Р. М. Насыров, С. Р. Насыров, Сходимость приближенного метода С. А. Христиановича решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения, *Докл. АН СССР*, 1986, том 291, номер 2, 294–298

УДК 517.95 МАТЕМАТИКА

Р.М. НАСЫРОВ, С.Р. НАСЫРОВ

СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА С.А. ХРИСТИАНОВИЧА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С.А. Христиановичем 19 IV 1985)

Рассмотрим в единичном круге E краевую задачу

(1) $\operatorname{div}(\kappa\nabla u) = 0, \quad u|_{\partial E} = f,$

где

$$\kappa = \kappa(x, y), \quad \ln\kappa \in L^\infty(E), \quad f \in C^\alpha(\partial E).$$

Решение (1) ищется в классе $W_2^1(E)$. Задача (1) эквивалентна краевой задаче для системы $u_x = v_y/\kappa$, $u_y = -v_x/\kappa$, $u|_{\partial E} = f$, $v(1) = 0$, или, в комплексной записи,

(2) $w_{\bar z} = \mu w_{\bar z}, \quad \operatorname{Re} w|_{\partial E} = f, \quad \operatorname{Im} w(1) = 0,$

где $w = u + iv$, $z = x + iy$,

(3) $\mu = \mu_0(z) = (1 - \kappa)/(1 + \kappa), \quad \|\mu_0\|_{L^\infty(E)} < 1.$

В [1] С.А. Христиановичем был предложен приближенный метод решения задачи (2), основанный на разложении решения в ряд по малому параметру. Позднее в [2] данный метод с некоторыми видоизменениями применялся к решению задач подземной гидромеханики, при этом функция $w(z)$ могла иметь в конечном числе точек особенности типа логарифмических.

Суть метода заключается в следующем. Комплексная характеристика (3) включается в однопараметрическое семейство $\mu = \mu(z, \lambda)$, аналитически зависящее от λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, причем $\mu(z, 0) = 0$, $\mu(z, 1) = \mu_0(z)$, $z \in E$. Предположим, что решение $w = w(z, \lambda)$ задачи (2) аналитически зависит от λ. Тогда, разлагая $\mu(z, \lambda)$ и $w(z, \lambda)$ в ряды по λ

(4) $\mu(z, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(z)\lambda^k, \quad w(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)\lambda^k,$

подставляя разложения (4) в (2) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем рекуррентные соотношения для определения функций $w_k(z) \in W_2^1(E)$:

$$(w_0)_{\bar z} = 0, \quad \operatorname{Re} w_0|_{\partial E} = f,$$

(5) $(w_k)_{\bar z} = \sum_{j=0}^{k-1} \mu_{k-j}(\bar w_j)_{\bar z}, \quad \operatorname{Re} w_k|_{\partial E} = 0, \quad k \geqslant 1,$

$$\operatorname{Im} w_k(1) = 0, \quad k \geqslant 0.$$

В [1, 2] за $\mu(z, \lambda)$ брали функции $\mu_1(z, \lambda) = \lambda(1 - \kappa)/[2 - \lambda(1 - \kappa)]$ и $\mu_2(z, \lambda) = (1 - \kappa^\lambda)/(1 + \kappa^\lambda)$ соответственно.

В данной работе устанавливается сходимость указанного метода решения задачи (2) как в классе ограниченных функций, так и при наличии у решения "логарифмических" особенностей. Дается оценка погрешности. Предложена новая зависимость

(6) $\mu_3(z, \lambda) = \lambda(1 - \kappa)/(1 + \kappa),$

для которой полученные оценки скорости сходимости дают лучшие результаты, чем для $\mu_1(z,\lambda)$ и $\mu_2(z,\lambda)$.

Нам будут необходимы следующие интегральные операторы, играющие важную роль в краевых задачах для эллиптических уравнений (см. [3–5]):

$$T\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_E \omega(t)\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-1}\right)d\sigma_t,$$

$$T_1\omega(z) = T\omega(z) - \overline{T\omega(1/\bar z)},$$

$$S\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{\omega(t)d\sigma_t}{(t-z)^2},$$

$$S_1\omega(z) = S\omega(z) + \frac{1}{z^2}\overline{S\omega(1/\bar z)},$$

$d\sigma_t$ – элемент площади.

Они являются непрерывными линейными операторами, действующими в пространстве $L^p(E)$, $p>2$, причем для любой функции $\omega\in L^p(E)$ существуют обобщенные производные

$$(T_1\omega)_z = S_1\omega, \qquad (T_1\omega)_{\bar z} = \omega.$$

Оператор T_1 фактически действует из $L^p(E)$ в $C^\gamma(E)$, $\gamma = (p-2)/p$, причем $w = T_1\omega$ – единственное решение задачи

$$w_{\bar z} = \omega, \qquad \operatorname{Re} w|_{\partial E} = 0, \qquad \operatorname{Im} w(1) = 0,$$

в классе $W_r^1(E)$, $2\leqslant r\leqslant p$. Пусть $C_p = \|S_1\|_{L^p(E)\to L^p(E)}$. По лемме Рисса–Торина $C_p\to C_2 = 1$ при $p\to 2+0$.

Теорема 1. *Пусть* $f\in C^\alpha(\partial E)$, $\alpha>0{,}5$, *имеет место* (5) *и* $m = \sum_{k=1}^{\infty}\|\mu_k\|_{L^\infty(E)} < 1$. *Тогда ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ *сходится к точному решению* w *краевой задачи* (2) *в пространстве* W_p^1, *а значит, и в* C^γ, $\gamma = (p-2)/p$, *где* p *– любое число, удовлетворяющее условиям*

(7) $\qquad 2<p<(1-\alpha)^{-1}, \qquad C_p < m^{-1}.$

Наметим доказательство теоремы. Пусть p удовлетворяет (7). Так как w_0 аналитична и $\operatorname{Re} w|_{\partial E}\in C^\alpha(\partial E)$, то справедлива оценка [6, стр. 397] $|w_0'(z)|\leqslant \mathrm{const}\cdot(1-|z|)^{\alpha-1}$. Значит, $w_0\in W_p^1(E)$. Далее по индукции доказывается, что $w_k = T_1\left(\sum_{j=0}^{k-1}\mu_{k-j}(\bar w_j)_{\bar z}\right)$, откуда следует, что $w_k\in W_p^1(E)$, $k\geqslant 0$, и

$$\sum_{k=1}^{N}\|(w_k)_z\|_{L^p}\leqslant C_p\cdot\sum_{j=0}^{N-1}\|(w_j)_z\|_{L^p}\cdot\sum_{k=j+1}^{N}\|\mu_{k-j}\|_{L^\infty}\leqslant$$

$$\leqslant mC_p\cdot\sum_{k=0}^{N}\|(w_k)_z\|_{L^p}, \qquad N\geqslant 1.$$

Значит, сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\|(w_k)_z\|_{L^p}$. Используя (5), можно показать, что $\sum_{k=0}^{\infty}\|(w_k)_{\bar z}\|_{L^p}<\infty$, поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ сходится в $W_p^1(E)$, причем, как нетрудно видеть, к решению (2).

Дадим оценку сходимости в $C(E)$.

Теорема 2. *Пусть ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda^k$ *сходится абсолютно в* $L^\infty(E)$, $|\lambda| \leqslant l$, $l > 1$, *причем* $m(l) = \sum_{k=1}^{\infty} \|\mu_k\|_{L^\infty} l^k < 1$, *а функция* f *удовлетворяет условию Гёльдера* $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant A|\zeta_1 - \zeta_2)^\alpha$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial E$, $\alpha > 0{,}5$. *Тогда*

$$(8) \qquad \left\| w - \sum_{k=0}^{N-1} w_k \right\|_{C(E)} \leqslant AM(l,\alpha) l^{-N}, \quad N \geqslant 1$$

где

$$M(l,\alpha) = 2^\alpha (1 + 2^{3\alpha+\beta}/\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{cosec}\tau \cdot \tau^\beta d\tau)/(1 - l^{-1}),$$

$$\beta = \alpha(1 - m(l))/(1 + m(l)).$$

Если $u = \operatorname{Re} w$, $u_k = \operatorname{Re} w_k$, *то*

$$(9) \qquad \left\| u - \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right\|_{C(E)} \leqslant A \cdot 2^\alpha/(1 - l^{-1}), \quad N \geqslant 1.$$

Для доказательства применяем теорему 1 к функциям $\tilde{w}_k = w_k \lambda^k$, $|\lambda| \leqslant l$. Тогда ряд $w(z,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{w}_k$ сходится абсолютно и его сумма аналитична по λ. Если $|w(z,\lambda)| \leqslant AM(l,\alpha)$, $z \in E$, $|\lambda| \leqslant l$, то по неравенствам Коши $\|w_k(z)\|_{C(E)} \leqslant AM(l,\alpha) l^{-k}$, откуда следует (8). Для получения априорной оценки на $w(z,\lambda)$ используется теорема Мори [5] и точные оценки сопряженных гармонических функций Л.А. Аксентьева [7]. Аналогично устанавливается (9).

Теперь рассмотрим случай, когда у решения $u = \operatorname{Re} w$ задачи (1) допускаются "логарифмические" особенности в конечном числе точек $z_1, \ldots, z_n \in \partial E$, т.е.

$$u \in L^2(E) \cap W^1_{2\,\mathrm{loc}}\left(\bar{E} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{z_j\}\right),$$

причем

$$\int_{l_j} \kappa \frac{\partial u}{\partial n} ds = A_j,$$

где l_j — любой достаточно малый контур в E, однократно охватывающий точку z_j, A_j — фиксированная постоянная, $j = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае будем предполагать, что в представлении (4) все $w_k = u_k + iv_k$, $k \geqslant 1$, а также функция $w_0(z) - \frac{1}{2\pi} \sum_1^n A_j \ln(z - z_j)$ (однозначная аналитическая в E) принадлежат $W_2^1(E)$. Справедлив следующий аналог теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C^\alpha(\partial E)$, $\alpha > 0{,}5$, $m(l) = \sum_{k=1}^{\infty} \|\mu_k\|_{L^\infty(E)} l^k < 1$, $l > 1$, *и для некоторого* γ, $0 < \gamma \leqslant 1$,

$$S(l,\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \prod_{j=1}^{n} |z - z_j|^{-\gamma} \mu_k(z) \right\|_{L^\infty(E)} l^k < \infty.$$

Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *сходится к "u" равномерно в том смысле, что*

$$|u(z) - \sum_{k=0}^{N-1} u_k(z)| \leqslant Rl^{-N}, \quad z \in \bar{E} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{z_j\}, \quad N \geqslant 1,$$

$$R = S(l,\gamma)(1 - C_p m(l))^{-1}(1 - l^{-1})^{-1} \times$$
$$\times \left\| \prod_{j=1}^{n} |z - z_j|^{\gamma} w_0'(z) \right\|_{L^p(E)} \cdot \| T_1 \|_{L^p(E)\to C(E)},$$

p – любое число, удовлетворяющее неравенствам $2 < p < \min((1-\alpha)^{-1}, 2(1-\gamma)^{-1})$, $C_p < m(l)^{-1}$.

На практике, как правило, решение ищется в виде суммы ограниченного решения $u_0(z)$ задачи (1) и линейной комбинации $\sum\limits_{j=1}^{n} A_j u(z, z_j)$, где $u(z, z_j)$ – функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\kappa \nabla u) = 0, \quad u|_{\partial E} = 0, \quad u \in L^2(E) \cap W^1_{2\,\mathrm{loc}}(\bar E \setminus \{z_j\}), \\ &\int_{l_j} \kappa \frac{\partial u}{\partial n} ds = 1, \end{aligned} \tag{10}$$

где l_j – любой контур в E, однократно охватывающий z_j; при этом $w_0(z) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{z - z_j}{1 - z\bar z_j} + i\beta_0$.

Как уже отмечалось выше, для зависимости (6) теоремы 2 и 3 дают лучшую скорость сходимости, чем для $\mu_1(z, \lambda)$ и $\mu_2(z, \lambda)$. Именно, в теореме 1 в качестве l может быть выбрано любое число, меньшее $\|\mu_0\|^{-1}_{L^\infty}$. Рекуррентное соотношение в (5) при этом принимает простой вид $(w_k)_{\bar z} = \mu_0(\bar w_{k-1})_{\bar z}$. При решении задачи (1) для улучшения сходимости можно сделать замену $v^* = \epsilon v$. Если $a = 1/\|\kappa^{-1}\|_{L^\infty}$, $b = \|\kappa\|_{L^\infty}$, то оптимальное ϵ есть $(ab)^{-1/2}$ и тогда в (9) $l = (b^{1/2} + a^{1/2})/(b^{1/2} - a^{1/2})$.

В задаче (10) замену $v^* = \epsilon v$ можно использовать для удовлетворения условию $|z - z_j|^{-\gamma}\mu_0(z) \in L^\infty$. Справедлива непосредственно следующая из теоремы 3

Теорема 4. *Пусть* $(\kappa(z) - \kappa(z_j))|z - z_j|^{-\gamma} \in L^\infty(E)$. *Тогда при* $\epsilon = 1/\kappa(z_j)$ *указанный выше приближенный метод, примененный к* $w^* = u + i\epsilon v$, *сходится, причем*

$$\left| u(z) - \sum_{k=0}^{N-1} u_k(z) \right| \leqslant c_j(\kappa, l) l^{-N}, \qquad z \in E \setminus \{z_j\},$$

l – любое число из интервала $(1, m^{-1})$, $m = \|(\kappa(z) - \kappa(z_j))/(\kappa(z) + \kappa(z_j))\|_{L^\infty}$.

В заключение отметим, что данный метод применим к задаче Дирихле для уравнений более общего вида

$$\begin{aligned} &w_{\bar z} - \mu_1 w_z - \mu_2 \bar w_{\bar z} = 0, \qquad \| |\mu_1| + |\mu_2| \|_{L^\infty} < 1, \\ &\operatorname{Re} w|_{\partial D} = f \in C^\alpha, \end{aligned}$$

в односвязных областях D, отличных от круга, с достаточно хорошей границей (например, ∂D – кусочно-гладкая и внутренние углы $\beta_i \pi$ в точках заострения удовлетворяют условию $\beta_i > 0{,}5\alpha^{-1}$).

Авторы благодарны Ф.Г. Авхадиеву за просмотр рукописи и сделанные замечания.

Казанский авиационный институт

Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина

Поступило 18 VI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христианович С.А.* – Тр. ЦАГИ, 1940, вып. 481. 52 с. 2. *Насыров Р.М.* – Изв. вузов. Матем., 1958, № 1 (2), с. 114–123. 3. *Боярский Б.В.* – Матем. сб., 1957, т. 43 (85), № 4, с. 451–503. 4. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 682 с. 5. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 133 с. 6. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с. 7. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А.* – УМН, 1975, т. 30, № 4, с. 3–60.

УДК 517.518.22 МАТЕМАТИКА

Ю.С. НИКОЛЬСКИЙ

К ТЕОРЕМАМ ВЛОЖЕНИЯ ВЕСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 11 VI 1985)

Пусть $l=(l_1,\dots,l_n)$ – вектор с целыми положительными координатами, E^n–n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\dots,x_n)$; $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)$, $\kappa_i=\lambda/l_i$, $i=1,2,\dots,n$, $\lambda=n\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{l_i}$, $\rho(x)=\sqrt{|x_1|^{2/\kappa_1}+\dots+|x_n|^{2/\kappa_n}}$; $L_{p,\alpha}(E^n)$– весовое пространство функций f, определенных на E^n, с конечной нормой

$$(1)\qquad \|f\|_{p,\alpha,E^n}=\|[1+\rho(x)]^{\alpha}f\|_{L_p(E^n)},\qquad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Определим пространство $W^l_{p,\alpha}$ локально суммируемых на E^n функций f, имеющих на E^n обобщенные по С.Л. Соболеву производные $D_i^{l_i}f$, $i=1,2,\dots,n$, и конечную норму

$$\|f\|_{W^l_{p,\alpha}}=\|f\|_{L_p(|x|<1)}+\sum_{i=1}^{n}\|D_i^{l_i}f\|_{p,\alpha,E^n}=\|f\|_{L_p(|x|<1)}+\|f\|_{L^l_{p,\alpha}}.$$

Отметим, что в определении нормы пространства $W^l_{p,\alpha}$ не требуется суммируемость в степени p функции по всему пространству E^n и что если $l_i=r$, $i=1,2,\dots,n$, то $\rho(x)=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}=|x|$.

Обозначим через $L_{p,\alpha,\mu}(E^n)$ пространство функций f, определенных на E^n, с конечной нормой (1), в которой весовая функция $[1+\rho(x)]^{\alpha}$ заменена на на функцию $[1+\rho(x)]^{\alpha}\mu(x)$, где $\mu(x)$ – положительная непрерывная на E^n функция.

Настоящая заметка посвящена оценкам $L_{p,\beta}(E^m)$-норм или в некоторых случаях $L_{q,\beta,\mu}(E^m)$-норм функции и ее производных через ее $W^l_{p,\alpha}$-норму (или $L^l_{p,\alpha}$-полунорму), $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $1\leqslant m\leqslant n$. Функция $1/\mu(x)$ имеет на бесконечности логарифмический характер. При этом при определенных α оценивается весовая норма функции (или ее производной), уменьшенной на подходящий многочлен.

Эти неулучшаемые по параметрам q и β оценки являются распространени-