*Функциональный анализ и его приложения*
2024, т. 58, вып. 2, с. 23–33

# Среднее значение мультипликативного функционала синус-процесса

**Александр Буфетов**

*Светлой памяти моих дорогих учителей*
*Бориса Марковича Гуревича* (1938–2023) *и*
*Анатолия Моисеевича Вершика* (1933–2024)

Явная формула для среднего значения регуляризованного мультипликативного функционала синус-процесса получена переходом к скейлинговому пределу в формуле Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса.

## § 1. Введение

**1.1. Формулировка основного результата.** Синус-процесс – скейлинговый предел радиальных частей мер Хаара на унитарных группах растущего формата – допускает явную формулу для математических ожиданий мультипликативных функционалов ограниченных наблюдаемых соболевской регулярности 1/2, получаемую скейлинговым пределом из формулы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса для детерминантов Тёплица, обобщающей вторую теорему Сегё в форме Ибрагимова.

Синус-процесс $\mathbb{P}_{\mathscr{S}}$ – это детерминантный процесс с синус-ядром

$$\mathscr{S}(x,y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)},$$

ядром проектора на пространство Пэли–Винера

$$\mathscr{PW} = \bigl\{ f \in L_2(\mathbb{R})\colon \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\pi,\pi]) \bigr\}.$$

Иными словами, синус-процесс есть по определению мера на пространстве конфигураций $\operatorname{Conf}(\mathbb{R})$, состоящем из подмножеств $X \subset \mathbb{R}$, не имеющих точек накопления, однозначно заданная условием

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathscr{S}}} \prod_{x\in X} (1+f(x)) = \det(1+f\mathscr{S}), \tag{1}$$

выполненным для всякой ограниченной борелевской функции $f$ с компактным носителем. Теорема 1 ниже дает удобное выражение для математического ожидания (1) для функций $f$ соболевской регулярности 1/2, чье преобразование Гильберта ограничено.

---

2020 *Mathematics Subject Classification*: 60B20.

*Ключевые слова*: синус-процесс, мультипликативный функционал, оператор Винера–Хопфа, формула Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa4203

Борелевской ограниченной функции $f$ с компактным носителем сопоставим аддитивный функционал $S_f$ на $\mathrm{Conf}(\mathbb{R})$ по формуле

$$S_f(X) = \sum_{x \in X} f(x);$$

ряд в правой части содержит лишь конечное число ненулевых членов. Дисперсия аддитивного функционала $S_f$ дается формулой

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{P}_{\mathscr{S}}} S_f = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x) - f(y)|^2 \cdot |\Pi(x,y)|^2 \, dx \, dy.$$

Следуя [7], определим пространство $\dot{H}_{1/2}(\mathscr{S})$ как пополнение семейства гладких функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем по отношению к норме $\|\cdot\|_{\dot{H}_{1/2}(\mathscr{S})}$, заданной формулой

$$\|f\|^2_{\dot{H}_{1/2}(\mathscr{S})} = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x) - f(y)|^2 \cdot |\Pi(x,y)|^2 \, dx \, dy.$$

По определению соответствие $f \mapsto S_f - \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathscr{S}}} S_f$ по непрерывности распространяется на все пространство $\dot{H}_{1/2}(\mathscr{S})$. Будем писать

$$\overline{S}_f = S_f - \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathscr{S}}} S_f$$

и называть $\overline{S}_f$ регуляризованным аддитивным функционалом, отвечающим функции $f \in \dot{H}_{1/2}(\mathscr{S})$.

Наша цель – дать явную формулу для экспоненциальных моментов регуляризованных аддитивных функционалов синус-процесса для функций $f$ соболевской регулярности $1/2$. Напомним некоторые определения.

Мы будем использовать такое соглашение для преобразования Фурье на прямой:

$$\widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda s} f(\lambda) \, d\lambda, \qquad f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda s} \widehat{f}(s) \, ds.$$

Символом $\widetilde{\ }$ будем обозначать отражение в пространстве фаз и соответственно частот относительно нуля:

$$\widetilde{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-u) e^{iu\lambda} \, du = f(-\lambda).$$

Определим пространство соболевского типа $\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})$ как пополнение семейства гладких функций с компактным носителем по отношению к норме

$$\|f\|^2_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |u| \cdot |\widehat{f}(u)|^2 \, du = \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} \right|^2 d\xi \, d\eta.$$

Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})}$ будем обозначать билинейную форму, заданную формулой

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |u| \cdot \widehat{f_1}(u) \widehat{f_2}(-u) \, du.$$

Таким образом,

$$\|f\|^2_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})} = \langle f, \overline{f}\rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})}.$$

Далее, для функции $f \in \dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})$ обозначим символами $f_+$, $f_-$ функции, определяемые формулами

$$\widehat{f_+} = \widehat{f} \cdot \chi_{(0,\infty)}, \qquad \widehat{f_-} = \widehat{f} \cdot \chi_{(-\infty,0)}.$$

Положим, наконец,

$$h = e^{f_- - f_+}. \tag{2}$$

Разумеется, $f_- - f_+$ есть умноженное на мнимую единицу преобразование Гильберта функции $f$.

Функции $r \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ сопоставляем непрерывный оператор Ганкеля $\mathfrak{H}(r)$, действующий по формуле

$$\mathfrak{H}(r)\varphi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \widehat{r}(s+t)\varphi(t)\,dt.$$

Обозначим символом $\mathscr{H}(1/2,\infty)$ пополнение пространства гладких функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем по отношению к норме

$$\|f\|_{\mathscr{H}(1/2,\infty)} = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} + \|f\|_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})}.$$

По определению оператор $\mathfrak{H}(h)$ есть оператор Гильберта–Шмидта, коль скоро $h \in \mathscr{H}(1/2,\infty)$.

Далее, если $f_1, f_2 \in \mathscr{H}(1/2,\infty)$, то и $f_1 f_2 \in \mathscr{H}(1/2,\infty)$, а следовательно, если $f \in \mathscr{H}(1/2,\infty)$, то и $\exp(f) - 1 \in \mathscr{H}(1/2,\infty)$.

Математическое ожидание мультипликативного функционала синус-процесса, отвечающего функции соболевской регулярности $1/2$, задается теперь такой формулой.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in \dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})$ такова, что $f_- - f_+ \in L_\infty(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\mathscr{S}}} \exp(\overline{S}_f) = \exp\left(\frac{1}{4\pi^2}\langle f_+, \widetilde{f_-}\rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})}\right) \times \det\left(1 - \chi_{(1,+\infty)}\mathfrak{H}\left(h\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)\right)\mathfrak{H}\left(\widetilde{h^{-1}}\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)\right)\chi_{(1,+\infty)}\right). \tag{3}$$

Из условия $f_- - f_+ \in L_\infty(\mathbb{R})$ немедленно следует, что

$$h = \exp(f_- - f_+) \in \mathscr{H}(1/2,\infty).$$

Если функция $f$ вещественнозначная, то условие ограниченности не нужно.

**Следствие 1.** *Если $f \in \dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})$ принимает вещественные значения, то формула (3) выполнена.*

**Доказательство.** Если функция $f$ вещественна, то $|h| \equiv 1$, $h \in \mathscr{H}(1/2,\infty)$ и $\|\mathfrak{H}(h)\| \leqslant 1$, и формула (3) имеет место, даже если $f$ не ограничена. □

Доказательство теоремы 1 проводится переходом к скейлинговому пределу в ее дискретном аналоге – формуле Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса.

Достаточно доказать теорему 1 для бесконечно гладких функций $f$ с компактным носителем. Общий случай немедленно следует из непрерывности обеих частей равенства (3) в пространстве $\mathscr{H}(1/2,\infty)$.

**Замечание 1.** При более стеснительных условиях на функцию $f$ формулу, эквивалентную формуле (3), получили Басор и Чен [2]. Частный случай формулы (3) использован в [8] при доказательстве того, что почти все реализации синус-процесса имеют избыток 1 в пространстве Пэли–Винера.

**1.2. Исторические замечания.** Габор Сегё доказал гипотезу Пойи, называемую теперь первой теоремой Сегё [15] в том самом 1915 г., в котором вступил добровольцем в кавалерию Королевского Гонведа, а вторую теорему [16] доказал 37 лет спустя, в 1952 г. Об истории теорем Сегё см., например, [9], [14]. Необходимые и достаточные условия выполнения второй теоремы Сегё дал Ибрагимов [13], [11]. Джеронимо и Кейс [10] доказали формулу (5) в 1979 г., а Бородин и Окуньков [4] переоткрыли ее в 2000 г. Сейчас известно несколько доказательств формулы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса [3], [5], [6], а вопрос о необходимых и достаточных условиях ее выполнения остается открытым.

**Благодарности.** Я глубоко благодарен С. М. Горбунову и Р. В. Романову за полезные обсуждения, а также анонимному рецензенту за тщательное рецензирование статьи и предложенные им улучшения.

## § 2. Начало доказательства теоремы 1: формула Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса

Напомним формулу Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса.

Обозначим $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Функции $F\in L_1(\mathbb{T})$ с коэффициентами Фурье

$$\widehat{F}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}F(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta,$$

как обычно (см., напрмер, [12]), сопоставляем оператор Тёплица $T(F)$ с символом $F$, действующий на функциях $\varphi$ с конечным носителем на $\mathbb{N}$ по формуле

$$T(F)\varphi(k)=\sum_{l\in\mathbb{N}}\widehat{F}(k-l)\varphi(l).$$

Оператор Ганкеля $\mathbf{H}(F)$ с символом $F$ определяем формулой

$$\mathbf{H}(F)\varphi(k)=\sum_{l\in\mathbb{N}}\widehat{F}(k+l-1)\varphi(l).$$

Если $F\in L_\infty(\mathbb{T})$, то операторы $T(F)$ и $\mathbf{H}(F)$ ограничены в $l_2(\mathbb{N})$. Как и на прямой, символом $\widetilde{\ }$ будем обозначать отражение в пространстве фаз или частот относительно нуля:

$$\widetilde{F}(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{F}(-k)e^{ik\theta}=F(-\theta).$$

Детерминант Тёплица $n \times n$, отвечающий символу $F$, обозначим $D_n(F)$: таким образом,

$$D_n(F) = \det(T(F)_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Из формулы Андреева [1]

$$\int_X \cdots \int_X \det(\varphi_i(x_j))_{i,j=1,\dots,n} \cdot \det(\psi_i(x_j))_{i,j=1,\dots,n}\, dx_1 \cdots dx_n$$
$$= \det\left(\int_X \varphi_i(x)\psi_j(x)\, dx\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

для любой функции $G \in L_1(\mathbb{T})$ вытекает равенство

$$D_n(G) = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{T}} \cdots \int_{\mathbb{T}} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^2 \cdot \prod_{k=1}^{n} G(\theta_k)\, \frac{d\theta_k}{2\pi} = \det(1 + (G-1)K_n), \qquad (4)$$

где

$$K_n(\theta, \theta') = \frac{\sin \frac{n+1}{2}(\theta - \theta')}{\sin \frac{1}{2}(\theta - \theta')}$$

есть $n$-е ядро Дирихле.

Аналогично § 1, введем пространство Соболева порядка $1/2$ на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, полунорму и билинейную форму на нем, полагая

$$H_{1/2}(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{T})\colon \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \cdot |\widehat{F}(k)|^2 < +\infty \right\},$$
$$\|F\|^2_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \cdot |\widehat{F}(k)|^2,$$
$$\langle F_1, F_2 \rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| \cdot \widehat{F_1}(k)\widehat{F_2}(-k).$$

Таким образом,

$$\|F\|^2_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{T})} = \langle F, \overline{F} \rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{T})}.$$

Следуя Бородину–Окунькову, рассмотрим на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ квадратично-интегрируемую функцию

$$F(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(k) e^{ik\theta}$$

с нулевым средним: $\widehat{F}(0) = 0$. Обозначим

$$F_+(\theta) = \sum_{k>0} \widehat{F}(k) e^{ik\theta}, \qquad F_-(\theta) = \sum_{k<0} \widehat{F}(k) e^{ik\theta}.$$

Определим теперь функцию $N$:

$$N(\theta) = \exp(F_-(\theta) - F_+(\theta)).$$

Мы готовы сформулировать теорему Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса.

**Теорема 2** (см. [4], [10]). *Пусть* $F \in H_{1/2}(\mathbb{T})$, $\widehat{F}(0) = 0$, $F_- - F_+ \in L_\infty(\mathbb{T})$. *Тогда*

$$D_n(\exp(F)) = \exp\left(\sum_{k>0} k\widehat{F}(k)\widehat{F}(-k)\right) \cdot \det\left(1 - \chi_{[n+1,+\infty)}\mathbf{H}(N)\mathbf{H}(\widetilde{N^{-1}})\chi_{[n+1,+\infty)}\right). \tag{5}$$

Если $F$ принимает действительные значения, то $|N(\theta)| = |\widetilde{N^{-1}}(\theta)| = 1$ при всех $\theta \in \mathbb{T}$.

Из определений видно, что операторы Ганкеля $\mathbf{H}(N)$ и $\mathbf{H}(\widetilde{N^{-1}})$ сопряжены.

**Следствие 2.** *Если* $F \in H_{1/2}(\mathbb{T})$ *принимает вещественные значения, то* (5) *выполнено.*

Бородин и Окуньков подчеркивают, что тождество (5) можно воспринимать формально как тождество между формальными степенными рядами по переменным $\widehat{F}(k)$.

**Замечание 2.** Вторая теорема Сегё для функции $G = \exp(F)$, утверждающая, что

$$\lim_{n\to\infty} D_n(G) = \exp\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\widehat{F}(k)\widehat{F}(-k)\right),$$

выполнена при условии $F \in H_{1/2}(\mathbb{T})$, $\widehat{F}(0) = 0$. Вместе с тем, если не предполагать вещественности $F$, то дополнительное условие $F_- - F_+ \in L_\infty(\mathbb{T})$ используется в доказательстве формулы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса, а именно, при доказательстве того, что соответствующие ганкелевы операторы лежат в классе Гильберта–Шмидта.

**Вопрос.** Необходимо ли условие $F_- - F_+ \in L_\infty(\mathbb{T})$ для выполнения формулы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса? Каковы необходимые и достаточные условия для выполнения формулы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса?

**Замечание 3.** Наше определение слегка отличается от принятого Бородиным и Окуньковым, рассматривавшими функцию $F_-(\pi - \theta) - F_+(\pi - \theta)$; возникающие ядра, однако, различаются калибровочным множителем $(-1)^{i+j}$, и, таким образом, соответствующие детерминанты Фредгольма совпадают.

## § 3. Скейлинговый предел в формуле Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса

Наша следующая цель – перейти к пределу в формуле Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса при скейлинге $R_n(\theta) = r(n\theta)$.

Пусть $r$ – бесконечно гладкая функция с компактным носителем и с нулевым средним. Для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ носитель функции $r(n\varphi)$ лежит внутри интервала $(-\pi, \pi)$. Определим функции $R_n$ на $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ формулой

$$R_n(\theta) = r(n\theta), \qquad \theta \in [-\pi, \pi]. \tag{6}$$

Определим разложения $r = r^+ - r^-$, $R_n = R_n^+ + R_n^-$, по положительным и отрицательным гармоникам:

$$\operatorname{supp} \widehat{r^+}^{\mathbb{R}} \subset [0, +\infty), \qquad \operatorname{supp} \widehat{r^-}^{\mathbb{R}} \subset (-\infty, 0].$$

Здесь и далее для различения преобразования Фурье на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ будем писать соответственно $\widehat{f}^{\,\mathbb{R}}$ и $\widehat{f}^{\,\mathbb{T}}$. По определению имеем

$$\widehat{R_n}^{\mathbb{T}}(k) = \frac{1}{2\pi n} \widehat{r}^{\mathbb{R}}\left(\frac{k}{n}\right).$$

**Лемма.** *Пусть $r$ – гладкая функция на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, $h = \exp(r^- - r^+)$. Тогда выполнено соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\exp(R_n)) = \exp\left(\frac{1}{4\pi^2}\langle r^+, r^-\rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})}\right) \times \det\bigl(1 - \chi_{[1,+\infty)}\mathfrak{H}(h)\mathfrak{H}(\widetilde{h^{-1}})\chi_{[1,+\infty)}\bigr). \tag{7}$$

**Следствие 3.** *Соотношение (7) выполнено также для всякой функции $r \in \mathscr{H}(1/2, \infty)$ с компактным носителем.*

Следствие непосредственно вытекает из леммы, поскольку обе части (7) непрерывны в пространстве $\mathscr{H}(1/2, \infty)$.

Доказательству леммы предпошлем небольшое общее замечание о сходимости детерминантов Фредгольма. Пусть $K$ – оператор с конечным следом, действующий в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве. Как обычно, полагаем $|K| = \sqrt{K^*K}$, а при $l \geqslant 1$ символом $\bigwedge^l K$ обозначаем внешнюю степень оператора $K$. Внешние степени оператора $K$ тоже имеют конечный след, причем

$$\operatorname{tr} \bigwedge^l K \leqslant \frac{(\operatorname{tr}|K|)^l}{l!}. \tag{8}$$

Если теперь даны операторы $K_n$ и $K$ с конечным следом, действующие, быть может, в различных гильбертовых пространствах, то для установления сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \det(1 + K_n) = \det(1 + K)$$

достаточно, во-первых, проверить сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tr} \bigwedge^l K_n = \operatorname{tr} \bigwedge^l K,$$

а во-вторых, дать равномерную оценку

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\operatorname{tr} \bigwedge^l K_n\right| < +\infty. \tag{9}$$

Если сами операторы $K_n$ самосопряжены и положительны, то в силу (8) для (9) достаточна оценка

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{tr} K_n < +\infty.$$

В случае дискретного оператора Ганкеля с гладким символом $r$ для наших целей будет достаточна простая оценка

$$\left|\operatorname{tr}\bigwedge^l \mathbf{H}(r)\right| \leqslant \frac{(\|\widehat{r}^{\mathbb{T}}\|_{L_1})^l}{l!},$$

а в случае непрерывного оператора Ганкеля с гладким символом $r$ – аналогичная оценка

$$\left|\operatorname{tr}\bigwedge^l \mathfrak{H}(r)\right| \leqslant \frac{((2\pi)^{-1}\cdot\|\widehat{r}^{\mathbb{R}}\|_{L_1})^l}{l!}.$$

**Доказательство леммы.** Напомним, что функции $R_n$ определены формулой (6). Для соболевских полунорм функций $R_n$ получаем

$$\langle R_n^+, R_n^-\rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{T})} = \sum_{k>0} k\widehat{R_n}^{\mathbb{T}}(k)\widehat{R_n}^{\mathbb{T}}(-k) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k>0}\frac{k}{n^2}\widehat{r}^{\mathbb{R}}\left(\frac{k}{n}\right)\widehat{r}^{\mathbb{R}}\left(-\frac{k}{n}\right),$$

откуда видно, что

$$\lim_{n\to\infty}\langle R_n^+, R_n^-\rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{T})} = \frac{1}{4\pi^2}\langle r^+, r^-\rangle_{\dot{H}_{1/2}(\mathbb{R})}.$$

Аналогично, для следов внешних степеней ганкелевых операторов $\mathbf{H}(R_n)$ по определению имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\bigwedge^l \mathbf{H}(R_n) &= \frac{1}{l!}\sum_{i_1,\dots,i_l\in\mathbb{N}}\widehat{R_n}^{\mathbb{T}}(i_1+i_2-1)\cdots\widehat{R_n}^{\mathbb{T}}(i_{l-1}+i_l-1)\widehat{R_n}^{\mathbb{T}}(i_l+i_1-1)\\ &= \frac{1}{l!\,(2\pi n)^l}\sum_{i_1,\dots,i_l\in\mathbb{N}}\widehat{r}^{\mathbb{R}}\left(\frac{i_1+i_2-1}{n}\right)\cdots\widehat{r}^{\mathbb{R}}\left(\frac{i_{l-1}+i_l-1}{n}\right)\widehat{r}^{\mathbb{R}}\left(\frac{i_l+i_1-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Гладкость функции $r$ немедленно влечет $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\widehat{R_n}\|_{L_1} < +\infty$. По определению записав

$$\operatorname{tr}\bigwedge^l \mathfrak{H}(r) = \frac{1}{l!\,(2\pi)^l}\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}\widehat{r}^{\mathbb{R}}(s_1+s_2)\cdots\widehat{r}^{\mathbb{R}}(s_{l-1}+s_l)\widehat{r}^{\mathbb{R}}(s_l+s_1)\,ds_1\cdots ds_l,$$

немедленно получаем

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tr}\bigwedge^l \mathbf{H}(R_n) = \operatorname{tr}\bigwedge^l \mathfrak{H}(r),$$

откуда в свою очередь следуют равенства

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\det(1+\mathbf{H}(R_n)) &= \det(1+\mathfrak{H}(r)),\\ \lim_{n\to\infty}\det(1-\mathbf{H}(R_n)) &= \det(1-\mathfrak{H}(r)).\end{aligned}$$

Аналогичным образом, если заданы две гладкие функции $r^{(1)}$ и $r^{(2)}$, каждая с носителем, заключенным внутри интервала $(-\pi,\pi)$, а функции $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$

определены формулами $R_n^{(1)}(\theta) = r^{(1)}(n\theta)$, $R_n^{(2)}(\theta) = r^{(2)}(n\theta)$, то выполнено и предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \det\bigl(1 + \mathbf{H}(R_n^{(1)})\mathbf{H}(R_n^{(2)})\bigr) = \det\bigl(1 + \mathfrak{H}(r^{(1)})\mathfrak{H}(r^{(2)})\bigr).$$

Наконец, для операторов Ганкеля, ограниченных на луч, точно так же получаем

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} &\det\bigl(1 - \chi_{[n+1,+\infty)}\mathbf{H}(R_n^{(1)})\mathbf{H}(R_n^{(2)})\chi_{[n+1,+\infty)}\bigr)\\ &= \det\bigl(1 - \chi_{[1,+\infty)}\mathfrak{H}(r^{(1)})\mathfrak{H}(r^{(2)})\chi_{[1,+\infty)}\bigr).\end{aligned}$$

Лемма прямо следует теперь из формулы Бородина–Окунькова–Джеронимо–Кейса (5). □

## § 4. Скейлинг детерминанта Фредгольма

Нам остается связать детерминант Фредгольма в левой части формулы (3) в теореме 1 со скейлинговым пределом детерминантов Тёплица.

Пусть $f$ – гладкая функция с компактным носителем на $\mathbb{R}$, $r(\,\cdot\,) = f(\,\cdot\,/(2\pi))$ и, как и раньше, $R_n(\theta) = r(n\theta)$.

**Предложение 1.** *Имеем*

$$\lim_{n\to\infty} D_n(\exp(R_n)) = \det\bigl(1 + (e^f - 1)\mathscr{S}\bigr).$$

Пусть $E$ – полное сепарабельное метрическое пространство. Пусть $\mu_n$ – последовательность $\sigma$-конечных радоновых мер на $E$, а $K_n$ – последовательность непрерывных ядер на $E$ с тем условием, что ядро $K_n$ задает положительное самосопряженное сжатие в $L_2(E, \mu_n)$; несколько напрягая обозначения, мы сохраняем для сжатия тот же символ $K_n$. Пусть также $\mu$ – $\sigma$-конечная радонова мера на $E$, а $K$ – непрерывное ядро на $E$, задающее положительное самосопряженное сжатие в $L_2(E, \mu_n)$. Будем говорить, что последовательность $K_n$ $F$-сходится к предельному ядру $K$, если:

1) $K_n \to K$ равномерно на компактах в $E \times E$;
2) меры $K_n(x, x)\, d\mu_n(x)$ сходятся к мере $K(x, x)\, d\mu(x)$ по вариации.

Из определения $F$-сходимости легко вытекает

**Предложение 2.** *Если последовательность непрерывных ядер неотрицательных самосопряженных сжатий $F$-сходится к предельному ядру $K$, то для всякого компакта $C \subset E$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \det(1 - \chi_C K_n \chi_C) = \det(1 - \chi_C K \chi_C).$$

**Доказательство.** 1. Достаточно при фиксированном $l$ доказать равенство

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} &\int\cdots\int_{C^n} \det K_n(x_i, x_j)_{i,j=1,\dots,l} \prod_{i=1}^{l} d\mu_n(x_i)\\ &= \int\cdots\int_{C^n} \det K(x_i, x_j)_{i,j=1,\dots,l} \prod_{i=1}^{l} d\mu(x_i);\end{aligned}$$

действительно, ведь ряды, задающие детерминанты Фредгольма, сходятся равномерно.

2. Далее, возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим компакт $C_\varepsilon = C \cap \{x \in E\colon K(x,x) \geqslant \varepsilon\}$. Для $x_1, \dots, x_n \in C_\varepsilon$ имеет место равномерная сходимость

$$\frac{\det K_n(x_i, x_j)_{i,j=1,\dots,l}}{\prod_{i=1}^l K_n(x_i, x_i)} \rightrightarrows \frac{\det K(x_i, x_j)_{i,j=1,\dots,l}}{\prod_{i=1}^l K(x_i, x_i)}. \tag{10}$$

Теперь, используя сходимость по вариации мер $K_n(x,x)\,d\mu_n(x)$ к предельной мере $K(x,x)\,d\mu(x)$, вспоминая, что в силу положительности наших ядер частные в (10) не превосходят 1, и устремляя $\varepsilon \to 0$, завершаем доказательство предложения. □

Возьмем отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Из предложения 1 непосредственно вытекает такое

**Следствие 4.** *Пусть $K$ – оператор с конечным следом, действующий в пространстве $L_2([a,b])$ и допускающий непрерывное ядро $K(x,y)$. Пусть, далее, $K_n$ – последовательность ядер на $\mathbb{Z}$, наделенном стандартной считающей мерой, таких, что при любых $x, y \in [a,b]$ выполнено предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} nK_n([nx],[ny]) = K(x,y), \tag{11}$$

*причем сходимость в (11) равномерна на $[a,b]$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \det(1 + \chi_{[a,b]} K_n \chi_{[a,b]}) = \det(1+K). \tag{12}$$

Предложение 1 непосредственно вытекает теперь из формулы (4) и формулы (12) в следствии 4.

## Литература


[1] C. Andréief, *Note sur une relation entre les intégrales définies des produits des fonctions*, Mém. Soc. Sci. Phys. Nat. Bordeaux, **2** (1886), 1–14.

[2] E. Basor, Yang Chen, *A note on Wiener–Hopf determinants and the Borodin–Okounkov identity*, arXiv: math/0202062.

[3] E. L. Basor, H. Widom, *On a Toeplitz determinant identity of Borodin and Okounkov*, Integral Equations Operator Theory, **37**:4 (2000), 397–401.

[4] A. Borodin, A. Okounkov, *A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants*, Integral Equations Operator Theory, **37**:4 (2000), 386–396.

[5] A. Böttcher, *On the determinant formulas by Borodin, Okounkov, Baik, Deift, and Rains*, arXiv: math/0101008.

[6] A. Böttcher, *One more proof of the Borodin–Okounkov formula for Toeplitz determinants*, Integral Equations Operator Theory, **41**:1 (2001), 123–125.

[7] A. I. Bufetov, *Quasi-symmetries of determinantal point processes*, Ann. Probab., **46**:2 (2018), 956–1003.

[8] A. I. Bufetov, *The sine-process has excess one*, arXiv: 1912.13454.

[9] P. Deift, A. Its, I. Krasovsky, *Toeplitz matrices and Toeplitz determinants under the impetus of the Ising model: some history and some recent results*, Comm. Pure Appl. Math., **66**:9 (2013), 1360–1438.

[10] J. S. Geronimo, K. M. Case, *Scattering theory and polynomials orthogonal on the unit circle*, J. Math. Phys., **20**:2 (1979), 299–310.

[11] Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов, *О предельной теореме Г. Сегё*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **35**:2 (1971), 408–427; англ. пер.: B. L. Golinskiĭ, I. A. Ibragimov, *On Szegö's limit theorem*, Math. USSR-Izv., **5**:2 (1971), 421–444.

[12] У. Гренандер, Г. Сегё, *Тёплицевы формы и их приложения*, ИЛ, М., 1961, 308 с.; пер. с англ.: U. Grenander, G. Szegö, *Toeplitz forms and their applications*, California Monogr. Math. Sci., Univ. of California Press, Berkeley–Los Angeles, 1958, vii+245 pp.

[13] И. А. Ибрагимов, *Об одной теореме Г. Сегё*, Матем. заметки, **3**:6 (1968), 693–702; англ. пер.: I. A. Ibragimov, *On a theorem of G. Szegö*, Math. Notes, **3**:6 (1968), 442–448.

[14] B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle*, Parts 1, 2, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, xxvi+466 pp., i–xxii and 467–1044 pp.

[15] G. Szegö, *Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion*, Math. Ann., **76**:4 (1915), 490–503.

[16] G. Szegö, *On certain Hermitian forms associated with the Fourier series of a positive function*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.], **1952**, Tome Suppl. – Festschrift M. Riesz (1952), 228–238.

**Александр Игоревич Буфетов**
**(Alexander I. Bufetov)**
Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия;
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия;
Aix-Marseille Université, CNRS, Institut de Mathématiques de Marseille, Marseille, France
*E-mail*: bufetov@mi-ras.ru

Поступила в редакцию
6 февраля 2024 г.
После доработки
9 марта 2024 г.
Принята к публикации
14 марта 2024 г.