МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 1 (1985)

О ЧИСЛЕ ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

И. Е. Шпарлинский

1. Рассмотрим линейную рекуррентную последовательность $U = (u(x))$ целых чисел порядка $n \geqslant 2$, удовлетворяющую уравнению

$$u(x+n) = a_{n-1}u(x+n-1) + \ldots + a_0 u(x), \quad x = 1, 2, \ldots,$$

с целыми коэффициентами, $a_0 \neq 0$.

Обозначим через $q(m)$ наибольший простой делитель, а через $\nu(m)$ — число различных простых делителей целого m (полагаем $q(0) = \infty$, $\nu(0) = \infty$) и для натурального N положим

$$Q(N) = q(u(N)), \quad \omega(N) = \nu\left(\prod\nolimits_{x=1}^{*N} u(x)\right),$$
$$P(N) = q\left(\prod\nolimits_{x=1}^{*N} u(x)\right),$$

где Π^* означает, что из произведения исключены нулевые сомножители.

А. О. Гельфонд [1] доказал, что

$$\lim_{N\to\infty} \omega(N) = \infty \qquad (1)$$

(в этой и указанных далее работах на последовательность U накладывались некоторые естественные условия невырожденности). В [2] при $n = 2$, а в [3] при любом $n \geqslant 2$ соотношение (1) было получено при более широких, чем в [1], предположениях и более элементарно.

В [4] доказано, что

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \nu\,(u\,(N)) = \infty.$$

В дальнейшем c означает некоторую положительную постоянную, зависящую только от U, в разных местах, вообще говоря, разную. Известна гипотеза, что при $N \to \infty$

$$Q\,(N) \to \infty. \tag{2}$$

В [5] был сделан шаг в направлении этой гипотезы и доказано, что (2) выполняется для последовательности N с асимптотической плотностью 1. В [6] этот результат был усилен и доказано, что при тех же условиях соотношение (2) можно заменить на неравенство $Q\,(N) \geqslant cN^{\rho}$ с некоторым $\rho > 0$, а для более узкого класса последовательностей установлена оценка $Q\,(N) \geqslant c \ln N$, справедливая при всех натуральных N. Кроме того, в [6] были получены оценки

$$\omega\,(N) \geqslant cN^{\delta_n}, \quad P\,(N) \geqslant cN^{\delta_n} \ln N,$$

где $\delta_n = (2^{n-2} + 1)^{-1}$.

Здесь получены некоторые новые результаты о поведении величин $Q\,(N)$, $\omega\,(N)$, $P\,(N)$, а также некоторых других. При этом использованы оценки сумм характеров из [7] и один прием из [8].

Полученные результаты применяются к исследованию свойств числителей и знаменателей подходящих дробей некоторых квадратичных иррациональностей.

2. Пусть p — простое число, $(p,\ a_0) = 1$. Тогда найдутся такие натуральные $\tau_p \leqslant p^n - 1$ и $t_p \mid \tau_p$, называемые периодом и приведенным периодом соответственно, что

$$u\,(x + \tau_p) \equiv u\,(x) \pmod p,$$

$$x = 1,\ 2,\ldots, \tag{3}$$

$$u\,(x + t_p) \equiv g^{\delta} u\,(x) \pmod p,$$

где $d = \tau_p/t_p$, $\delta = (p-1)/d$, а g — некоторый первообразный корень по модулю p (см. [7, 9]).

ЛЕММА 1. *При всех целых a справедлива оценка*

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{t_p} e^{2\pi i\varphi_1/p} e^{2\pi i\varphi_2/t_p}\right| \leqslant p^{n/2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{t_p} e^{2\pi i\varphi_1/p}e^{2\pi i\varphi_2/t_p}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{d}\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{\nu=1}^{d}\sum_{x=1}^{t_p} e^{2\pi i\varphi_3/p}e^{2\pi i\varphi_2/t_p}\right| =$$

$$= \frac{1}{d}\left|\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{\nu=1}^{d}\sum_{x=1}^{t_p} e^{2\pi i\varphi_4/p}e^{2\pi i\varphi_5/t_p}\right| =$$

$$= \frac{1}{d}\left|\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{x=1}^{\tau_p} e^{2\pi i\varphi_1/p}e^{2\pi i\varphi_6/\tau_p}\right| \leqslant p^{n/2},$$

где $\varphi_1 = \lambda u\,(x)$, $\varphi_2 = ax$, $\varphi_3 = \lambda g^{\nu\delta}u\,(x)$, $\varphi_4 = \lambda u\,(x + \nu t_p)$, $\varphi_5 = a\,(x + \nu t_p)$, $\varphi_6 = adx$, в силу леммы 2 из [7].

Для натуральных M и L, $M \leqslant L$, обозначим через $T_p\,(M, L)$ число решений сравнения

$$u\,(L + x - y) \equiv 0 \pmod p, \quad 1 \leqslant x,\ y \leqslant M.$$

ЛЕММА 2. *При* $L + M \leqslant t_p$ *справедлива оценка*

$$|\,T_p\,(L,\ M) - M^2/p\,| \leqslant Mp^{n/2-1}.$$

Доказательство. В силу леммы 1 имеем

$$|\,T_p(M, L) - M^2/p\,| = \frac{1}{p}\left|\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{x,\,y=1}^{M} e^{2\pi i\varphi_7/p}\right| =$$

$$= \frac{1}{pt_p}\left|\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{z=1}^{t_p} e^{2\pi i\varphi_8/p}\sum_{a=1}^{t_p}\sum_{x,\,y=1}^{M} e^{2\pi i\varphi_9/t_p}\right| =$$

$$= \frac{1}{pt_p}\left|\sum_{a=1}^{t_p}\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{z=1}^{t_p} e^{2\pi i\varphi_8/p}e^{2\pi i\varphi_{10}/t_p}\sum_{x,\,y=1}^{M} e^{2\pi i\varphi_{11}/t_p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{pt_p}\sum_{a=1}^{t_p}\left|\sum_{\lambda=1}^{p-1}\sum_{z=1}^{t_p} e^{2\pi i\varphi_8/p}e^{2\pi i\varphi_{10}/t_p}\right| \cdot$$

$$\cdot\left|\sum_{x=1}^{M} e^{2\pi i\varphi_2/t_p}\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{pt_p}\,p^{n/2}\sum_{a=1}^{t_p}\left|\sum_{x=1}^{M} e^{2\pi i\varphi_2/t_p}\right|^2 = p^{n/2-1}M,$$

где $\varphi_7 = \lambda u\,(L + x - y)$, $\varphi_8 = \lambda u\,(z)$, $\varphi_9 = a\,(Z - L - x + y)$, $\varphi_{10} = az$, $\varphi_{11} = a\,(y - x)$. Лемма доказана.

3. Всюду в дальнейшем будем рассматривать последовательности U, содержащие только конечное число нулевых элементов, т. е. удовлетворяющие условию

$$u\,(x) \neq 0, \quad x \geqslant x_0. \tag{4}$$

Существует целый ряд работ, где это соотношение доказывается для достаточно широких классов последовательностей (см. [5, 9]).

Простое число p будем называть делителем последовательности U, если p делит некоторый ее ненулевой элемент $u(x) \neq 0$, и наименьшее такое x обозначим через I_p.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого делителя p последовательности U справедлива оценка*

$$I_p \leqslant cp^{n/2}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $I_p \leqslant t_p \leqslant \tau_p \leqslant p^n - 1$. Поэтому при $p \leqslant a_0$ теорема очевидна. Пусть, далее, $(p, a_0) = 1$. Положим $M = [(I_p - x_0)/2]$, $L = M + x_0$. Тогда при $1 \leqslant x, y \leqslant M$ выполнено неравенство $x_0 \leqslant L + x - y \leqslant I_p - 1$ и, следовательно, $T_p(M, L) = 0$. Применяя лемму 2, получаем $M^2/p \leqslant Mp^{n/2-1}$, $M \leqslant p^{n/2}$, $I_p \leqslant cp^{n/2}$.

Следствие 1. *Если множество делителей последовательности U бесконечно, то для бесконечного множества натуральных N*

$$Q(N) \geqslant cN^{2/n}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 $Q(I_p) \geqslant p \geqslant cI_p^{2/n}$, а в силу (4) и неравенства $\ln p \leqslant \ln|u(I_p)| \leqslant cI_p$ получаем $I_p \to \infty$ при $p \to \infty$.

Следствие 2. *Если $u(1) = 0$, то $\omega(N) \geqslant cN^{2/n} \cdot \ln^{-1} N$.*

Доказательство. Из (3) вытекает, что множество делителей последовательности U совпадает с множеством всех простых чисел. Сформулированная оценка вытекает теперь из теоремы 1 и асимптотического закона распределения простых чисел.

Следствие 3. *Если $u(1) = 0$, то $P(N) \geqslant cN^{2/n}$.*

Доказательство. Имеем $P(N) \geqslant c\omega(N) \cdot \ln \omega(N) \geqslant cN^{2/n}$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $u(1) = 0$, то для бесконечного множества натуральных N*

$$\nu(u(N)) \geqslant c \ln N / \ln \ln N.$$

Доказательство. Из условий теоремы и соотношения (3) вытекает, что при любом целом $k \geqslant 0$

$$u(1 + k\tau_p) \equiv u(1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Поэтому, обозначив

$$P_r = \prod_{\nu=1}^{r} p_\nu, \quad T_r = \prod_{\nu=1}^{r} \tau_{p_\nu},$$

где произведение распространено на первые r простых чисел, получим $u(1 + T_r) \equiv 0 \pmod{P_r}$, следовательно, $\nu(u(1 + T_r)) \geqslant r$. Далее,

$$\ln T_r = \sum_{\nu=1}^{r} \ln \tau_{p_\nu} \leqslant n \sum_{\nu=1}^{r} \ln p_\nu \leqslant cr \ln r,$$
$$r \geqslant c \ln T_r / \ln \ln T_r,$$

тем самым теорема доказана.

4. В заключение покажем, что полученные результаты могут быть применены к последовательностям числителей и знаменателей подходящих дробей квадратичных иррациональностей, которые имеют чисто периодическую последовательность неполных частных (см., например, [10]). В самом деле, знаменатели указанных дробей удовлетворяют соотношению вида

$$q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1,$$
$$q_x = a_x q_{x-1} + q_{x-2}, \quad x = 1, 2, \ldots,$$

где a_x — периодическая последовательность целых чисел с некоторым периодом m. Но тогда (см. [11]) они удовлетворяют линейному рекуррентному уравнению с постоянными коэффициентами порядка $2m$. Таким образом, для них справедливы все доказанные в настоящей работе утверждения, в частности,

$$\nu\left(\prod_{x=1}^{N} q_x\right) \geqslant cN^{1/m}.$$

Аналогичное верно и для последовательности числителей.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

Поступило
27.06.83

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гельфонд А. О. Избранные труды.— М.: Наука, 1973.
[2] Ward M. Prime divisors of second order recurring sequences.— Duke Math. J., 1954, v. 21, p. 607—614.
[3] Loxton R. R. On a problem of M. Ward.— Fibonacci Quart., 1974, v. 12, № 1, p. 41—44.
[4] Shapiro H. N., Sparer G. H. Composite values of exponential and related sequences.— Commun. Pure and Appl. Math., 1972, v. 35, № 5, p. 569—615.

[5] Loxton J. H., van der Poorten A. J. On the growth of recurrence sequences.— Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1977, v. 81, № 3, p. 469—476.
[6] Шпарлинский И. Е. О простых делителях рекуррентных последовательностей.— Изв. вузов. Математика, 1980, № 4, с. 100—103.
[7] Шпарлинский И. Е. Распределение невычетов и первообразных корней в рекуррентных последовательностях.— Математические заметки, 1978, т. 24, № 5, с. 603—613.
[8] Tietäväinen A. On the solvability of equations in incomplete finite fields.— Annales Universitatis Turkuensis, A, 1967, v. 102, p. 3—12.
[9] Нечаев В. И. Рекуррентные последовательности.— Учен. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, 1971, т. 375, с. 103—123.
[10] Ленг С. Введение в теорию диофантовых приближений.— М.: Мир, 1970.
[11] Нечаев В. И. Линейные сравнения по степени простого идеала и линейные рекуррентные последовательности.— Учен. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, 1971, т. 375, с. 124—132.