Е. С. Жуковский, Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина, *Алгебра и анализ*, 2018, том 30, выпуск 1, 96–127

Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №1

ОБ УПОРЯДОЧЕННО НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ЧАПЛЫГИНА

© Е. С. ЖУКОВСКИЙ

Статья продолжает исследование A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy (Topology and its Applications. 2015. V. 179. №1) накрывающих отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах. В статье определено понятие множества упорядоченного накрывания, исследовано множество упорядоченного накрывания оператора Немыцкого в пространстве измеримых существенно ограниченных функций. Рассмотрено уравнение $\psi(x,x) = y$ с антитонным по второму аргументу отображением ψ. В терминах свойств множества упорядоченного накрывания отображения ψ по первому аргументу получена теорема о существовании решений, их оценках, о существовании нижнего решения. Перечисленные результаты применены к неявному интегральному уравнению, получены утверждения об интегральных неравенствах типа теоремы Чаплыгина.

Введение

В теории уравнений важную роль играют оценки решений. Одним из наиболее распространенных приемов получения оценок является применение теорем о неравенствах. Первые результаты о дифференциальных неравенствах получены в 1919 г. С. А. Чаплыгиным [1]. Эти результаты стали основой известного метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Начиная с 50-х годов 20 века дифференциальным и интегральным неравенствам посвящается большое количество работ; привлечению внимания к этой тематике во многом способствовала статья Н. Н. Лузина [2] (содержащая изложение доклада в Институте автоматики и телемеханики АН СССР 12.12.1941), посвященная "развитию

Ключевые слова: разрешимость уравнений в упорядоченных пространствах, упорядоченно накрывающие отображения, неявное интегральное уравнение, теоремы типа Чаплыгина об интегральных неравенствах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (Проект №15-11-10021) — §§1–3, Минобрнауки России (Задание №3.8515.2017 / БЧ) — §4 и Программы РУДН "5–100" — §5.

идей С. А. Чаплыгина в области приближенного интегрирования". Общие утверждения об интегральных и дифференциальных неравенствах получены Н. В. Азбелевым (см. [3, раздел 1]). Дальнейшее развитие теории дифференциальных и интегральных неравенств основывалось на широком использовании методов функционального анализа, утверждений об операторных уравнениях в упорядоченных пространствах. Этот аппарат позволил получить утверждения о функционально-дифференциальных, функционально-интегральных неравенствах в различных функциональных пространствах.

Основные известные утверждения типа теоремы Чаплыгина о неравенствах относятся к дифференциальным уравнениям, разрешенным относительно производной (линейным и нелинейным обыкновенным, с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальным и др.), и к интегральным уравнениям, разрешенным относительно неизвестной функции (линейным уравнениям второго рода, нелинейным уравнениям Урысона, Гаммерштейна, Вольтерры и др.) — так называемым, явным уравнениям. В ряде работ условия разрешимости этих уравнений и оценки их решений получены на основании принципов неподвижной точки отображений упорядоченных пространств. Предложенное в [4] понятие упорядоченного накрывания и доказанные в этой работе принципы точки совпадения накрывающего и монотонного отображений открывают возможности исследования неявных уравнений.

В данной работе предлагается распространение понятия упорядоченного накрывания, доказываются утверждения об операторных неравенствах неявного вида. Эти результаты применяются к исследованию неявных интегральных уравнений, получению для них теорем типа Чаплыгина о неравенствах.

§1. Основные понятия

Упорядоченное пространство, т.е. множество X с заданным на нем порядком $\preceq$ обозначаем через $(X,\preceq)$ или X. Для элементов $u,v\in X$, $u\neq v$, очевидно, возможны три ситуации: либо $u\prec v$, либо $v\prec u$, либо u,v не сравнимы. Множество $S\subset X$ называют *линейно упорядоченным* или *цепью*, если для любых его двух элементов $u,v\in S$, $u\neq v$ выполнено $u\prec v$ или $v\prec u$. Пусть $u,v\in X$, $V\subset X$; будем обозначать

$$O_X(u)\doteq\{x\in X:\ x\preceq u\},$$
$$[u,v]_X\doteq\{x\in X:\ v\preceq x\preceq u\},$$
$$\mathrm{Low}_X(V)\doteq\{x\in X:\ x\preceq v\quad\forall v\in V\}=\bigcap_{v\in V}O_X(v).$$

Пусть заданы упорядоченные пространства $(X,\preceq)$, $(Y,\preceq)$.

В работе [4] введено следующее определение.

Определение 1. Отображение $f : X \to Y$ называем *упорядоченно накрывающим множество* $W \subset Y$, если если для любого $u \in X$ выполнено включение
$$O_Y\big(f(u)\big) \cap W \subset f\big(O_X(u)\big);$$
или, что тоже самое,
$$\forall\, u \in X \quad \forall\, y \in W \quad y \preceq f(u) \quad \Rightarrow \quad \exists x \in X \quad f(x) = y \;\;\&\;\; x \preceq u.$$
Отображение, упорядоченно накрывающее все пространство Y, называем *упорядоченно накрывающим.*

В данной работе используется несколько более общее определение свойства упорядоченного накрывания.

Определение 2. Назовем *множеством упорядоченного накрывания отображения* $f : X \to Y$ совокупность $\mathfrak{B}(f) \subset X \times Y$ всех пар (u,y), удовлетворяющих условию: либо $y \not\preceq f(u)$; либо $y \preceq f(u)$ и тогда существует такой $x \in X$, что выполнены соотношения $f(x) = y$, $x \preceq u$.

Заметим, что множество $\mathfrak{B}(f)$ упорядоченного накрывания любого отображения $f : X \to Y$ не пусто: для любых элементов $u,x \in X$, удовлетворяющих неравенству $x \preceq u$, имеем $(u, f(x)) \in \mathfrak{B}(f)$, в частности, $(u, f(u)) \in \mathfrak{B}(f)$ для всех $u \in X$. Далее, легко видеть, что свойство упорядоченного накрывания множества $W \subset Y$ отображением $f : X \to Y$ равносильно вложению $\mathfrak{B}(f) \supset X \times W$, а свойство упорядоченного накрывания — равенству $\mathfrak{B}(f) = X \times Y$.

Рассмотрим простейшие примеры нахождения множеств упорядоченного накрывания для вещественных функций.

Итак, пусть $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Определим множества
$$\mathrm{epi}(f) \doteq \{(u,y) \in D \times \mathbb{R} : y \geqslant f(u)\},$$
$$\mathrm{hyp}(f) \doteq \{(u,y) \in D \times \mathbb{R} : y \leqslant f(u)\},$$
$$\mathrm{C}(f) \doteq \{\, (u,y) \in D \times \mathbb{R} : y \in f\big(D \cap (-\infty, u]\big)\}.$$
(множества $\mathrm{epi}(f)$, $\mathrm{hyp}(f)$ называют надграфиком и подграфиком функции f).

Пример 1. Для произвольной функции $f : D \to \mathbb{R}$ непосредственно из определения 2 получаем следующее представление множества упорядоченного накрывания:
$$\mathfrak{B}(f) = \mathrm{epi}(f) \cup \Big(\mathrm{hyp}(f) \cap \mathrm{C}(f)\Big).$$

Точно следуя определению 2, здесь надграфик следовало заменить множеством всех пар (u, y), удовлетворяющих строгому неравенству $y > f(u)$. Приведенное определение этого множества с помощью нестрогого неравенства $y \geqslant f(u)$ также правомерно, так как при любом $u \in D$ выполнено $\big(u, f(u)\big) \in \mathfrak{B}(f)$ (и в дальнейшем нам будет удобнее пользоваться именно таким определением).

Выделим две крайних ситуации, в которых множество $\mathfrak{B}(f)$ максимально и минимально. Если функция f не возрастает, то $\mathfrak{B}(f) = \mathrm{epi}(f)$, если же f не убывает, то $\mathfrak{B}(f) = \mathrm{epi}(f) \cup \big(D \times f(D)\big)$.

Пример 2. Пусть $D = \mathbb{R}$. Для непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множество $\mathfrak{B}(f)$ состоит из всевозможных пар (u, y) таких, что выполнено неравенство $y \geqslant \eta(u) \doteq \inf_{x \in (-\infty, u]} f(x)$ в том случае, когда этот инфимум достигается, т.е. $\eta(u) \in f\big((-\infty, u]\big)$, и выполнено $y > \eta(u)$, если $\eta(u) \notin f\big((-\infty, u]\big)$. Это прямо следует из определения 2. Таким образом, получаем:

1). Множеством упорядоченного накрывания линейной функции $f(x) = ax$ при $a > 0$ является вся плоскость $\mathfrak{B}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, т.е. это отображение упорядоченно накрывающее. Если же $a \leqslant 0$, то множеством упорядоченного накрывания линейной функции является ее надграфик.

2). Для квадратичной функции $f(x) = ax^2$ в случае $a \geqslant 0$ имеем

$$\mathfrak{B}(f) = \{(u, y) \ : \ y \geqslant \widehat{f}(u)\}, \text{ где } \widehat{f}(u) = \begin{cases} ax^2 & \text{при}\, x < 0, \\ 0 & \text{при}\, x \geqslant 0. \end{cases}$$

Если $a < 0$, то $\mathfrak{B}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, т.е. данная функция упорядоченно накрывающая (и, отметим, при этом не является монотонной).

3). Множеством упорядоченного накрывания функции $f(x) = \sin x$ является полуплоскость $\mathbb{R} \times [-1, +\infty)$.

4). Для показательной функции $f(x) = a^x$ с основанием $a > 1$ имеем $\mathfrak{B}(f) = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$; а если $0 < a < 1$, то $\mathfrak{B}(f) = \mathrm{epi}(f)$.

Пример 3. Пусть $D = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ или $D = [\mathcal{A}, +\infty)$ (где $\mathcal{A} \neq -\infty$), и пусть функция $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна. Определим функцию $f_{\min} : D \to \mathbb{R}$ равенством $f_{\min}(u) = \min_{x \in [\mathcal{A}, u]} f(x)$. Тогда $\mathfrak{B}(f) = \mathrm{epi}(f_{\min})$.

Далее в §3 будет получено множество упорядоченного накрывания для одного класса отображений функциональных пространств.

Напомним (см. [5, п. 21.1]), что отображение $f : X \to Y$ называют *антитонным на* $W \subset X$, если для любых $x, u \in W$ из $x \succeq u$ следует $f(x) \preceq f(u)$. Антитонное на всем X отображение называют *антитонным*. Нам потребуется также следующее определение.

Определение 3. Отображение $f : X \to Y$ называем *антитонным в точке $u \in X$ справа*, если для произвольного $x \in X$ такого, что $x \succeq u$, выполнено $f(x) \preceq f(u)$.

§2. Утверждения об операторных неравенствах неявного вида

Пусть определено отображение $\psi : X^2 \to Y$, которое по второму аргументу является антитонным на некотором множестве (или антитонным справа в некоторых точках), а при фиксированном втором аргументе $x \in X$ известно множество упорядоченного накрывания отображения $\psi(\,\cdot\,, x) : X \to Y$; и пусть задан элемент $y \in Y$. Сформулируем условия разрешимости уравнения

$$\psi(x, x) = y. \tag{1}$$

Определим отображение $f : X \to Y$, $f(x) \doteq \psi(x, x)$.

Теорема 1. *Пусть существует такой элемент $u_0 \in X$, что $f(u_0) \succeq y$, и выполнены условия:*

(a) *при любом $x \in O_X(u_0)$ справедливо включение $(x, y) \in \mathfrak{B}(\psi(\,\cdot\,, x))$, где $\mathfrak{B}(\psi(\,\cdot\,, x))$ есть множество упорядоченного накрывания отображения $\psi(\,\cdot\,, x) : X \to Y$;*

(b) *при любом $x \in O_X(u_0)$ отображение $\psi(x, \cdot\,) : X \to Y$ является антитонным на множестве $[x, u_0]_X$;*

(c) *любая цепь $S \subset O_X(u_0)$, такая что*

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in S \quad \psi(x, x) \succeq y, \\ &\forall\, x_1, x_2 \in S \quad x_1 \prec x_2 \;\;\Rightarrow\;\; \psi(x_1, x_2) \preceq y, \end{aligned} \tag{2}$$

ограничена снизу, т.е. $\mathrm{Low}(S) \neq \varnothing$, и существует нижняя граница $\omega \in \mathrm{Low}(S)$, удовлетворяющая неравенству $f(\omega) \succeq y$.

Тогда множество решений уравнения (1) не пусто, в нем существует минимальный элемент, который принадлежит $O_X(u_0)$.

Доказательство. Определим множество

$$U_0 = \{x \in O_X(u_0) :\; f(x) \succeq y\}.$$

Это множество не пусто, $u_0 \in U_0$. Определим на U_0 бинарное отношение $\trianglelefteq$, полагая для $v, u \in U_0$ выполненным $v \trianglelefteq u$, если $v = u$, или если $v \prec u$ и $\psi(v, u) \preceq y$. Покажем, что это отношение определяет порядок на U_0. Достаточно проверить транзитивность. Пусть $v \trianglelefteq u$, $u \trianglelefteq x$, Если $v = u$, или $u = x$, то соотношение $v \trianglelefteq x$ очевидно. Пусть $v \neq u$ и $u \neq x$, тогда $v \prec u \prec x$ и имеют место неравенства

$$\psi(v, u) \preceq y, \quad \psi(u, x) \preceq y.$$

Согласно условию (b) выполнено $\psi(v,x) \preceq \psi(v,u) \preceq y$. Таким образом, $v \trianglelefteq x$.

Согласно теореме Хаусдорфа (см., например, [6, гл. 1]) в $(U_0, \trianglelefteq)$ существует максимальная цепь S, которая содержит точку u_0. В силу предположения (c) эта цепь имеет нижнюю границу w (относительно исходного порядка $\preceq$), и справедливо неравенство $\psi(w,w) \succeq y$.

Покажем, что построенная точка w является решением уравнения (1). Очевидно, $w \in O_X(u_0)$. Из условия (a) следует существование элемента $v \in X$, для которого выполнено

$$\psi(v,w) = y, \quad v \preceq w. \tag{3}$$

Из условия (b) получаем $\psi(v,v) \succeq y$. Для любого элемента $x \in S$ имеем $x \succeq v$, следовательно, в силу предположения (b),

$$\psi(v,x) \preceq \psi(v,u) = y.$$

Итак, $v \in U_0$ и множество $S \cup \{v\} \subset U_0$ относительно отношения $\trianglerighteq$ является цепью, а в силу максимальности цепи S имеем $v \in S$. Поэтому $v \succeq w$. Это неравенство и соотношения (3) означают, что $w = v$, $\psi(w,w) = y$.

Покажем, что найденный элемент $w \in O_X(u_0)$ является минимальным в множестве решений уравнения (1). Предположим противное. Тогда

$$\exists\, z:\ \psi(z,z) = y, \quad z \prec w. \tag{4}$$

Для любого $x \in S$ из неравенства $x \succeq z$ вследствие условия (b) получаем $\psi(z,x) \preceq \psi(z,z) = y$. Следовательно, множество $S \cup \{z\} \subset U_0$ относительно отношения $\trianglerighteq$ является цепью, а в силу максимальности цепи S имеем $z \in S$. Поэтому $z \succeq w$. Полученное неравенство противоречит (4). $\square$

В теореме 1 утверждается существование минимального решения уравнения (1), наименьшего решения может не быть.

Пример 4. Рассмотрим простейшее квадратное уравнение

$$-{x_1}^2 - {x_2}^2 = -1 \tag{5}$$

с двумя действительными неизвестными x_1, x_2. Покажем, что это уравнение удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задан стандартный порядок: для векторов

$$x = (x_1, x_2), \quad u = (u_1, u_2)$$

выполнено $x \leqslant u$ тогда и только тогда, кода $x_1 \leqslant u_1$, $x_2 \leqslant u_2$. Определим отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = -{x_1}^2 - {x_2}^2$. Это отображение упорядоченно накрывающее (имеет множество упорядоченного накрывания $\mathfrak{B}(f) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$). Чтобы представить рассматриваемое уравнение (5) в виде (1), положим $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\psi(x,u) = f(x)$, $y = -1$. Отображение $\psi(\,\cdot\,,u) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ упорядоченно накрывающее, отображение $\psi(x,\,\cdot\,) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ постоянно, и поэтому антитонное. Кроме того, любая цепь S, удовлетворяющая неравенству $-x_1{}^2 - x_2{}^2 \geqslant -1$, ограничена, существует $(\omega_1,\omega_2) = \inf(S)$, и в силу непрерывности функции f выполнено $-\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2 \geqslant -1$. Наконец, определим $u_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$ и заметим, что $f(u_0) = 0 \geqslant -1$. Итак, действительно, выполнены все предположения теоремы 1. Решения уравнения (5) в множестве $O_{\mathbb{R}^2}(u_0)$ это все точки окружности $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$ с неположительными координатами, среди решений нет наименьшего.

Приведем условия, гарантирующие существование наименьшего элемента во множестве решений.

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1 *и, кроме того, для любых* $x_1,x_2 \in O_X(u_0)$ *справедливо*

(d) *если* $f(x_1) = f(x_2) = y$, *то существует элемент* $x \in X$, *удовлетворяющий неравенствам* $x \preceq x_1$, $x \preceq x_2$, $f(x) \succeq y$.

Тогда в множестве решений уравнения (1), *принадлежащих* $O_X(u_0)$, *существует наименьший элемент.*

Доказательство. Покажем, что минимальное в множестве $O_X(u_0)$ решение w уравнения (1) является наименьшим. Если это не верно, то существует еще одно решение $v \in O_X(u_0)$, $v \not\succeq w$. Согласно предположению (d) существует элемент $z \in X$ такой, что $z \preceq w$, $z \preceq v$, $f(z) \succeq y$. Очевидно, выполнено $z \neq w$, иначе $w \preceq v$, что невозможно. Итак, $z \prec w$. Согласно теореме 1 в множестве $O_X(z)$ существует решение уравнения (1), а это противоречит минимальности решения w. □

Замечание 1. Аналогично доказывается, что, если условие (d) выполнено для любых $x_1 \in O_X(u_0)$, $x_2 \in X$, то в множестве всех решений уравнения (1) существует наименьший элемент, и этот элемент принадлежит $O_X(u_0)$.

Теорема 1 представляет условия существования решения ω уравнения (1), удовлетворяющего оценке $\omega \preceq u_0$. Такие утверждения называют теоремами об одностороннем неравенстве. Но теорема 1 позволяет также получить двухстороннее неравенство для решения уравнения (1).

Пусть заданы $v_0,u_0 \in X$, $v_0 \preceq u_0$. Обозначим $V = \{x \in X \;:\; x \succeq v_0\}$ и определим сужение ψ_0 отображения ψ на множество V^2. Положим

$$f_0 : V \to Y, \quad f_0(x) = \psi_0(x,x),$$

т.е. f_0 — это сужение f на множество V. Применив теорему 1 к отображению $\psi_0 : V^2 \to Y$, получим следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть выполнены следующие условия*: $f(v_0) \preceq y \preceq f(u_0)$; $(x, y) \in \mathfrak{B}(\psi_0(\,\cdot\,, x))$ *при любом* $x \in [v_0, u_0]_X$; *отображение*

$$\psi_0(x, \,\cdot\,) : V \to Y$$

является антитонным на множестве $[x, u_0]_X$; *любая цепь* $S \subset [v_0, u_0]_X$ *обладающая свойствами* (2), *имеет нижнюю границу*

$$\omega \in \mathrm{Low}(S) \cap [v_0, u_0]_X,$$

удовлетворяющую неравенству $f(\omega) \succeq y$.

Тогда множество решений уравнения (1), *принадлежащих* $[v_0, u_0]_X$, *не пусто, и в этом множестве существует минимальный элемент.*

В доказательстве теоремы 1 используется теорема Хаусдорфа о существовании максимальной цепи. Приведенные ниже условия позволяют доказать разрешимость уравнения (1) без привлечения теоремы Хаусдорфа и построить решение с помощью итераций (т.е. счетной, а не произвольной цепи). Отметим, что итерации могут использоваться для нахождения приближенных решений.

Итерации начнем с элемента $u_0 \in X$ такого, что $f(u_0) = \psi(u_0, u_0) \succeq y$. Если выполнено предположение (a), то существует элемент $u_1 \in X$, для которого справедливо $\psi(u_1, u_0) = y$, $u_1 \preceq u_0$. Если отображение

$$\psi(u_1, \,\cdot\,) : X \to Y$$

является антитонным в точке u_1 справа, то $\psi(u_1, u_1) \succeq y$, что позволяет повторить приведенные построения и на втором шаге вследствие (a) найти элемент $u_2 \in X$, $u_2 \preceq u_1$, для которого $\psi(u_2, u_1) = y$. В случае если отображение $\psi(u_2, \,\cdot\,) : X \to Y$ антитонное в точке u_2 справа, выполнено $\psi(u_2, u_2) \succeq y$. И т.д. В результате получим последовательность

$$\{u_n\} \subset X : \quad \psi(u_n, u_{n-1}) = y, \quad u_n \preceq u_{n-1} \quad \forall n. \tag{6}$$

Если построенная невозрастающая последовательность имеет инфимум, при переходе к которому сохраняется равенство $\psi(u_n, u_{n-1}) = y$, то этот инфимум является решением уравнения (1). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть существует элемент* $u_0 \in X$, *удовлетворяющий неравенству* $f(u_0) \succeq y$, *справедливо предположение* (a) *и выполнены условия*:

- (e) *при любом* $x \in O_X(u_0)$ *отображение* $\psi(x, \,\cdot\,) : X \to Y$ *является антитонным в точке* x *справа*;
- (f) *любая невозрастающая последовательность* $\{x_n\} \subset O_X(u_0)$ *такая, что при всех* n *выполнено* $\psi(x_n, x_{n-1}) = y$, *имеет точную нижнюю границу* $z = \inf\{x_n\}$, *и справедливо* $\psi(z, z) = y$.

Тогда существует точная нижняя граница $\xi = \inf\{u_n\}$ *последовательности итераций* (6), *и этот элемент* ξ — *решение уравнения* (1).

Теоремы 1, 2 не только позволяют исследовать разрешимость уравнения (1), но и могут трактоваться как признаки упорядоченного накрывания отображения $f : X \to Y$, $f(x) = \psi(x, x)$, или как условия сохранения отображением f свойства упорядоченного накрывания отображения ψ по первому аргументу при антитонных возмущениях по второму аргументу. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1 *или теоремы* 2. *Тогда при любом* $x \in O_X(u_0)$ *выполнено* $(x, y) \in \mathfrak{B}(f)$.

Доказательство. Для произвольного $x \in O_X(u_0)$ справедливо включение $(x, y) \in \mathfrak{B}(\psi(\,\cdot\,, x))$ и возможны две ситуации.

1. Если $\psi(x, x) \not\succeq y$, то $(x, y) \in \mathfrak{B}(f)$;

2. В случае $\psi(x, x) \succeq y$, согласно теоремам 1, 2 (если принять $u_0 = x$), существует такой элемент $u \in X$, что $f(u) = y$ и $x \succeq u$. Полученные соотношения означают принадлежность пары (x, y) множеству упорядоченного накрывания отображения f. □

§3. Множество упорядоченного накрывания оператора Немыцкого

Для применения доказанных утверждений к исследованию интегральных уравнений нам потребуется находить множество упорядоченного накрывания оператора Немыцкого. Здесь получено утверждение, позволяющее определять это множество через множество упорядоченного накрывания соответствующей функции.

Пусть заданы измеримые функции $v_0, u_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $v_0(t) \leqslant u_0(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$. Определим многозначное отображение

$$I_0 : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad I_0(t) = [v_0(t), u_0(t)] \doteq \{\, x : \ v_0(t) \leqslant x \leqslant u_0(t) \}. \qquad (7)$$

Пусть функция $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори (т.е. измерима по первому и непрерывна по второму аргументу). Определим сужение f_0 функции f на множество $\{\, (t, x) : \ t \in [a, b], \ x \in I_0(t) \,\}$. При п.в. $t \in [a, b]$ зададим множества

$$A_{f_0}(t) \doteq \mathrm{epi}(f_0(t, \cdot)) = \{\, (u, y) \in \mathbb{R}^2 : \ u \in I_0(t), \ y \geqslant f(t, u) \,\},$$

$$B_{f_0}(t) \doteq \mathrm{hyp}(f_0(t, \cdot)) = \{\, (u, y) \in \mathbb{R}^2 : \ u \in I_0(t), \ y \leqslant f(t, u) \,\},$$

$$C_{f_0}(t) \doteq \{\, (u, y) \in \mathbb{R}^2 : \ u \in I_0(t), \ \exists x \in [v_0(t), \, u] \ \ f(t, x) = y \,\}.$$

Лемма 1. 1). *При п.в.* $t \in [a, b]$ *множество* $A_{f_0}(t) \cap B_{f_0}(t) \cap C_{f_0}(t)$ *не пусто, множества* $A_{f_0}(t), B_{f_0}(t), C_{f_0}(t) \subset \mathbb{R}^2$ *замкнуты.*

2). *Многозначные отображения* $A_{f_0}, B_{f_0}, C_{f_0} : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *измеримы.*

Доказательство. 1). Для любого $u \in I_0(t)$ пара $\big(u, f(t,u)\big)$ принадлежит каждому из множеств $A_{f_0}(t)$, $B_{f_0}(t)$, $C_{f_0}(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$, т.е. множество $A_{f_0}(t) \cap B_{f_0}(t) \cap C_{f_0}(t)$, действительно, не пусто при п.в. $t \in [a,b]$.

Пусть t — любая точка из $[a,b]$, для которой функция $f(t,\cdot)$ непрерывна. Пусть $\{(u_i,y_i)\} \subset A_{f_0}(t)$ и $u_i \to u$, $y_i \to y$ при $i \to \infty$. При любом натуральном i имеем $u_i \in I_0(t)$, $y_i \geqslant f(t,u_i)$. Тогда $u \in I_0(t)$ и, вследствие непрерывности функции $f(t,\cdot)$, выполнено $y \geqslant f(t,u)$. Таким образом, $(u,y) \in A_{f_0}(t)$, и множество $A_{f_0}(t)$ замкнуто при п.в. $t \in [a,b]$. Аналогично проверяется замкнутость множества $B_{f_0}(t)$.

Пусть теперь $\{(u_i,y_i)\} \subset C_{f_0}(t)$, $u_i \to u$, $y_i \to y$. В этом случае при любом натуральном i выполнено $u_i \in I_0(t)$, и существует $x_i \in [v_0(t),\, u_i]$, для которого справедливо соотношение $f(t,x_i) = y_i$. Из последовательности $\{x_i\}$ выделим сходящуюся подпоследовательность $x_{i_j} \to x$. Тогда $x \in [v_0(t),\, u]$ и $f(t,x) = y$, поэтому множество $C_{f_0}(t)$ также является замкнутым.

2). Докажем, что многозначное отображение $A_{f_0} : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ измеримо. Вследствие равенства
$$A_{f_0}(t) = A_f(t) \cap \big(I_0(t) \times \mathbb{R}\big),$$
где
$$A_f(t) \doteq \operatorname{epi}\big(f(t,\cdot)\big) = \{\,(u,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geqslant f(t,u)\},$$
достаточно показать измеримость отображения $A_f : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$. Итак, докажем, что для произвольного открытого множества $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ его полный прообраз
$$A_{f\,-}^{-1}(\mathcal{D}) \doteq \{t :\ A_f(t) \cap \mathcal{D} \neq \varnothing\}$$
есть измеримое подмножество $[a,b]$.

Множество $\mathcal{D}$ представимо в виде (см. [8, теорема V.4.1]) не более чем счетного объединения дизъюнктных ячеек, т.е. существуют такие числа $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i, \eta_i$, $i = 1,2,\ldots$, $\lambda_i < \mu_i$, $\gamma_i < \eta_i$, что
$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1,2,\ldots} \mathcal{D}_i, \ \text{ где } \mathcal{D}_i = \{(u,y) :\ u \in [\lambda_i,\mu_i),\ y \in [\gamma_i,\eta_i)\}. \tag{8}$$
Для полного прообраза множества $\mathcal{D}_i$ справедливо
$$\begin{aligned} A_{f\,-}^{-1}(\mathcal{D}_i) &= \{t :\ \exists u \in [\lambda_i,\mu_i),\ \ \exists y \in [\gamma_i,\eta_i)\ \ y \geqslant f(t,u)\} \\ &= \{t :\ \eta_i > \min_{u \in [\lambda_i,\mu_i]} f(t,u)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{t :\ \eta_i \geqslant \min_{u \in [\lambda_i,\mu_i]} f(t,u) + \frac{1}{n}\Big\} \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{t :\ \eta_i \geqslant f(t,u_k) + \frac{1}{n}\Big\}, \end{aligned}$$

здесь множество $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ всюду плотно в $[\lambda_i,\mu_i]$. Вследствие измеримости функции $f(\,\cdot\,,u_k):[a,b]\to\mathbb{R}$ множество $\{t:\,\eta_i\geqslant f(t,u_k)+n^{-1}\}$ измеримо при любых k,n. Таким образом, измеримо и множество ${A_f}_{-}^{-1}(\mathcal{D}_i)$, получаемое пересечением и объединением счетной совокупности измеримых множеств. Наконец, измеримость многозначного отображения A_f следует из измеримости множества ${A_f}_{-}^{-1}(\mathcal{D})=\bigcup_{i=1}^{\infty}{A_f}_{-}^{-1}(\mathcal{D}_i)$.

Аналогично устанавливается измеримость многозначного отображения $B_{f_0}:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^2$.

Докажем, что многозначное отображение $C_{f_0}:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^2$ измеримо. Вновь воспользуемся представлением (8) любого открытого множества $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$.

Определим многозначное отображение

$$G_i:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R},\quad G_i(t)\doteq[\lambda_i,\mu_i)\cap I_0(t)$$

и положим

$$\begin{aligned}T_i&\doteq\mathrm{dom}G_i=\{t:\,G_i(t)\neq\varnothing\},\\ T_i^+&\doteq\{t\in T_i:\,\mu_i>u_0(t)\},\\ T_i^-&\doteq\{t\in T_i:\,\mu_i\leqslant u_0(t)\}.\end{aligned}$$

Вследствие измеримости отображений $G_i:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}$, $u_0:[a,b]\to\mathbb{R}$ эти множества являются измеримыми.

Для полного прообраза множества $\mathcal{D}_i$, $i=1,2,\ldots$, справедливо

$$\begin{aligned}{C_{f_0}}_{-}^{-1}(\mathcal{D}_i)&=\{t\in T_i\colon\ \exists u\in G_i(t),\ \ \exists y\in[\gamma_i,\eta_i)\quad y\in f\big(t,[v_0(t),u]\big)\}\\ &=\{t\in T_i^+\colon[\gamma_i,\eta_i)\cap f\big(t,I_0(t)\big)\neq\varnothing\}\\ &\quad\cup\{t\in T_i^-\colon[\gamma_i,\eta_i)\cap f\big(t,[v_0(t),\mu_i)\big)\neq\varnothing\}.\end{aligned}$$

Из этого соотношения следует (см. [7, п. 8.1.2]) измеримость множеств ${C_{f_0}}_{-}^{-1}(\mathcal{D}_i)$ и, следовательно, множества ${C_{f_0}}_{-}^{-1}(\mathcal{D})$. □

Установленные в лемме 1 свойства отображений A_{f_0}, B_{f_0}, C_{f_0} можно использовать для нахождения множества упорядоченного накрывания оператора Немыцкого, порожденного функцией f_0, так как множество упорядоченного накрывания функции $f_0(t,\,\cdot\,):I_0(t)\to\mathbb{R}$ представимо в виде (см. пример 1)

$$\mathfrak{B}\big(f_0(t,\,\cdot\,)\big)=A_{f_0}(t)\cup\Big(B_{f_0}(t)\cap C_{f_0}(t)\Big),\quad t\in[a,b].\tag{9}$$

Обозначим через μ меру Лебега на $[a,b]$. Для измеримого множества $T\subset[a,b]$ и измеримого многозначного отображения $I:T\rightrightarrows\mathbb{R}$ обозначим $W(T,I)$, $L_\infty(T,I)$ — пространства, соответственно, измеримых и измеримых существенно ограниченных функций, являющихся сечениями отображения I. В этих пространствах определим "обычный" порядок, т.е. для $x, u \in W(T, I)$, или $x, u \in L_\infty(T, I)$ выполнено $x \leqslant u$, если $x(t) \leqslant u(t)$ при п.в. (почти всех) $t \in T$. Под сходимостью в пространствах $W(T, I)$, $L_\infty(T, I)$ будем понимать сходимость почти всюду. В обозначениях пространств опускаем символ T, если $T = [a, b]$, и опускаем I в случае $I(t) \equiv \mathbb{R}$. В частности, W есть пространство измеримых функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, а $L_\infty(I_0)$ — пространство существенно ограниченных сечений многозначного отображения (7).

Для измеримого многозначного отображения $H : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ и измеримой функции $w : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ обозначим

$$T_{w\in H} \doteq \{\, t \in [a, b] : \ w(t) \in H(t) \,\}.$$

Это множество измеримо (см. [7, п. 8.1.2, предложение 6]). Далее, определим множества

$$\mathbb{S}_I[H] \doteq \{\, w \in L_\infty(I) \times W : \ w(t) \in H(t) \ \ \dot{\forall} t \in [a, b] \,\},$$
$$\mathbb{S}_I^+[H] \doteq \{\, w \in L_\infty(I) \times W : \ \mu\big(T_{w\in H}\big) > 0 \,\}$$

(здесь и везде ниже символ $\dot{\forall}$ означает "при почти всех"). В обозначениях этих множеств индекс I не пишем, если $I(t) \equiv \mathbb{R}$.

Определим оператор Немыцкого

$$N_{f_0} : L_\infty(I_0) \to W, \quad (N_{f_0}x)(t) = f_0\big(t, x(t)\big), \ t \in [a, b]. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть* $v_0 \in L_\infty$. *Множество упорядоченного накрывания оператора* (10) *определяется равенством*

$$\mathfrak{B}(N_{f_0}) = \mathbb{S}_{I_0}^+[A_{f_0}] \cup \mathbb{S}_{I_0}[B_{f_0} \cap C_{f_0}]. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $(u, y) \in \mathfrak{B}(N_{f_0})$. Согласно определению 2 возможны две ситуации. Сначала предположим, что $y \not\leqslant N_{f_0}u$. Тогда на некотором множестве положительной меры справедливо $y(t) \geqslant f_0\big(t, u(t)\big)$. Таким образом, $(u, y) \in \mathbb{S}_{I_0}^+[A_{f_0}]$.

Теперь предположим, что $y \leqslant N_{f_0}u$ и существует такой $x \in L_\infty(I_0)$, что $x \leqslant u$ и $y = N_{f_0}x$. Итак, в рассматриваемом случае при п.в. $t \in [a, b]$ выполняются соотношения

$$y(t) \leqslant f_0\big(t, u(t)\big), \quad x(t) \leqslant u(t), \quad y(t) = f_0\big(t, x(t)\big).$$

Это означает, что $(u, y) \in \mathbb{S}_{I_0}[B_{f_0} \cap C_{f_0}]$.

Итак, доказано, что

$$\mathfrak{B}(N_f) \subset \mathbb{S}_{I_0}^+[A_{f_0}] \cup \mathbb{S}_{I_0}[B_{f_0} \cap C_{f_0}].$$

Пусть теперь
$$(u, y) \in \mathbb{S}^+_{I_0}[A_{f_0}] \cup \mathbb{S}_{I_0}[B_{f_0} \cap C_{f_0}].$$
Вновь рассмотрим две ситуации. Если $(u, y) \in \mathbb{S}^+_{I_0}[A_{f_0}]$, то $y(t) \geqslant f_0\big(t, u(t)\big)$ на некотором множестве положительной меры. Следовательно, $y \nleqslant N_{f_0}u$, т.е. $(u, y) \in \mathfrak{B}(N_{f_0})$.

Теперь предположим, что $(u, y) \in \mathbb{S}_{I_0}[B_{f_0} \cap C_{f_0}]$. Тогда при п.в. $t \in [a, b]$ выполнено
$$y(t) \leqslant f_0\big(t, u(t)\big) \quad \text{и} \quad y(t) \in f_0\big(t, \, [v_0(t), \, u(t)]\big).$$
В силу леммы Филиппова [9, п. 1.5.2] существует измеримая функция $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая соотношениям
$$v_0(t) \leqslant x(t) \leqslant u(t), \quad y(t) = f_0\big(t, x(t)\big)$$
при п.в. $t \in [a, b]$. Так как $v_0, u \in L_\infty(I_0)$, то $x \in L_\infty(I_0)$. Таким образом, $(u, y) \in \mathfrak{B}(N_{f_0})$, т.е. доказано вложение $\mathbb{S}_{I_0}[B_{f_0} \cap C_{f_0}] \subset \mathfrak{B}(N_{f_0})$. □

Замечание 2. Теорема 3 справедлива, если областью определения функции $f_0(t, \cdot)$ является луч $I_0(t) = [v_0(t), +\infty)$. В этом случае следует полагать $u_0(t) = +\infty$.

Приведем пример существенности условия $v_0 \in L_\infty$ для представления (11) множества упорядоченного накрывания оператора Немыцкого.

Пример 5. Пусть $f(t, x) = tx$, $v_0(t) = -t^{-1}$, $t \in [0, 1]$. Здесь функция $v_0 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ не является существенно ограниченной. Покажем, что в данном случае теорема 3 не применима к нахождению множества накрывания оператора N_{f_0}. Имеем
$$B_{f_0}(t) \cap C_{f_0}(t) = \{(u, y) \in \mathbb{R}^2 : u \geqslant -t^{-1}, \ -1 \leqslant y \leqslant tu\}.$$
Пара $\big(u(\,\cdot\,), \, y(\,\cdot\,)\big) \in L_\infty(I_0) \times W$ функций $u(t) = 1$, $y(t) = -1$ является сечением многозначного отображения $B_{f_0} \cap C_{f_0} : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$. Однако эта пара не принадлежит множеству $\mathfrak{B}(N_{f_0})$, поскольку уравнение
$$f_0(t, x) = y(t) \ \Leftrightarrow \ tx = -1$$
имеет единственное решение $x(t) = -t^{-1}$, которое не является существенно ограниченным.

Для нахождения множества упорядоченного накрывания оператора Немыцкого в случае, когда функция v_0 не является существенно ограниченной, можно применить следующую схему.

Получим, например, представление множества $\mathfrak{B}(N_f)$ (т.е. будем полагать $v_0(t) \equiv -\infty$, $u_0(t) \equiv +\infty$). Определим функции $v_i(t) \equiv -i$, $i = 1, 2, \ldots$; пусть f_i — сужение функции f на множество $\{(t, x) : t \in [0, 1], \ x \geqslant -i\}$.

К функции f_i теорема 3 применима. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 4. *Множеством упорядоченного накрывания оператора Немыцкого* $N_f : L_\infty \to W$, $(N_f x)(t) = f\big(t, x(t)\big)$, $t \in [a,b]$, *является*

$$\mathfrak{B}(N_f) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\mathbb{S}^+[A_{f_i}] \cup \mathbb{S}[B_{f_i} \cap C_{f_i}]\right),$$

где отображения $A_f, B_f, C_f : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ *заданы равенствами*

$$\begin{aligned} A_{f_i}(t) &\doteq \operatorname{epi}\big(f_i(t,\,\cdot\,)\big),\\ B_{f_i}(t) &\doteq \operatorname{hyp}\big(f_i(t,\,\cdot\,)\big),\\ C_{f_i}(t) &\doteq \{(u,y) : y \in f\big(t,[-i,u]\big),\ u \geqslant -i\}. \end{aligned}$$

Для приложений оказывается удобным следующий признак принадлежности пары измеримых функций u, y множеству упорядоченного накрывания оператора Немыцкого.

Следствие 5. *Пусть* $v_0 \in L_\infty$. *Если для некоторых* $u \in L_\infty(I_0)$, $y \in W$ *п.в. на* $[a,b]$ *выполнено* $\big(u(t), y(t)\big) \in \mathfrak{B}\big(f_0(t,\,\cdot\,)\big)$, *то* $(u,y) \in \mathfrak{B}(N_{f_0})$ *и, следовательно,* $(u,y) \in \mathfrak{B}(N_f)$.

Доказательство. Для функций u, y, удовлетворяющих п.в. на $[a,b]$ включению $\big(u(t), y(t)\big) \in \mathfrak{B}\big(f_0(t,\,\cdot\,)\big)$, из представления (9) множества упорядоченного накрывания функции $f_0(t,\,\cdot\,)$ следует включение

$$\big(u(t), y(t)\big) \in A_{f_0}(t) \cup \Big(B_{f_0}(t) \cap C_{f_0}(t)\Big) \quad \dot{\forall} t \in [a,b].$$

Множество $\big\{t : \big(u(t), y(t)\big) \in A_{f_0}(t)\big\}$ измеримо (см. [7, п. 8.1.2, предложение 6]). Если мера этого множества положительна, то $(u,y) \in \mathbb{S}^+_{I_0}[A_{f_0}]$ и, следовательно, $(u,y) \in \mathfrak{B}(N_f)$. Если же мера этого множества равна нулю, то $\big(u(t), y(t)\big) \in B_{f_0}(t) \cap C_{f_0}(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$. В этом случае справедливо $(u,y) \in \mathbb{S}_{I_0}[B_{f_0} \cap C_{f_0}] \subset \mathfrak{B}(N_f)$. □

Очевидно, что утверждение, обратное к следствию 5, не верно. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 6. Пусть $f(t,x) = -x$. Имеем (см. пример 2)

$$\mathfrak{B}\big(f_0(t,\,\cdot\,)\big) = \{(u,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant -u,\ u \in I_0(t)\}.$$

Поэтому для произвольной функции $u(\,\cdot\,) \in L_\infty(I_0)$ включение

$$\big(u(t), y(t)\big) \in \mathfrak{B}\big(f(t,\,\cdot\,)\big) \quad \dot{\forall} t \in [a,b]$$

равносильно неравенству

$$y(t) \geqslant -u(t) \quad \dot{\forall} t \in [a,b].$$

Но множество $\mathfrak{B}(N_{f_0})$ содержит также еще и функции, удовлетворяющие неравенству $y(t) \geqslant -u(t)$ не на всем отрезке $[a,b]$, а на любом его измеримом подмножестве T, $\mu(T) > 0$.

Приведенный пример иллюстрирует тот факт, что элементами множества упорядоченного накрывания оператора Немыцкого кроме сечений отображения $t \mapsto \mathfrak{B}\big(f(t,\,\cdot\,)\big)$ являются также пары $(u,y) \in L_\infty \times W$ функций, удовлетворяющих неравенству $y(t) \geqslant f\big(t, u(t)\big)$ на любом измеримом подмножестве $T \subset [a,b]$ с мерой $\mu(T) \in (0, b-a)$.

§4. Теорема об интегральном неравенстве

Пусть определены функции $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{K}(\,\cdot\,, x) : [a,b]^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$. В этом параграфе предлагается утверждение о существовании и оценке решения уравнения

$$f\Big(t,\, \int\limits_a^b \mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds,\, x(t)\Big) = y(t), \qquad t \in [a,b]. \tag{12}$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

(g1) функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима;

(g2) при любых $z, x \in \mathbb{R}$ функция $f(\,\cdot\,, z, x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима;

(g3) при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $z \in \mathbb{R}$ функция $f(t, z,\,\cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна;

(g4) при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in \mathbb{R}$ функция $f(t,\,\cdot\,, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна слева;

(g5) при любом $x \in \mathbb{R}$ функция $\mathcal{K}(\,\cdot\,, x) : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ измерима и для любого $t \in [a,b]$ существует конечный $\int_a^b \mathcal{K}(t,s,x)\,ds$;

(g6) при п.в. $(t,s) \in [a,b]^2$ функция $\mathcal{K}(t,s,\,\cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна слева.

Подчеркнем, что функции $f(\,\cdot\,,\,\cdot\,, x)$, $\mathcal{K}$ не обязаны удовлетворять условиям Каратеодори. Тем не менее, приведенные предположения обеспечивают их суперпозиционную измеримость. Это прямо следует из более общего результата [10], или может быть непосредственно доказано на основании представления произвольной измеримой функции $z : [a,b] \to \mathbb{R}$ в виде $z(t) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n(t)$, где функции $z_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ступенчатые и удовлетворяют неравенству $z_n(t) \leqslant z(t)$. Действительно, тогда суперпозиции

$$\mathcal{K}(t,s,z(s)) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}(t,s,z_n(s))$$

и

$$f(t, z(t), x) = \lim_{n\to\infty} f(t, z_n(t), x)$$

при любом $x \in \mathbb{R}$, очевидно, измеримы (соответственно, по плоской и линейной мере) как пределы последовательностей измеримых функций. Отметим также, что предположение непрерывности слева по последнему аргументу любой из функций f, $\mathcal{K}$ можно заменить требованием непрерывности справа.

Решение уравнения (12) будем полагать измеримым и существенно ограниченным.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (g1)–(g6) *и, кроме того, функция* $f(t,\,\cdot\,,x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *при любом* $x\in\mathbb{R}$ *и п.в.* $t\in[a,b]$ *не возрастает, а функция* $\mathcal{K}(t,s,\,\cdot\,):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *при п.в.* $(t,s)\in[a,b]^2$ *не убывает. Пусть найдутся такие* $v_0,u_0\in L_\infty$, *что при п.в.* $t\in[a,b]$ *выполнены неравенства*:

$$v_0(t) \leqslant u_0(t),$$

$$f\Big(t, \int_a^b \mathcal{K}(t,s,v_0(s))\,ds,\, v_0(t)\Big) \leqslant y(t) \leqslant f\big(t, \int_a^b \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds,\, u_0(t)\big). \quad (13)$$

Тогда множество принадлежащих отрезку $[v_0,u_0]_{L_\infty}$ *решений уравнения* (12) *не пусто, и в этом множестве решений есть наименьший элемент.*

Доказательство. Покажем, что для любого $x\in L_\infty$ функция

$$t\in[a,b]\mapsto (Kx)(t) \doteq \int_a^b \mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds \quad (14)$$

принимает конечные значения и является измеримой. Как показано выше, функция

$$(t,s)\in[a,b]^2 \mapsto \kappa(t,s) \doteq \mathcal{K}(t,s,x(s))$$

измерима. При каждом натуральном n определим функцию

$$(t,s)\in[a,b]^2 \mapsto \kappa_n(t,s) \doteq \begin{cases} \kappa(t,s), & \text{если } \kappa(t,s)\in[-n,n],\\ -n, & \text{если } \kappa(t,s)\leqslant -n,\\ n, & \text{если } \kappa(t,s)\geqslant n. \end{cases}$$

Эта функция измерима и ограничена, а следовательно, суммируема. Согласно теореме Фубини [11, XII, §3] функция $t\in[a,b]\mapsto\int_a^b\kappa_n(t,s)\,ds$ измерима. Так как при любом n справедливо неравенство

$$\mathcal{K}(t,s,-r) \leqslant \kappa_n(t,s) \leqslant \mathcal{K}(t,s,r) \quad \dot\forall t\in[a,b], \quad (15)$$

где $r = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|x(t)|$, то вследствие теоремы Лебега [11, XI, §3] при п.в. $t \in [a,b]$ имеет место сходимость $\int_a^b \kappa_n(t,s)\,ds \to \int_a^b \kappa(t,s)\,ds$. Таким образом, функция (14) измерима. Из неравенств (15) и условия (g5) следует, что эта функция принимает конечные значения.

Теперь покажем, что при любых $x \in L_\infty$, $u \in W$ функция

$$t \in [a,b] \mapsto \bigl(N_f(x,u)(t)\bigr) \doteq f\bigl(t, u(t), x(t)\bigr)$$

измерима. Вследствие предположений (g2), (g4) для любого $x \in \mathbb{R}$ функция двух аргументов $f(\,\cdot\,,\,\cdot\,,x)$ по первому из них является измеримой, а по второму — непрерывной слева. Поэтому, как показано выше, для произвольной функции $u \in W$ композиция $f\bigl(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,),x\bigr)$ есть измеримая функция. Далее, в силу (g3) при п.в. $t \in [a,b]$ функция $f\bigl(t,u(t),\,\cdot\,\bigr)$ является непрерывной, и таким образом, композиция $f\bigl(\,\cdot\,,u(\,\cdot\,),x(\,\cdot\,)\bigr)$ есть измеримая функция.

Теперь можем определить отображение

$$\psi : L_\infty \times L_\infty \to W, \quad \psi(x_1,x_2) = N_f(x_1, Kx_2).$$

Покажем, что это отображение удовлетворяет условиям следствия 2.

В силу неубывания функции $f(t,\,\cdot\,,x)$ и невозрастания функции $\mathcal{K}(t,s,\,\cdot\,)$ при каждом $x_1 \in L_\infty$ отображение $\psi(x_1,\,\cdot\,) : L_\infty \to W$ является антитонным. Вследствие непрерывности функции $f(t,v,\,\cdot\,)$ отображение $\psi(\,\cdot\,,x_2) : L_\infty \to W$ является непрерывным (относительно сходимости почти всюду) при каждом $x_2 \in L_\infty$.

Положим

$$I_0 : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad I_0(t) \doteq [v_0(t), +\infty)$$

и определим сужение ψ_0 отображения ψ на $L_\infty(I_0) \times L_\infty(I_0)$. Покажем, что для произвольных $z, x_2 \in [v_0,u_0]_{L_\infty}$ пара (z,y) принадлежит множеству упорядоченного накрывания отображения $\psi_0(\,\cdot\,,x_2) : L_\infty(I_0) \to W$ (в следствии 2 содержится менее “жесткое” предположение: $(z,y) \in \mathfrak{B}(\psi_0(\,\cdot\,,z))$, соответствующее ситуации $z = x_2$).

На множестве $E \doteq \{(t,z) \in [a,b] \times \mathbb{R} : z \geqslant v_0(t)\}$ определим функцию $\varphi_0(t,z) \doteq f\bigl(t,(Kx_2)(t),z\bigr)$. Очевидно, $\bigl(\psi_0(x_1,x_2)\bigr)(t) = \varphi_0\bigl(t,x_1(t)\bigr)$, т.е. ψ_0 как отображение первого аргумента является оператором Немыцкого $N_{\varphi_0} : L_\infty(I_0) \to W$, порожденным функцией φ_0, что позволяет для нахождения его множества упорядоченного накрывания воспользоваться результатами предыдущего параграфа. Имеем

$$\varphi_0\bigl(t,v_0(t)\bigr) = f\bigl(t,(Kx_2)(t),v_0(t)\bigr) \leqslant f\bigl(t,(Kv_0)(t),v_0(t)\bigr) \leqslant y(t).$$

Для любого $z \in [v_0,u_0]_{L_\infty}$, если $\varphi_0(t,z) \leqslant y(t)$, то $(z,y(t)) \in \mathfrak{B}\bigl(\varphi_0(t,\,\cdot\,)\bigr)$. Если же $\varphi_0(t,z) \geqslant y(t)$, то, вследствие непрерывности функции $\varphi_0(t,\,\cdot\,)$, существует такой $x \in [v_0(t), z]$, что $\varphi_0(t,x) = y(t)$; таким образом, и в этом случае $(z, y(t)) \in \mathfrak{B}\big(\varphi_0(t,\cdot)\big)$. Итак, доказано, что при п.в. $t \in [a,b]$ имеет место вложение $[v_0(t), u_0(t)] \times \{y(t)\} \subset \mathfrak{B}\big(\varphi_0(t,\cdot)\big)$. Отсюда, согласно следствию 5, для любого $z \in [v_0, u_0]_{L_\infty}$, выполнено

$$(z, y) \in \mathfrak{B}(N_{\varphi_0}) = \mathfrak{B}\big(\psi_0(\,\cdot\,, x_2)\big).$$

Завершая проверку условий следствия 2, выберем произвольную цепь $S \subset [v_0, u_0]_{L_\infty}$. Вследствие ограниченности снизу эта цепь имеет точную нижнюю грань, пусть $\xi \doteq \inf S$. Существует невозрастающая последовательность $\{x_n\} \subset S$ такая, что $\inf\{x_n\} = \xi$ и $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \xi(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$ (это утверждение следует, например, из более общего результата [4, lemma 1]). Так как согласно предположению (2) должно быть выполнено $\psi_0(x_n, x_n) \geqslant y$, то в силу антитонности отображения $\psi_0(x_n,\cdot)$ имеем неравенство

$$\psi_0(x_n, \xi) \geqslant \psi_0(x_n, x_n) \geqslant y,$$

а вследствие непрерывности $\psi_0(\,\cdot\,, \xi)$ — соотношение

$$\big(\psi_0(\xi,\xi)\big)(t) = \lim_{n\to\infty} \big(\psi_0(x_n,\xi)\big)(t) \geqslant y(t) \quad \dot\forall t \in [a,b].$$

Итак, согласно следствию 2 уравнение (12) имеет решение, принадлежащее отрезку $[v_o, u_0]_{L_\infty}$.

Для доказательства существования наименьшего в $[v_o, u_0]_{L_\infty}$ решения уравнения (12) воспользуемся следствием 1. Проверим предположение (d). Пусть для некоторых $x_1, x_2 \in [v_0, u_0]_{L_\infty}$ выполнено

$$\psi(x_1, x_1) = \psi(x_2, x_2) = y.$$

Положим $x = \inf\{x_1, x_2\}$. Очевидно, $x \in [v_0, u_0]_{L_\infty}$. При каждом $t \in [a,b]$ имеем $x(t) = x_1(t)$ или $x(t) = x_2(t)$. Пусть при некотором t выполнено $x(t) = x_1(t)$. Тогда

$$\big(\psi(x,x)\big)(t) = f\big(t, (Kx)(t), x_1(t)\big) \geqslant f\big(t, (Kx_1)(t), x_1(t)\big) = y(t).$$

Итак, предположение (d) действительно выполнено, следовательно, среди решений, принадлежащих $[v_0, u_0]_{L_\infty}$, есть наименьшее. □

Замечание 3. Условия теоремы 4 можно ослабить: потребовать, чтобы при п.в. $(t,s) \in [a,b]^2$ функция $\mathcal{K}(t,s,\cdot)$ не убывала на $I(s) \doteq [v_0(s), u_0(s)]$, а функция $f(t,\cdot,x)$ не возрастала на $(KI)(t) \doteq [(Kv_0)(t), (Ku_0(t)]$ при любом $x \in I(t)$ и п.в. $t \in [a,b]$.

Действительно, определим функции

$$\Pi_I(t,x) \doteq \begin{cases} x, & \text{если } x \in I(t), \\ v_0(t), & \text{если } x < v_0(t), \\ u_0(t), & \text{если } x > u_0(t); \end{cases}$$

$$\Pi_{KI}(t,z) \doteq \begin{cases} z, & \text{если } z \in (KI)(t), \\ (Kv_0)(t), & \text{если } z < (Kv_0)(t)(t), \\ (Ku_0)(t), & \text{если } z > (Ku_0)(t)(t); \end{cases}$$

$$f_\Pi(t,z,x) \doteq f(t,\Pi_{KI}(t,z),\Pi_I(t,x)); \quad \mathcal{K}_\Pi(t,s,x) \doteq \mathcal{K}(t,s,\Pi_I(s,x));$$

тогда при перечисленных “ослабленных” предположениях к уравнению

$$f_\Pi\big(t, \int\limits_a^b \mathcal{K}_\Pi(t,s,x(s))\,ds,\, x(t)\big) = y(t) \tag{16}$$

применима теорема 4, и на множестве $[v_0,u_0]_{L_\infty}$ решения уравнений (16) и (12) совпадают.

Замечание 4. Утверждение теоремы 4 не изменится, если вместо неубывания $\mathcal{K}(t,s,\,\cdot\,)$ и невозрастания $f(t,x,\,\cdot\,)$ потребовать, чтобы, наоборот, функция $\mathcal{K}(t,s,\,\cdot\,)$ не возрастала, а функция $f(t,x,\,\cdot\,)$ не убывала.

Замечание 5. В условиях теоремы 4 в множестве решений уравнения (12), принадлежащих отрезку $[v_0,u_0]_{L_\infty}$, наряду с наименьшим есть и наибольший элемент. Это прямо следует из теоремы 4, если в пространствах L_∞, W определить обратный порядок $\geqslant$.

Применение теоремы 4 требует определения функций v_0, u_0, удовлетворяющих неравенствам (13). Нахождение таких функций можно свести к решению алгебраических неравенств, если задать некоторый $z \in L_\infty$ и искать эти функции в виде $v_0(t) = \underline{r}z(t)$, $u_0(t) = \overline{r}z(t)$. Здесь числа $\underline{r}$, $\overline{r}$ являются решениями неравенств

$$\Gamma(t,\underline{r}) \leqslant y(t) \leqslant \Gamma(t,\overline{r}), \quad t \in [a,b],$$

где функция $\Gamma(t,r) \doteq f\big(t, \int_a^b \mathcal{K}(t,s,rz(s))\,ds,\, rz(t)\big)$.

Теорема 4 непосредственно применима к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений. Приведем пример, иллюстрирующий такие ее приложения.

Пример 7. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$f\left(t,\, x\big(g(t)\big),\, \dot{x}(t) - a(t)x(t)\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Здесь измеримые функции $a, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ являются периодическими с периодом $T > 0$; выполнено неравенство $\int_0^T a(\zeta)d\zeta < 0$; функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ измерима и T-периодична по первому аргументу, непрерывна слева и не возрастает по второму аргументу, непрерывна по третьему аргументу. Нас интересует проблема существования T-периодического решения уравнения (17). Будем требовать от искомого периодического решения, чтобы оно было абсолютно непрерывной функцией, производная которой существенно ограничена.

Определим функцию $g_T : [0,T] \to [0,T]$ равенством $g_T(t) = T\{T^{-1}t\}$, где скобки $\{\,\cdot\,\}$ обозначают операцию вычисления дробной части действительного числа. Уравнение (17) имеет T-периодическое решение тогда и только тогда, когда разрешима краевая задача

$$f\left(t,\, x\bigl(g_T(t)\bigr),\, \dot{x}(t) - a(t)x(t)\right) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x(T) - x(0) = 0. \tag{18}$$

Замена

$$\dot{x} - a(t)x = z(t), \quad t \in [0,T], \quad x(T) - x(0) = 0. \tag{19}$$

превращает задачу (18) в интегральное уравнение

$$f\Bigl(t,\, \int\limits_a^T W\bigl(g(t), s\bigr) z(s)\, ds,\, z(t)\Bigr) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{20}$$

относительно неизвестной существенно ограниченной на $[0,T]$ функции z; здесь

$$W(t,s) = \begin{cases} \Bigl(1 - \exp\Bigl(\int\limits_0^T a(\zeta)\, d\zeta\Bigr)\Bigr)^{-1} \exp\Bigl(\int\limits_s^t a(\zeta)\, d\zeta\Bigr) & \text{при } s \leqslant t, \\ \Bigl(\exp\Bigl(-\int\limits_0^T a(\zeta)\, d\zeta\Bigr) - 1\Bigr)^{-1} \exp\Bigl(-\int\limits_t^s a(\zeta)\, d\zeta\Bigr) & \text{при } s > t, \end{cases}$$

есть функция Грина краевой задачи (19). Отметим, что для этой функции справедлива оценка

$$0 \leqslant W(t,s) \leqslant \Bigl(1 - \exp\Bigl(\int\limits_0^T a(\zeta)\, d\zeta\Bigr)\Bigr)^{-1}, \quad \forall (t,s) \in [0,T]^2. \tag{21}$$

Таким образом, проблема существования периодического решения уравнения (17) свелась к исследованию разрешимости интегрального уравнения (20). Предположим, что существуют такие числа $\underline{r}$, $\overline{r}$, что

$$\underline{r} \leqslant 0 \leqslant \overline{r}, \quad f\bigl(t,\, \lambda\underline{r},\, \underline{r}\bigr) \leqslant 0 \leqslant f\left(t,\, \lambda\overline{r},\, \overline{r}\right),$$

где

$$\lambda = \Big(1 - \exp\Big(\int_0^T a(\zeta)\,d\zeta\Big)\Big)^{-1} T.$$

Тогда вследствие оценки (21) функции $v_0 \equiv \underline{r}$, $u_0 \equiv \overline{r}$ удовлетворяют неравенствам (13), а для уравнения (20) выполнены все предположения теоремы 4. Следовательно, уравнение (17) имеет T-периодическое решение. Кроме того, согласно теореме 4 в множестве решений, заключенных между константами $\underline{r}$, $\overline{r}$, есть наибольшее и наименьшее T-периодические решения.

Из приведенных здесь условий существования периодического решения уравнения (17) прямо следуют полученные в [13, Пример 38.3] условия существования периодического решения разрешенного относительно производной дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием.

Частным случаем уравнения (12) является "классическое" уравнение Урысона

$$x(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds, \quad t \in [a,b]. \tag{22}$$

Из теоремы 4, если положить $f(t,z,v) = z - v$, $y(t) = 0$, получаем

Следствие 6. *Пусть выполнены условия* (g5), (g6), *и при любом* $x \in \mathbb{R}$, *п.в.* $(t,s) \in [a,b]^2$ *функция* $\mathcal{K}(t,s,\,\cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не убывает. Пусть найдутся такие* $v_0, u_0 \in L_\infty$, *что при п.в.* $t \in [a,b]$ *выполнены неравенства*

$$v_0(t) \leqslant u_0(t), \quad v_0(t) \leqslant \int_a^b \mathcal{K}(t,s,v_0(s))\,ds \quad u_0(t) \geqslant \int_a^b \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds.$$

Тогда множество принадлежащих отрезку $[v_0,u_0]_{L_\infty}$ *решений уравнения* (22) *не пусто, и в этом множестве решений есть наименьший элемент.*

§5. Теорема об интегральном неравенстве Вольтерры

Важным частым случаем уравнения (12) является уравнение Вольтерры вида

$$f\big(t, \int_a^t \mathcal{K}(t,s,x(s))ds,\, x(t)\big) = y(t), \quad t \in [a,b], \tag{23}$$

получаемое из (12), если $\mathcal{K}(t,s,z) = 0$ при $s > t$. Соответственно, для такой функции условия (g5), (g6) принимают вид:

(g5) при любом $x \in \mathbb{R}$ функция $\mathcal{K}(\,\cdot\,, x) : \Delta \doteq \{(t,s) \in [a,b]^2 : s \leqslant t\} \to \mathbb{R}$ измерима и для всех $t \in [a,b]$ существует конечный $\int_a^t \mathcal{K}(t,s,x)\,ds$;

(g6) при п.в. $(t,s) \in \Delta$ функция $\mathcal{K}(t,s,\,\cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна слева.

Теорема 4, очевидно, применима к исследованию уравнения (23). Прежде чем сформулировать результаты о разрешимости этого уравнения, приведем определение решения, учитывающее специфику уравнений Вольтерры. Будем обозначать $L_\infty[c,d]$, $W[c,d]$ — пространства, соответственно, измеримых и измеримых существенно ограниченных функций, определенных на отрезке $[c,d]$, $a < c < d < b$.

Уравнение (23) называем *локально разрешимым*, если для некоторого $\delta \in (0, b-a)$ существует функция $x_\delta \in L_\infty[a, a+\delta]$, удовлетворяющая этому уравнению при п.в. $t \in [a, a+\delta]$. В этом случае функцию x_δ называем *локальным решением.* Функцию $x_\tau : [a, a+\tau) \to \mathbb{R}$, $\tau \in (0, b-a]$ сужение которой на $[a, a+\delta]$ при любом $\delta < \tau$ есть локальное решение и $\lim_{\delta\to\tau-0} \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,a+\delta]} |x(t)| = \infty$, называем *предельно продолженным решением.* Функцию $x_{b-a} \in L_\infty$ удовлетворяющую (23) п.в. на $[a,b]$ называем *глобальным решением* (в обозначении глобального решения индекс $b-a$ будем опускать). Говорим, что (локальное, глобальное, предельно продолженное) решение x_σ является *продолжением* (локального) решения x_δ, а решение x_δ — *частью* решения x_σ, если $\sigma > \delta$ и $x_\sigma(t) = x_\delta(t)$ при п.в. $t \in [a, a+\delta]$.

Следствие 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда множество глобальных решений уравнения* (23), *принадлежащих отрезку* $[v_0, u_0]_{L_\infty}$, *не пусто, и в этом множестве решений есть наименьший элемент; кроме того, любое локальное решение* $x_\delta \in L_\infty[a, a+\delta]$, $\delta \in (0, b-a)$, *удовлетворяющее при п.в.* $t \in [a, a+\delta]$ *неравенству* $v_0(t) \leqslant x_\delta(t) \leqslant u_0(t)$, *является частью некоторого глобального решения* $x \in [v_0, u_0]_{L_\infty}$, *и среди всех решений, продолжающих данное локальное решение и принадлежащих* $[v_0, u_0]_{L_\infty}$, *есть наименьшее.*

Доказательство. Непосредственно из теоремы 4 следует, что множество глобальных решений уравнения (23), принадлежащих отрезку $[v_0, u_0]_{L_\infty}$, не пусто, и в этом множестве решений есть наименьший элемент.

Докажем второе предложение. Продолжение заданного локального решения $x_\delta \in L_\infty[a, a+\delta]$, $\delta \in (0, b-a)$, должно при п.в. $t \in [a+\delta, b]$ удовлетворять уравнению

$$f\big(t, \int\limits_a^{a+\delta} \mathcal{K}(t,s,x_\delta(s))\,ds + \int\limits_{a+\delta}^{t} \mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds,\ x(t)\big) = y(t). \tag{24}$$

Уравнение (24) можно записать в виде:

$$\widetilde{f}\big(t, \int\limits_{a+\delta}^{t} \mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds,\ x(t)\big) = y(t), \quad t \in [a+\delta, b],$$

если положить $\widetilde{f}(t,v,z) = f\big(t, \int_a^{a+\delta}\mathcal{K}(t,s,x_\delta(s))\,ds + v,\ z\big)$. Функция $\widetilde{f}$ так же, как и функция f, отвечает условиям теоремы 4, в частности, при п.в. $t \in [a+\delta, b]$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}\Big(t, \int\limits_{a+\delta}^{t} \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds,\ u_0(t)\Big) \\
&\qquad = f\Big(t, \int\limits_{a}^{a+\delta} \mathcal{K}(t,s,x_\delta(s))\,ds + \int\limits_{a+\delta}^{t} \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds,\ u_0(t)\Big) \\
&\qquad \geqslant f\Big(t, \int\limits_{a}^{a+\delta} \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds + \int\limits_{a+\delta}^{t} \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds,\ u_0(t)\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad = f\Big(t, \int\limits_{a}^{t} \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds,\ u_0(t)\Big) \geqslant y(t).
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется неравенство

$$\widetilde{f}\Big(t, \int\limits_{a+\delta}^{t} \mathcal{K}(t,s,v_0(s))\,ds,\ v_0(t)\Big) \leqslant y(t).$$

Согласно теореме 4 уравнение (24) имеет решение $x^\delta \in L_\infty[a+\delta, b]$, удовлетворяющее оценке $v_0(t) \leqslant x^\delta(t) \leqslant u_0(t)$, $t \in [a+\delta, b]$, и в множестве $X^\delta \subset L_\infty[a+\delta, b]$ таких решений есть наименьший элемент. Любое глобальное решение $x \in [v_0, u_0]_{L_\infty}$ уравнения (23) определяется соотношением

$$x(t) = \begin{cases} x_\delta(t) \text{ при } t \in [a, a+\delta), \\ x^\delta(t) \text{ при } t \in [a+\delta, b], \end{cases}$$

где $x^\delta \in X^\delta$, и поэтому среди таких функций есть наименьшая. □

Проиллюстрируем применение приведенных утверждений об интегральных неравенствах на примере исследования уравнения, моделирующего один электрический колебательный контур (соответствующую модель см. [12, с. 143–145]).

Пример 8. Зависимость силы тока $\mathfrak{I}$ от времени $t \geqslant 0$ в электрическом колебательном контуре, содержащем катушку самоиндукции с железным сердечником, описывается уравнением [12, с. 145]

$$\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{\mathfrak{I}^2(t)}{2}+\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{B\omega^2}{2S}\mathfrak{I}^2(t)+\frac{1}{2C}\Big(q_0+\int\limits_0^t \mathfrak{I}(s)\,ds\Big)^2=h. \qquad (25)$$

Здесь емкость конденсатора C, количество витков катушки самоиндукции ω и параметры A, B, S — неотрицательные числа, h — полная энергия системы, q_0 — заряд в начальный момент времени $t=0$. Будем предполагать, что $q_0<0$ (заметим, что для значений q_0, отличающихся только знаком, решения уравнения (25) также отличаются только знаком).

Рассматриваемое уравнение это уравнение (23), где

$$f(t,z,x)=\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{B\omega^2x^2}{2S}+\frac{(q_0+z)^2}{2C},\ \ \mathcal{K}(t,s,x)=x,\ \ y(t)=h.$$

Обозначим

$$(F\mathfrak{I})(t)\doteq\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{\mathfrak{I}^2(t)}{2}+\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{B\omega^2}{2S}\mathfrak{I}^2(t)+\frac{1}{2C}\Big(q_0+\int\limits_0^t \mathfrak{I}(s)\,ds\Big)^2,$$

$$(K\mathfrak{I})(t)\doteq\int\limits_0^t \mathfrak{I}(s)\,ds.$$

Легко видеть, что при выполнении неравенства

$$\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{{q_0}^2}{2C}>h$$

уравнение (25) не совместно. Если бы в этой ситуации решение $\mathfrak{I}(t)$ существовало, то для положительного $\delta\doteq\frac{1}{2}\left(\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{1}{2C}{q_0}^2-h\right)$ нашлось бы такое $t'>0$, что $\frac{1}{2C}\Big(q_0+\int_0^t \mathfrak{I}(s)\,ds\Big)^2\geqslant\frac{q_0^2}{2C}-\delta$ на $[0,t']$. Тогда получим

$$(F\mathfrak{I})(t)\geqslant\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{1}{2C}\Big(q_0+\int\limits_0^t \mathfrak{I}(s)\,ds\Big)^2$$

$$\geqslant\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{{q_0}^2}{2C}-\delta=h-\delta,$$

и это соотношение противоречит разрешимости уравнения (25). Итак, пусть

$$\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{q_0^2}{2C}\leqslant h. \tag{26}$$

Определим $\mathfrak{I}_V \geqslant 0$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{\mathfrak{I}_V{}^2}{2}+\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{B\omega^2}{2S}\mathfrak{I}_V{}^2+\frac{q_0^2}{2C}=h;$$

это возможно в силу непрерывности, возрастания и неограниченного увеличения при $\mathfrak{I}_V \to \infty$ левой части данного уравнения (как функции аргумента $\mathfrak{I}_V$), а также неравенства (26). Положим $T_V=-\frac{q_0}{\mathfrak{I}_V}$. Очевидно, для функции-константы $\mathfrak{I}_V$ выполнено $q_0\leqslant q_0+\int_0^t \mathfrak{I}_V(s)\,ds\leqslant 0$ при всех $t\in[0,T_V]$, следовательно, $(F\mathfrak{I}_V)(t)\leqslant h$, $t\in[0,T_V]$.

Теперь определим $\mathfrak{I}_U\geqslant 0$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{AS}{2}\ln\Big(\frac{\mathfrak{I}_U{}^2}{2}+\frac{S^2}{2\omega^2}\Big)+\frac{B\omega^2}{2S}\mathfrak{I}_U{}^2=h,$$

и найдем $T_U=-\frac{q_0}{\mathfrak{I}_U}$. Тогда при всех $t\in[0,T_U]$ имеем $(F\mathfrak{I}_U)(t)\geqslant h$.

Итак, определены такие $\mathfrak{I}_U\geqslant\mathfrak{I}_V\geqslant 0$, $0<T_U\leqslant T_V$, что при $t\in[0,T_U]$ выполнены оба неравенства $(F\mathfrak{I}_V)(t)\leqslant h\leqslant(F\mathfrak{I}_U)(t)$. Функции $\mathcal{K}, f$ непрерывны; функция $\mathcal{K}(t,s,\cdot)$ возрастает при любых t,s; а функция $f(t,\cdot,x)$ при $t\in[0,T_U]$ и всех x убывает на $[0,-q_0]\supset[(K\mathfrak{I}_V)(t),(K\mathfrak{I}_U)(t)]$. Согласно следствию 7 (с учетом замечания 3) множество решений уравнения (25), определенных на $[0,T_U]$ и принадлежащих $[\mathfrak{I}_V,\mathfrak{I}_U]_{L_\infty([0,T_U],\mathbb{R})}$, не пусто, и в этом множестве решений есть наименьший элемент; любое решение $\mathfrak{I}$, определенное на некотором меньшем отрезке и удовлетворяющее на своей области определения неравенству $\mathfrak{I}_V\leqslant\mathfrak{I}(t)\leqslant\mathfrak{I}_U$, является частью некоторого решения, принадлежащего $[\mathfrak{I}_V,\mathfrak{I}_U]_{L_\infty([0,T_U],\mathbb{R})}$, и среди всех таких решений, продолжающих данное локальное решение, есть наименьшее.

Применим следствие 7 к “классическому” нелинейному интегральному уравнению Вольтерры

$$x(t)=\int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s,x(s))\,ds,\quad t\in[a,b]. \tag{27}$$

Следствие 8. *Если выполнены условия* (g5), (g6), *при п.в.* $(t,s)\in\Delta$ *функция* $\mathcal{K}(t,s,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *не убывает, и существуют* $v_0,u_0\in L_\infty[a,b]$, *удовлетворяющие при п.в.* $t\in[a,b]$ *неравенствам*

$$v_0(t)\leqslant u_0(t),\quad v_0(t)\leqslant\int\limits_a^t\mathcal{K}(t,s,v_0(s))\,ds,\quad u_0(t)\geqslant\int\limits_a^t\mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds, \tag{28}$$

то для уравнения (27) *справедливо заключение следствия* 7.

Уравнение вида (27) в пространстве непрерывных функций с разрывным интегральным оператором Вольтерры исследовалось в [14, 15] методом, основанном на определении по разрывному интегральному оператору многозначного отображения и рассмотрении вместо уравнения соответствующего интегрального включения. Без построения такого включения, а с помощью результатов о неподвижных точках монотонных отображений это уравнение в пространстве суммируемых функций исследовалось в [16]. В этой работе было получено утверждение об одностороннем неравенстве.

При применении следствия 7 к исследованию уравнения Вольтерры (23) требуется построить или доказать существование функций v_0, u_0, удовлетворяющих при п.в. $t \in [a,b]$ неравенствам

$$v_0(t) \leqslant u_0(t),$$

$$f\Big(t, \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s,v_0(s))\,ds,\, v_0(t)\Big) \leqslant y(t) \leqslant f\Big(t, \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds,\, u_0(t)\Big); \quad (29)$$

соответственно, при рассмотрении уравнения (27) с помощью следствия 8 требуются функции, для которых выполнено (28). Если исследовать проблему локальной разрешимости, то функции v_0, u_0 достаточно определить на сколь угодно малом отрезке $[a, a+\delta]$. Покажем, что в качестве таких функций могут быть выбраны константы.

Для произвольного $c \in [a,b)$ определим функцию

$$q^c : [c,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad q^c(t,r) \doteq \int\limits_c^t \mathcal{K}(t,s,r)\,ds.$$

По первому аргументу эта функция измерима, по второму, вследствие неубывания функции $\mathcal{K}(t,s,\cdot)$, — не убывает. Если существуют числа $\underline{r}, \overline{r}$, удовлетворяющие при некотором $\delta \in (0, b-a]$ неравенствам

$$\underline{r} \leqslant q^a(t,\underline{r}) \leqslant q^a(t,\overline{r}) \leqslant \overline{r}, \quad t \in [a, a+\delta], \quad (30)$$

то для функций $v_0(t) \equiv \underline{r}$, $u_0(t) \equiv \overline{r}$, выполнено (28) на $[a, a+\delta]$. Если, например, функция $q^a(\cdot, r)$ непрерывна в точке $t = a$ и $q^a(a,r) = 0$, то при любых $\underline{r} < 0$, $\overline{r} > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что на $[a, a+\delta]$ выполнены неравенства (30).

Приведем условия продолжаемости локальных решений неравенств (28).

Предложение 1. *Пусть* $q^a(\cdot, r) \in L_\infty$ *при любом* $r \in \mathbb{R}$. *Если при некотором* $c \in [a,b)$ *функция* $q^c(\cdot, r)$ *при любом* $r \in \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $t = c$ *и* $q^c(c,r) = 0$, *то любые определенные на отрезке* $[a,c]$ *существенно* *ограниченные функции* v_0, u_0*, удовлетворяющие на этом отрезке условию* (28)*, можно продолжить константами на некоторый бо́льший отрезок* $[a, c{+}\delta]$, $\delta > 0$*, так, что полученные функции будут удовлетворять на своей области определения неравенствам* (28).

Доказательство. Положим

$$(Ku)(t) \doteq \int\limits_a^t \mathcal{K}(t, s, u(s))\, ds$$

и докажем, что оператор K действует в пространстве L_∞. Для произвольного $u \in L_\infty$ определим $r = \operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |u(t)|$. Вследствие неубывания функции $\mathcal{K}(t, s, \cdot\,)$ выполнены неравенства

$$q^a(t, -r) \leqslant (Ku)(t) \leqslant q^a(t, r) \quad \dot\forall\, t \in [a, b]$$

и, следовательно, $Ku \in L_\infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $u_0^c(t) = \begin{cases} u_0(t), & t \in [a, c], \\ 0, & t \in (c, b]. \end{cases}$ Положим

$$r \doteq \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[c,b]} \Bigl(\int\limits_a^t \mathcal{K}(t, s, u_0^c(s))\, ds - \int\limits_c^t \mathcal{K}(t, s, 0)\, ds \Bigr) + \varepsilon.$$

Доопределим функцию u_0 на весь отрезок $[a, b]$, полагая $u_0(t) = r$ при $t \in (c, b]$. Тогда при $t \in (c, b]$ имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_a^t \mathcal{K}(t, s, u_0(s))\, ds \\ &\quad = \int\limits_a^t \mathcal{K}(t, s, u_0^c(s))\, ds - \int\limits_c^t \mathcal{K}(t, s, 0)\, ds + \int\limits_c^t \mathcal{K}(t, s, r)\, ds \\ &\quad \leqslant r - \varepsilon + \int\limits_c^t \mathcal{K}(t, s, r)\, ds. \end{aligned}$$

Вследствие принятых относительно функции $q^c(\,\cdot\,, r)$ предположений, существует такое $\delta > 0$, что при всех $t \in [c, c + \delta]$ справедливо неравенство $q^c(t, r) \leqslant \varepsilon$. Таким образом,

$$\int\limits_a^t \mathcal{K}(t, s, u_0(s))\, ds \leqslant r = u_0(t), \quad t \in [c, c + \delta].$$

Таким же образом определяется продолжение функции v_0, удовлетворяющее на $[a, c+\delta]$ неравенствам (28). $\square$

Если условия предложения 1 выполнены при всех $c \in [a,b)$, то функцию u_0 (как и функцию v_0) можно строить последовательно на отрезках $[a, c_i]$, $c_{i+1} - c_i = \delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, полагая ее постоянной на интервалах $(c_i, c_{i+1}]$. Полученная в результате такого построения функция u_0 либо определена и ограничена на всем $[a,b]$, либо определена на некотором полуинтервале $[a,c) \subset [a,b]$, $c = \lim_{i\to\infty} c_i$, и при этом выполнено $\lim_{i\to\infty} |u_0(c_i)| = \infty$.

Аналогичные построения применимы для нахождения функций v_0, u_0, удовлетворяющих неравенствам (29). В основе соответствующего алгоритма лежат следующие очевидные соображения. Прежде всего заметим, что, если существуют числа $\underline{r}, \overline{r}$, $\underline{r} \leqslant \overline{r}$, для которых справедливо

$$f\bigl(t, q^a(t,\underline{r}), \underline{r}\bigr) \leqslant y(t) \leqslant f\bigl(t, q^a(t,\overline{r}), \overline{r}\bigr) \quad \dot{\forall} t \in [a, a+\delta], \tag{31}$$

то для функций $v_0(t) \equiv \underline{r}$, $u_0(t) \equiv \overline{r}$, выполнено (29) на $[a, a+\delta]$. В ситуации, когда функция $q^a(\,\cdot\,, r)$ непрерывна в точке $t = a$ и $q^a(a,r) = 0$, неравенство (31) окажется выполненным, если при некотором $\varepsilon > 0$ справедливо

$$f(t, -\varepsilon, \underline{r}) \leqslant y(t) \leqslant f(t, \varepsilon, \overline{r}) \quad \dot{\forall} t \in [a, a+\delta].$$

Как и в предложении 1, если $q^c(c,r) = 0$, а функция $q^c(\,\cdot\,, r)$ непрерывна в точке $t = c$, то при соответствующих требованиях к функции f произвольные существенно ограниченные функции $v_0, u_0 : [a,c] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие на $[a,c]$ неравенствам (29), могут быть продолжены с сохранением этих неравенств на бóльший отрезок.

Используя приведенный способ построения функций v_0, u_0, получим следующий признак разрешимости уравнения (23).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (g1)–(g6); *при любом $x \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [a,b]$ функция $f(t, \cdot\,, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не возрастает; при п.в. $(t,s) \in \Delta$ функция $\mathcal{K}(t,s,\,\cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не убывает; $\int_a^{(\cdot)} \mathcal{K}(\,\cdot\,, s, r)\, ds \in L_\infty$ при любом $r \in \mathbb{R}$. Пусть, далее, справедливы следующие высказывания:*

$$\forall c \in [a,b) \quad \exists \varepsilon = \varepsilon(c) > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad \exists \delta_1 = \delta_1(c,r) > 0$$

$$\Bigl| \int\limits_c^t \mathcal{K}(t,s,r)\, ds \Bigr| \leqslant \varepsilon \quad \dot{\forall} t \in [c, c+\delta_1]; \tag{32}$$

$$\forall\, c \in [a,b] \quad \forall\, \underline{\eta}, \overline{\eta} \in \mathbb{R} \quad \big(\underline{\eta} \leqslant \overline{\eta}\big)$$
$$\exists\, \delta_2 = \delta_2(c, \underline{\eta}, \overline{\eta}) > 0 \quad \exists\, \underline{r} = \underline{r}(c, \underline{\eta}, \overline{\eta}) \quad \exists\, \overline{r} = \overline{r}(c, \underline{\eta}, \overline{\eta})$$
$$\underline{r} \leqslant \overline{r}, \quad f\big(t, \underline{\eta}, \underline{r}\big)\big) \leqslant y(t) \leqslant f(t, \overline{\eta}, \overline{r}) \quad \dot{\forall}\, t \in [c, c+\delta_2]. \tag{33}$$

Тогда уравнение (23) локально разрешимо, любое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения.

Доказательство. Положим вначале $c \doteq a$ и найдем в соответствии с условием (32) положительное $\varepsilon = \varepsilon(a)$. Положим $\underline{\eta} = -\varepsilon$, $\overline{\eta} = \varepsilon$, определим из условия (33) $\delta_2 > 0$, $\underline{r}, \overline{r}$, $\underline{r} \leqslant \overline{r}$. Из условия (32) найдем $\delta_1(a, \underline{r}) > 0$, $\delta_1(a, \overline{r}) > 0$, пусть

$$\delta \doteq \min\{\delta_1(a, \underline{r}), \delta_1(a, \overline{r}), \delta_2\}.$$

При таком определении $\delta > 0$ функции $v_0(t) \equiv \underline{r}$, $u_0(t) \equiv \overline{r}$ удовлетворяют на $[a, a+\delta]$ неравенствам (29). Таким образом, на этом отрезке для уравнения (23) выполнены все предположения теоремы 4, следовательно, данное уравнение имеет локальное решение $x_\delta \in L_\infty[a, a+\delta]$, удовлетворяющее при п.в. $t \in [a, a+\delta]$ оценке $\underline{r} \leqslant x(t) \leqslant \overline{r}$.

Покажем, что любое локальное решение

$$x_\sigma \in L_\infty[a, a+\sigma], \quad 0 < \sigma < b-a,$$

продолжаемо. Обозначим

$$u(t) = \begin{cases} x_\sigma(t), & \text{если } t \in [a, a+\sigma], \\ 0, & \text{если } t \in (a+\sigma, b]. \end{cases}$$

Для $c \doteq a + \sigma$, выберем удовлетворяющие условию (32) положительные $\varepsilon(c)$, $\delta_1(c, 0)$. Из этого условия следует, что функция $\int_c^{(\,\cdot\,)} \mathcal{K}(\,\cdot\,, s, 0)\, ds$ существенно ограничена на $[c, c+\delta_1(c,0)]$. Далее, как показано при доказательстве предложения 1, функция $\int_a^{(\,\cdot\,)} \mathcal{K}\big(\,\cdot\,, s, u(\,\cdot\,)\big)\, ds$ существенно ограничена на $[a, b]$, и можно определить

$$\underline{\eta} \doteq \operatorname*{vrai\,inf}_{t \in [c,\, c+\delta_1(c,0)]} \Big(\int_a^t \mathcal{K}(t, s, u(s))\, ds - \int_c^t \mathcal{K}(t, s, 0)\, ds \Big) - \varepsilon(c),$$

$$\overline{\eta} \doteq \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [c,\, c+\delta_1(c,0)]} \Big(\int_a^t \mathcal{K}(t, s, u(s))\, ds - \int_c^t \mathcal{K}(t, s, 0)\, ds \Big) + \varepsilon(c).$$

Из условия (33) определим числа $\delta_2 > 0$, $\underline{r}, \overline{r}$, $\underline{r} \leqslant \overline{r}$, а из условия (32) — числа $\delta_1(c, \underline{r}) > 0$, $\delta_1(c, \overline{r}) > 0$. Пусть $\delta \doteq \min\{\delta_1(c, 0), \delta_1(c, \underline{r}), \delta_1(c, \overline{r}), \delta_2\}$.

Покажем, что функции

$$v_0(t) = \begin{cases} x_\sigma(t), & \text{если } t \in [a, c], \\ \underline{r}, & \text{если } t \in (c, c+\delta], \end{cases}$$

$$u_0(t) = \begin{cases} x_\sigma(t), & \text{если } t \in [a, c], \\ \overline{r}, & \text{если } t \in (c, c+\delta], \end{cases}$$

удовлетворяют неравенствам (29) на отрезке $[a, c+\delta]$. Отметим, что при $t \in [a, c]$ эти неравенства очевидно выполнены (превратившись в равенства), и нуждаются в проверке лишь при $t \in (c, c+\delta]$.

Вследствие предположения (32), имеем

$$\int_a^t \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds = \int_a^t \mathcal{K}(t,s,u(s))\,ds - \int_c^t \mathcal{K}(t,s,0)\,ds + \int_c^t \mathcal{K}(t,s,\overline{r})\,ds$$

$$\leqslant \overline{\eta} - \varepsilon(c) + \int_c^t \mathcal{K}(t,s,\overline{r})\,ds \leqslant \overline{\eta} \quad \dot{\forall}\, t \in (c, c+\delta].$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_a^t \mathcal{K}(t,s,v_0(s))\,ds \geqslant \underline{\eta} \quad \dot{\forall}\, t \in (c, c+\delta].$$

Используя установленные неравенства, получаем, что почти всюду на $[c, c+\delta]$ выполнено

$$f\Big(t, \int_a^t \mathcal{K}(t,s,v_0(s))\,ds, v_0(t)\Big)$$

$$= f\Big(t, \int_a^t \mathcal{K}(t,s,v_0(s))\,ds, \underline{r}\Big) \leqslant f(t, \underline{\eta}, \underline{r}) \leqslant y(t),$$

$$f\Big(t, \int_a^t \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds, u_0(t)\Big)$$

$$= f\Big(t, \int_a^t \mathcal{K}(t,s,u_0(s))\,ds, \overline{r}\Big) \geqslant f(t, \overline{\eta}, \overline{r}) \geqslant y(t).$$

Таким образом, уравнение (23) при $t \in [a, a+\sigma+\delta]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4, следовательно, имеет определенное на этом отрезке локальное решение $x_{\sigma+\delta} \in L_\infty[a, a+\sigma+\delta]$, удовлетворяющее неравенству $v_0(t) \leqslant x(t) \leqslant u_0(t)$ при п.в. $t \in [a, a+\sigma+\delta]$. Так как почти всюду на $[a, a+\sigma]$ выполнено $v_0(t) = u_0(t) = x_\sigma(t)$, то построенное решение является продолжением решения x_σ.

Итак, любое локальное решение $x_\sigma \in L_\infty[a, a+\sigma]$ уравнения (23) продолжаемо. Покажем, что это решение можно продолжить до глобального или предельно продолженного.

На множестве решений уравнения (23) определим порядок $\trianglerighteq$, полагая $x_\zeta \trianglerighteq x_\varsigma$, если решение x_ζ является продолжением решения x_ς. Относительно этого порядка, согласно теореме Хаусдорфа, существует максимальная цепь S, элементом которой является заданное произвольное решение x_σ.

Поставим в соответствие каждой функции $x_\varsigma \in S$ число ς — длину отрезка, на котором определена эта функция. Множество таких чисел образует цепь в $[0, b-a]$; обозначим эту цепь через Ξ, а ее точную верхнюю грань — через τ. Теперь определим функцию

$$t \in [a, a+\tau) \mapsto x_\tau(t) = x_\varsigma(t),$$

где $\varsigma \in \Xi$, $\varsigma > t$. Данное определение функции $x_\tau : [a, a+\tau) \to \mathbb{R}$ корректно, так как, во-первых, вследствие неравенства $t < \sup \Xi$ такое $\varsigma \in \Xi$ существует, во-вторых, для любого другого $\zeta \in \Xi$, $\zeta > t$ выполнено $x_\zeta(t) = x_\varsigma(t)$. Последнее равенство следует из того, что одно из решений x_ζ, x_ς является продолжением другого.

Если x_τ не является предельно продолженным решением, то эта функция существенно ограничена на $[a, a+\tau)$. Доопределим функцию x_τ любым значением в точке τ, тогда $x_\tau \in L_\infty[a, a+\tau]$ и эта функция является решением уравнения (23). Если $\tau < b-a$, то x_τ — локальное решение. Но тогда его можно продолжить, что противоречит максимальности цепи S. Значит, $\tau = b-a$, и решение x_τ является глобальным. □

Список литературы

[1] Чаплыгин С. А., *Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений*, Гос. изд. техн.-теор. лит., М.–Л., 1950.

[2] Лузин Н. Н., *О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина*, Успехи мат. наук **6** (1951), №6, 3–27.

[3] Азбелев Н. В., *Избранные труды*, Ин-т компьютер. исслед., М.–Ижевск, 2012.

[4] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E., *Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces*, Topology Appl. **179** (2015), no. 1, 13–33.

[5] Коллатц Л., *Функциональный анализ и вычислительная математика*, Мир, М., 1969.

[6] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1981.

[7] Иоффе А. Д, Тихомиров В. М., *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.

[8] Вулих Б. З., *Краткий курс теории функции вещественной переменной*, Наука, М., 1973.

[9] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В., *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, ЛИБРОКОМ, М., 2011.

[10] Шрагин И. В., *Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори*, Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и тех. науки **19** (2014), №2, 476–478.

[11] Натансон И. П., *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

[12] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., *Теория колебаний*, Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, М., 1959.

[13] Красносельский М. А., Забрейко П. П., *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975.

[14] Азбелев Н. В., Ли М. С., Рагимханов Р. К., *К вопросу об определении понятия решения интегрального уравнения с разрывным оператором*, Докл. АН СССР **171** (1966), №2, 247–250.

[15] Рагимханов Р. К., *К вопросу о существовании верхнего и нижнего интегрального включения Гаммерштейна*, Дифференц. уравнения **19** (1983), №11, 2011–2013.

[16] Жуковский Е. С., *Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций*, Дифференц. уравнения **18** (1982), №4, 580–584.

Тамбовский
государственный университет
имени Г. Р. Державина
ул. Интернациональная, 33
392000, Тамбов,
Россия

Поступило 22 июля 2016 г.

Российский университет
дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6
117198, Москва,
Россия
E-mail: zukovskys@mail.ru