайно выбранной подстановке степени n из множества подстановок, длины циклов которых не превосходят m:

$$P_n(x; m) = x^{n/m} \exp\left\{\sum_{k=0}^{m-1} d_k(m) n^{k/m} (x^{1-k/m} - 1)\right\} (1 + o(1)) \tag{25}$$

с равномерной оценкой остаточного члена для $x \in W$.

Из теоремы 2 и формулы (25) вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *При фиксированном m и $n \to \infty$ случайная величина $\xi_n^{(m)}$ асимптотически нормальна с параметрами (M_n, σ_n), где*

$$M_n = \frac{n}{m} + \sum_{k=0}^{m-1} d_k(m)(1 - k/m) n^{k/m},$$

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{m-1} d_k(m)(1 - k/m)^2 n^{k/m},$$

$d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}$ определяются формулами (23) и M_n, σ_n^2 — главные члены асимптотических представлений среднего и дисперсии $\xi_n^{(m)}$ соответственно.

Аналогичные результаты получаются для случая, когда рассматривается множество подстановок степени n, длины циклов которых являются элементами множества

$$A = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}, \quad p_1 < p_2 < \ldots < p_m, \quad \gcd(p_1, p_2, \ldots, p_m) = 1.$$

В этом случае уравнение (20) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} R^{p_j} = n/x.$$

Если $a_{nk} = a_{nk}(p_1, \ldots, p_m)$ — число подстановок в рассматриваемом множестве, имеющих k циклов, то производящая функция

$$a_n(x) = a_n(x; p_1, \ldots, p_m) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = a_{nk}(p_1, \ldots, p_m) x^k$$

при $n \to \infty$ согласно формуле (21) имеет представление

$$a_n(x; p_1, \ldots, p_m) = \frac{n! \exp\left\{x \sum_{j=1}^m R^j / p_j\right\}}{R^n \sqrt{2\pi x \sum_{j=1}^m p_j R^j}} (1 + o(1)), \tag{26}$$

с равномерной оценкой остаточного члена для $x \in W$.

Производящая функция для числа циклов $\xi_n(p_1, \ldots, p_m)$ в случайной подстановке из рассматриваемого множества может быть представлена в виде

$$P_n(x; p_1, \ldots, p_m) = x^{n/m} \exp\left\{\sum_{k=0}^{p_m-1} C_k n^{k/p_m} (x^{1-k/p_m})\right\} (1 + o(1))$$

с равномерной оценкой остаточного члена для $x \in W$.

Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 4. *При $n \to \infty$, $2 < p_1 < \ldots < p_m$, $\gcd(p_1, \ldots, p_m) = 1$ и фиксированном p_m случайная величина $\xi(p_1, \ldots, p_m)$ асимптотически нормальна с параметрами (M_n, σ), где*

$$M_n = \frac{n}{p_m} + \sum_{k=0}^{p_m-1} C_k (1 - k/p_m) n^{k/p_m},$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{p_m-1} C_k (1 - k/p_m) n^{k/p_m}. \tag{27}$$

Методом итераций можно получить, что

$$R = \left(\frac{n}{x}\right)^{1/p_m} - \frac{1}{p_m} \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{x}{n}\right)^{1-(p_j+1)/p_m} + O\left(\frac{1}{n^{2-(2p_{m-1}+1)/p_m}}\right). \tag{28}$$

Поэтому из формул (26) и (28) следует асимптотика с равномерной оценкой остаточного члена для $x \in W$

$$a_n(x; p_1, \ldots, p_m) = \frac{x^{n/p_m}}{\sqrt{P_m}} \left(\frac{n}{e}\right)^{n(1-1/p_m)} \exp\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{p_j} n^{p_j/p_m} x^{1-p_j/p_m}\right\} (1 + o(1)).$$

Из этой формулы следует асимптотическое представление для производящей функции $\xi_n(p_1, \ldots, p_m)$:

$$P_n(x; p_1, \ldots, p_m) = x^{n/p_m} \exp\left\{\sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{p_j} n^{p_j/p_s} (x^{1-p_j/p_m} - 1)\right\} (1 + o(1)) \tag{29}$$

с равномерной оценкой остаточного члена для $x \in W$.

Из формулы (29) следуют выражения для нормировок предельного нормального распределения $\xi_n(p_1, \ldots, p_m)$ вида (27) с явными значениями $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$:

$$M_n = \frac{n}{p_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{k}{p_m}\right) n^{p_j/p_n},$$

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{p_j} - \frac{k}{p_n}\right)^2 n^{p_j/p_n}.$$

Для простого числа p обозначим через $a_n^{(p)}$ число решений уравнения в симметрической группе S_n

$$x^p = e, \tag{30}$$

а через $a_{nk}^{(p)}$ — число таких решений, имеющих k циклов. Тогда для

$$a_n(x;p) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^{(p)} x^k$$

при $n \to \infty$ согласно формуле (12) справедливо соотношение

$$a_n(x;p) = \frac{n!\exp\{x(R^p/p + R)\}}{R^n\sqrt{2\pi x(pR^p + R)}}(1 + o(1)), \tag{31}$$

где $R^p + R = n/x$. Из этого равенства, применяя итерации, получаем, что

$$R = (n/x)^{1/p} - (1/p)(x/n)^{1-2/p} + O(1/n^{2-3/p}). \tag{32}$$

Из равенств (31) и (32) находим, что

$$a_n(x;p) = \frac{x^{n/p}}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{e}\right)^{(1-1/p)}\exp\left\{n^{1/p}x^{1-1/p} - \frac{x^{2(1-1/p)}}{2pn^{1-2/p}}\right\}(1 + o(1)). \tag{33}$$

Отсюда при $x = 1$ получаем, что

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{e}\right)^{(1-1/p)n}\exp\left\{n^{1/p} - \frac{1}{2pn^{1-2/p}}\right\}(1 + o(1)).$$

Отсюда следуют известные формулы

$$\begin{aligned} a_n^{(p)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^{n/2}\exp\{\sqrt{n} - 1/4\}(1 + o(1)),\\ a_n^{(p)} &= \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{e}\right)^{n/p}\exp\{n^{1/p}\}(1 + o(1)), \qquad p > 2. \end{aligned}$$

Далее, при $n \to \infty$ из формулы (33) получаем асимптотику для производящей функции $P_n(x;p)$ числа $\xi_n^{(p)}$ циклов в случайно выбранном решении уравнения (30) с равномерной оценкой остаточного члена:

$$P_n(x;p) = x^{n/p}\exp\left\{\frac{n}{p}(x^{1-1/p} - 1) - \frac{1}{2pn^{1-2/p}}(x^{2(1-1/p)} - 1)\right\}(1 + o(1)).$$

Отсюда следует асимптотическая нормальность $\xi_n^{(p)}$ при $n \to \infty$ с параметрами (M_n, σ), где

$$\begin{aligned} M_n &= n/p - (1 - 1/p)n^{1/p},\\ \sigma^2 &= (1 - 1/p)n^{1/p}. \end{aligned}$$

Если каноническое разложение d имеет вид $d = p_1 p_2 \dots p_n$, $2 < p_1 < \dots < p_n$, и $a_{nk}^{(d)}$ — число решений уравнения $x^d = e$ в симметрической группе, имеющих k циклов, а $a_n^{(d)}$ — общее число решений этого уравнения, то для производящей функции

$$a_n(x; d) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^{(d)} x^k$$

при $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула с равномерной оценкой остаточного члена для $x \in W$

$$a_n(x; d) = \frac{x^{n/d}}{\sqrt{d}} \left(\frac{n}{e}\right)^{n(1-1/d)} \exp\left\{ \sum_{j|d,\ j<d} n^{j/d} x^{1-j/d}/j \right\} (1 + o(1)).$$

Отсюда следует, что

$$a_n^{(d)} = \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\frac{n}{e}\right)^{n(1-1/d)} \exp\left\{ \sum_{j|d,\ j<d} n^{j/d}/j \right\} (1 + o(1)).$$

Общий вид формулы для $a_n^{(d)}$ для произвольного d можно найти в книге [3].

5. Разбиение с блоками ограниченного размера

Рассмотрим разбиения n-множества, величины блоков которых удовлетворяют условию $1 \leqslant j_1 < j_1 < \dots < j_h$.

Такие разбиения являются A-разбиениями при $A = (j_1, j_2, \dots, j_h)$, и, используя формулы (8), (10) и (12) при $n \to \infty$, получаем, что

$$T_n(x) = \frac{n! \exp\left\{x \sum_{k=1}^{h} R^{j_k}/j_k!\right\}}{R^n \sqrt{2\pi \sum_{k=1}^{h} j_k R^{j_k}/(j_k - 1)!}} (1 + o(1)),$$

где R — единственное при достаточно больших n решение уравнения

$$\sum_{k-1}^{h} R^{j_k}/(j_k - 1)! = n/x.$$

В соответствии с формулой (9) находим, что при $n \to \infty$

$$T_n^A = \frac{n! \exp\left\{\sum_{k=1}^{h} r^{j_k}/j_k!\right\}}{r^n \sqrt{2\pi \sum_{k=1}^{h} j_k r^{j_k}/(j_k - 1)!}} (1 + o(1)),$$

где r определяется из уравнения

$$\sum_{k-1}^{h} \frac{r^{j_k}}{(j_k - 1)!} = n.$$

Если $\xi_n(A)$ — число блоков в случайном разбиении рассматриваемого вида, то при $n \to \infty$ случайная величина $\xi_n(A)$ асимптотически нормальна с параметрами нормировки (M, σ), где

$$M = \frac{n}{j_n} - \sum_{k-1}^{h-1} \frac{(1 - k/j_n)r^k}{j_k!}(1 + o(1)),$$

$$\sigma^2 = \sum_{k-1}^{h-1} \frac{(1 - k/j_d)^2 r^k}{j_k!}(1 + o(1)). \tag{34}$$

Формулы (34) дают асимптотические оценки для среднего и дисперсии $\xi_n(A)$. Из этих формул следует, что основной вклад в среднее значение числа блоков дают блоки максимального размера.

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Комбинаторные методы в дискретной математике*. Наука, Москва, 1977.
2. Сачков В. Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*. Наука, Москва, 1978.
3. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
4. Moser L., Wyman M., Asymptotic expansions. I. *Canad. J. Math.* (1956) **8**, №2, 225–233.

Статья поступила 28.06.2007.