В. Г. Бардаков, Строение группы сопрягающих автоморфизмов, *Алгебра и логика*, 2003, том 42, номер 5, 515–541

Алгебра и логика, 42, N 5 (2003), 515—541

УДК 512.54

СТРОЕНИЕ ГРУППЫ СОПРЯГАЮЩИХ АВТОМОРФИЗМОВ*)

В. Г. БАРДАКОВ

Классическим объектом исследования комбинаторной теории групп является группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n ранга $n \geqslant 2$ со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Известно [1, 2], что группу $\mathrm{Aut}(F_2)$ можно построить из циклических при помощи свободного и полупрямого произведения. Вопрос о том, можно ли распространить этот результат на случай $n > 2$, остается открытым. Если $A_n = F_n/F_n'$ — фактор-группа группы F_n по ее коммутанту F_n', то всякий автоморфизм группы F_n индуцирует некоторый автоморфизм группы A_n, а потому существует гомоморфизм

$$\xi : \mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Aut}(A_n).$$

Его ядро, состоящее из автоморфизмов, действующих тождественно по модулю коммутанта F_n', называют *группой* IA-*автоморфизмов* и обозначают $\mathrm{IA}(F_n)$ (см. [3, гл. 1, § 4]). Так как $A_n \simeq \mathbb{Z}^n$ — свободная абелева группа ранга n, то $\mathrm{Aut}(A_n)$ изоморфна общей линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Поэтому при изучении группы $\mathrm{Aut}(F_n)$ целесообразно рассмотреть строение группы $\mathrm{IA}(F_n)$. При $n = 2$ последняя изоморфна группе внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(F_2)$, которая, в свою очередь, изоморфна F_2, а потому основной интерес представляет случай $n \geqslant 3$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 02-01-01118.

Д. Нильсен для случая $n \leqslant 3$ и В. Магнус для всех n (см. [3, гл. 1, § 4]) показали, что группа $\mathrm{IA}(F_n)$ порождается следующими автоморфизмами

$$\varepsilon_{ijk} : \begin{cases} x_i \mapsto x_i[x_j, x_k], & \text{если } k \neq i, j, \\ x_l \mapsto x_l, & \text{если } l \neq i, \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij} : \begin{cases} x_i \mapsto x_j^{-1} x_i x_j, & \text{если } i \neq j, \\ x_l \mapsto x_l, & \text{если } l \neq i, \end{cases}$$

где $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — коммутатор элементов a и b. Определяющие соотношения группы $\mathrm{IA}(F_n)$ при $n \geqslant 3$ до сих пор неизвестны, а, как установили С. Крстич и Д. Маккул [4], группа $\mathrm{IA}(F_3)$ не является конечно определенной.

Подгруппу группы $\mathrm{IA}(F_n)$, порожденную автоморфизмами ε_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, называют *группой сопрягающих базис автоморфизмов* и обозначают Cb_n. Д. Маккул [5] показал, что она является конечно определенной, и нашел ее определяющие соотношения.

Группа Cb_n является подгруппой *группы сопрягающих автоморфизмов* C_n. (Напомним, что всякий автоморфизм из C_n переводит порождающий x_i в элемент $f_i^{-1} x_{\pi(i)} f_i$, где $f_i \in F_n$, а π — некоторая подстановка из симметрической группы S_n. Очевидно, если π — тождественная подстановка, то этот автоморфизм лежит в группе Cb_n.) Множество автоморфизмов из C_n, оставляющих на месте произведение $x_1 x_2 \ldots x_n$, образует группу кос B_n. Группа B_n содержит нормальную подгруппу P_n (называемую *группой крашеных кос*) такую, что B_n/P_n изоморфна S_n. Как установила А. Г. Савушкина [6, лемма 3], группы B_n и Cb_n пересекаются по группе P_n. Строение последней достаточно хорошо известно [7, 8]. Интересно было бы выяснить, как P_n расположена в Cb_n.

Группа P_n разлагается в полупрямое произведение свободных групп

$$P_n = U_n \leftthreetimes (U_{n-1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (U_3 \leftthreetimes U_2)) \ldots),$$

где $U_i \simeq F_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Возникает естественный вопрос: можно ли группу Cb_n аналогичным образом разложить в полупрямое произведение некоторых групп? В предлагаемой работе дается положительный ответ на этот вопрос, а именно, доказывается

ТЕОРЕМА 1. *Группа Cb_n, $n \geqslant 2$, разлагается в полупрямое произведение*

$$Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes (D_{n-2} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (D_2 \leftthreetimes D_1))\ldots),$$

где подгруппа D_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, порождается элементами $\varepsilon_{i+1,1}$, $\varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}$, $\varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}$, причем элементы $\varepsilon_{i+1,1}$, $\varepsilon_{i+1,2}, \ldots$, $\varepsilon_{i+1,i}$ порождают свободную группу ранга i, а элементы $\varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots$, $\varepsilon_{i,i+1}$ — свободную абелеву группу ранга i. Это разложение согласовано с соответствующим разложением группы P_n, т. е. имеют место включения $U_{i+1} \leq D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Отметим, что если $G = G_1 \star G_2 \star \ldots \star G_n$ — свободное произведение, каждый множитель G_i не разложим и не изоморфен бесконечной циклической группе, а $\overline{G} = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ — прямое произведение этих же групп, то для подгруппы группы $\mathrm{Aut}(G)$, являющейся ядром гомоморфизма $\mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(\overline{G})$, аналогичная теорема установлена в [9].

В качестве следствия этой теоремы мы получим нормальную форму слов в группе Cb_n. Так как группа C_n является полупрямым произведением групп Cb_n и S_n, то можно построить нормальную форму слов и в C_n. Разложение Cb_n в полупрямое произведение, построенное в теореме 1, не единственно (см. § 4). Кроме того, устанавливаются некоторые свойства групп C_n и Cb_n. В частности, доказывается, что при $n \geqslant 4$ в этих группах неразрешима проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы. Также устанавливается, что группа C_n, $n \geqslant 2$, порождается не более, чем четырьмя элементами, и дается соответствующий генетический код. Доказывается, что Cb_n, $n \geqslant 2$, не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Это утверждение тесно связано с [10, вопрос 14.15].

В связи с полученными результатами возникают следующие естественные вопросы, ответы на которые позволили бы лучше понять строение группы IA-автоморфизмов.

ВОПРОС 1. Как устроена группа, порожденная автоморфизмами ε_{ijk}? В частности, будет ли она конечно определенной?

ВОПРОС 2. Можно ли для группы $\mathrm{IA}(F_n)$, $n \geqslant 4$, получить разложение в полупрямое произведение, аналогичное разложению группы Cb_n

из теоремы 1? Как Cb_n расположена в $\mathrm{IA}(F_n)$?

§ 1. Некоторые вспомогательные утверждения

Напомним (см. [11, § 6]), что группа G является *полупрямым произведением* групп A и B (обозначается: $G = A \leftthreetimes B$), если в G существуют подгруппы H, K такие, что

$$G = HK, \quad A \simeq H \trianglelefteq G, \quad B \simeq K, \quad H \cap K = 1.$$

Если

$$\begin{aligned} A &= \text{гр}(a_1, a_2, \ldots, a_k \parallel L_1, L_2, \ldots, L_p), \\ B &= \text{гр}(b_1, b_2, \ldots, b_l \parallel M_1, M_2, \ldots, M_q) \end{aligned}$$

— генетические коды групп A и B соответственно, то $G = A \leftthreetimes B$ имеет генетический код

$$G = \text{гр}(a_1, a_2, \ldots, a_k; b_1, b_2, \ldots, b_l \parallel L_1, L_2, \ldots, L_p; \\ M_1, M_2, \ldots, M_q; b_i^{-1} a_j b_i = R_{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant l,\ 1 \leqslant j \leqslant k),$$

где $L_1, L_2, \ldots, L_p, R_{ij}$ — слова в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \ldots, a_k^{\pm 1}\}$, $M_1, M_2, \ldots$ $\ldots, M_q$ — слова в алфавите $\{b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}, \ldots, b_l^{\pm 1}\}$, элементы $R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{ik}$ порождают группу A для любого $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, и сопряжение элементом b_i индуцирует автоморфизм группы A, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Напомним [7, 8], что группа кос B_n, $n \geqslant 2$, на n нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i,\ |i - j| \geqslant 2. \tag{2}$$

Существует гомоморфизм группы B_n на группу S_n, переводящий порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, ядро P_n которого называют *группой крашеных кос*. Группа P_n порождается элементами a_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, которые выражаются через порождающие группы B_n следующим образом

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2,$$

$$a_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}, \quad i+1 < j \leqslant n.$$

Группа P_n является полупрямым произведением нормальной подгруппы U_n, которая является свободной группой со свободными порождающими $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1,n}$, и группы P_{n-1}. Аналогично, P_{n-1} является полупрямым произведением свободной группы U_{n-1} со свободными порождающими $a_{1,n-1}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n-2,n-1}$ и подгруппы P_{n-2}, и т. д. Итак,

$$P_n = U_n \leftthreetimes (U_{n-1} \leftthreetimes (\dots \leftthreetimes (U_3 \leftthreetimes U_2))\dots), \quad U_i \simeq F_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Группа P_n определяется соотношениями (при $\nu = \pm 1$):

$$\begin{aligned}
&a_{ik}^{-\nu} a_{kj} a_{ik}^{\nu} = (a_{ij}a_{kj})^{\nu}\, a_{kj}\, (a_{ij}a_{kj})^{-\nu}, && \\
&a_{km}^{-\nu} a_{kj} a_{km}^{\nu} = (a_{kj}a_{mj})^{\nu}\, a_{kj}\, (a_{kj}a_{mj})^{-\nu}, && m < j, \\
&a_{im}^{-\nu} a_{kj} a_{im}^{\nu} = \left[a_{ij}^{-\nu}, a_{mj}^{-\nu}\right]^{\nu} a_{kj} \left[a_{ij}^{-\nu}, a_{mj}^{-\nu}\right]^{-\nu}, && i < k < m, \\
&a_{im}^{-\nu} a_{kj} a_{im}^{\nu} = a_{kj}, && k < i;\ \ m < j \ \text{ или } \ m < k.
\end{aligned}$$

Группа B_n вкладывается в группу $\mathrm{Aut}(F_n)$. При этом порождающий σ_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, определяет автоморфизм

$$\sigma_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1}, & \\ x_{i+1} \mapsto x_i, & \\ x_l \mapsto x_l, & \text{если} \quad l \neq i, i+1. \end{cases}$$

Порождающий a_{rs} группы P_n определяет автоморфизм

$$a_{rs} : \begin{cases} x_i \mapsto x_i, & \text{если} \ \ s < i \ \text{ или } \ i < r, \\ x_r \mapsto x_r x_s x_r x_s^{-1} x_r^{-1}, & \\ x_i \mapsto [x_r^{-1}, x_s^{-1}] x_i [x_r^{-1}, x_s^{-1}]^{-1}, & \text{если} \ \ r < i < s, \\ x_s \mapsto x_r x_s x_r^{-1}. & \end{cases}$$

Как установил Э. Артин (см. [8, теор. 1.9]), автоморфизм β из $\mathrm{Aut}(F_n)$ принадлежит группе B_n тогда и только тогда, когда

1) $\beta(x_i) = a_i^{-1} x_{\pi(i)} a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

2) $\beta(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$,

где π — некоторая подстановка из S_n, $a_i \in F_n$.

Автоморфизм, удовлетворяющий условию 1, называют сопрягающим. Сопрягающий автоморфизм, действующий тождественно по модулю коммутанта F_n', называют *сопрягающим базис*. Как показал Д. Маккул [5], группа сопрягающих базис автоморфизмов Cb_n порождается автоморфизмами ε_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, определенными во введении, и имеет следующие определяющие соотношения (условимся здесь и в дальнейшем обозначать разные индексы разными буквами):

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij}, \tag{4}$$

$$(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj})\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj}). \tag{5}$$

Пусть $\Gamma = (V, E)$ — неориентированный граф с конечным множеством вершин V и множеством ребер E, которое не содержит петель и кратных ребер. *Граф-группой* $G(\Gamma)$ называется группа с множеством порождающих $v_i \in V$ и множеством определяющих соотношений $v_i v_j = v_j v_i$, если вершины v_i и v_j соединены ребром в Γ. Граф-группы изучались в [12, 13], ширина вербальных подгрупп граф-групп исследовалась в [14].

§ 2. Доказательство основной теоремы

Докажем вначале несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *В группе Cb_n справедливы следующие формулы сопряжения (при $\nu = \pm 1$):*

1) $\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kl}$,
2) $\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kj}$,
3) $\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kj}^{\nu}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}^{-\nu}$,
4) $\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kj}^{\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}^{-\nu}$,
5) $\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}^{\nu} = [\varepsilon_{kj}^{-\nu}, \varepsilon_{ik}]\varepsilon_{jk}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы 1, 2 легко следуют из определяющих соотношений (3)—(5).

Из соотношения (5) вытекает равенство

$$(\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij})\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ki}(\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij}). \tag{6}$$

Домножим обе его части слева на ε_{kj}^{-1}, а справа на ε_{ij}^{-1}, получим

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}^{-1} = \varepsilon_{kj}^{-1}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj},$$

т. е. формулу 3 при $\nu = -1$. Воспользовавшись перестановочностью элементов ε_{kj} и ε_{ij}, перепишем (6) в виде

$$(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj})\varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ki}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kj}).$$

Домножим обе части этого равенства слева на ε_{ij}^{-1}, а справа на ε_{kj}^{-1}, получим

$$\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij},$$

т. е. формулу 3 при $\nu = 1$.

Доказательство формулы 4 аналогично.

Для доказательства формулы 5 воспользуемся соотношением

$$(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk})\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}),$$

выполненным в группе Cb_n. Из этого соотношения следует равенство

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}(\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk})\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}.$$

Перепишем его в виде

$$(\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ij}^{\nu})(\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}^{\nu}) = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}.$$

Отсюда и из равенства 4 получим

$$(\varepsilon_{kj}^{\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}^{-\nu})(\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}^{\nu}) = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}.$$

Тогда

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kj}^{\nu}\varepsilon_{ik}^{-1}\varepsilon_{kj}^{-\nu}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk} = [\varepsilon_{kj}^{-\nu}, \varepsilon_{ik}]\varepsilon_{jk}.$$

Лемма 1 доказана.

В группе Cb_n определим подгруппы

$$D_i = \text{гр}(\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}, \varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

ЛЕММА 2. *Пусть k, l — натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $2 \leqslant k < l \leqslant n$. Тогда группа D_{k-1} лежит в нормализаторе группы D_{l-1}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$D_{k-1} = \text{гр}(\varepsilon_{k,1}, \varepsilon_{k,2}, \ldots, \varepsilon_{k,k-1}, \varepsilon_{1,k}, \varepsilon_{2,k}, \ldots, \varepsilon_{k-1,k}),$$

$$D_{l-1} = \text{гр}(\varepsilon_{l,1}, \varepsilon_{l,2}, \ldots, \varepsilon_{l,l-1}, \varepsilon_{1,l}, \varepsilon_{2,l}, \ldots, \varepsilon_{l-1,l}).$$

Возьмем некоторый порождающий $\varepsilon_{k,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, группы D_{k-1}. Покажем, что, сопрягая им любой порождающий группы D_{l-1}, получим элемент из D_{l-1}. Ввиду леммы 1 выполняются формулы сопряжения:

$$\begin{array}{lcllcll}
\varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{lj}\varepsilon_{ki}^{\nu} & = & \varepsilon_{lj}, & \varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{jl}\varepsilon_{ki}^{\nu} & = & \varepsilon_{jl}, & j \neq i, k,\\
\varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{li}\varepsilon_{ki}^{\nu} & = & \varepsilon_{li}, & \varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{ki}^{\nu} & = & \varepsilon_{li}^{\nu}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{li}^{-\nu}, & \\
\varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ki}^{\nu} & = & \varepsilon_{li}^{\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{li}^{-\nu}, & \varepsilon_{ki}^{-\nu}\varepsilon_{il}\varepsilon_{ki}^{\nu} & = & [\varepsilon_{li}^{-\nu}, \varepsilon_{kl}]\varepsilon_{il}. &
\end{array}$$

Так как правые части этих равенств лежат в D_{l-1}, то получаем требуемые формулы.

Рассмотрим теперь элемент ε_{ik}, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. В силу леммы 1 имеем равенства:

$$\begin{array}{lcllcll}
\varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{lj}\varepsilon_{ik}^{\nu} & = & \varepsilon_{lj}, & \varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{jl}\varepsilon_{ik}^{\nu} & = & \varepsilon_{jl}, & j \neq i, k,\\
\varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{ik}^{\nu} & = & \varepsilon_{lk}, & \varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{li}\varepsilon_{ik}^{\nu} & = & \varepsilon_{lk}^{\nu}\varepsilon_{li}\varepsilon_{lk}^{-\nu}, & \\
\varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{il}\varepsilon_{ik}^{\nu} & = & \varepsilon_{lk}^{\nu}\varepsilon_{il}\varepsilon_{lk}^{-\nu}, & \varepsilon_{ik}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ik}^{\nu} & = & [\varepsilon_{lk}^{-\nu}, \varepsilon_{il}]\varepsilon_{kl}. &
\end{array}$$

Так как правые части этих равенств лежат в D_{l-1}, то при сопряжении элементом ε_{ik}^{ν} порождающих группы D_{l-1} получаются по-прежнему элементы из D_{l-1}.

Применяя индукцию, из этой леммы легко вывести

СЛЕДСТВИЕ. *Подгруппа D_{n-1} нормальна в группе Cb_n.*

ЛЕММА 3. *Группа Cb_n, $n \geqslant 2$, является полупрямым произведением*

$$Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes (D_{n-2} \leftthreetimes \ldots (\leftthreetimes(D_2 \leftthreetimes D_1)) \ldots),$$

где $D_i = \text{гр}(\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}, \varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1})$, $\text{гр}(\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \ldots, \varepsilon_{i+1,i}) \simeq F_i$, $\text{гр}(\varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}) \simeq \mathbb{Z}^i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 2$ имеем $Cb_2 = D_1 = \text{гр}(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{12})$. Так как Cb_2 не содержит соотношений, то $D_1 \simeq F_2 = F_1 * \mathbb{Z}$ и базис индукции проверен.

Покажем, что $Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes Cb_{n-1}$. Из леммы 2 следует, что подгруппа D_{n-1} нормальна в Cb_n. Рассмотрим соотношения (3)—(5), определяющие группу Cb_n. Разобъем их на три непересекающихся подмножества. В первое будут входить соотношения, содержащие только порождающие группы D_{n-1}. Так как у любой пары порождающих группы D_{n-1} один из индексов равен n, в первое подмножество входят только соотношения из (4) вида

$$\varepsilon_{in}\varepsilon_{jn} = \varepsilon_{jn}\varepsilon_{in}, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n-1. \tag{7}$$

Тогда $\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \ldots, \varepsilon_{n-1,n}$ порождают абелеву подгруппу в D_{n-1}. Также легко проверить, что элементы $\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \ldots, \varepsilon_{n,n-1}$ являются свободными порождающими свободной группы F_{n-1}. Во второе подмножество входят соотношения, содержащие только порождающие группы Cb_{n-1}, а третье состоит из соотношений, содержащих одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}. Покажем, что последние соотношения определяют действие группы Cb_{n-1} на подгруппе D_{n-1}.

Соотношения из (3), содержащие одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}, могут быть одного из двух следующих видов:

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kn} = \varepsilon_{kn}\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}\varepsilon_{nk} = \varepsilon_{nk}\varepsilon_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j, k < n. \tag{8}$$

Из них вытекают формулы сопряжения

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{kn}, \quad \varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{nk}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{nk}, \quad \nu = \pm 1. \tag{9}$$

Если соотношение из (4) содержит одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}, то оно имеет вид

$$\varepsilon_{nj}\varepsilon_{kj} = \varepsilon_{kj}\varepsilon_{nj}, \quad 1 \leqslant k, j < n.$$

Отсюда

$$\varepsilon_{kj}^{-\nu}\varepsilon_{nj}\varepsilon_{kj}^{\nu} = \varepsilon_{nj}, \quad 1 \leqslant k, j < n, \quad \nu = \pm 1. \tag{10}$$

Если соотношение из (5) содержит одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}, то оно может быть одного из следующих видов:

$$(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{nj})\varepsilon_{in} = \varepsilon_{in}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{nj}), \quad (\varepsilon_{nj}\varepsilon_{ij})\varepsilon_{ni} = \varepsilon_{ni}(\varepsilon_{nj}\varepsilon_{ij}),$$
$$(\varepsilon_{in}\varepsilon_{jn})\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\varepsilon_{in}\varepsilon_{jn}), \quad 1 \leqslant i, j < n.$$

Из них так же, как и в доказательстве леммы 1, выводятся формулы сопряжения:

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{in}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{nj}^{\nu}\varepsilon_{in}\varepsilon_{nj}^{-\nu}, \tag{11}$$

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{ni}\varepsilon_{ij}^{\nu} = \varepsilon_{nj}^{\nu}\varepsilon_{ni}\varepsilon_{nj}^{-\nu}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_{ij}^{-\nu}\varepsilon_{jn}\varepsilon_{ij}^{\nu} = [\varepsilon_{nj}^{-\nu}, \varepsilon_{in}]\varepsilon_{jn}, \quad 1 \leqslant i, j < n, \quad \nu = \pm 1. \tag{13}$$

Следовательно, соотношения группы Cb_n, содержащие одновременно порождающие групп D_{n-1} и Cb_{n-1}, равносильны соотношениям (9)—(13), определяющим действие группы Cb_{n-1} на подгруппе D_{n-1}. Так как $D_{n-1} \cap \cap Cb_{n-1} = 1$, то $Cb_n = D_{n-1} \leftthreetimes Cb_{n-1}$. Воспользовавшись индуктивным предположением, получим требуемое разложение. Лемма доказана.

Отметим, что ввиду леммы 2 порядок расстановки скобок в полученном разложении может быть произвольным.

Группа C_n содержит группу Cb_n. При этом $C_n = Cb_n \leftthreetimes S_n$ (см. [6]), где S_n порождается автоморфизмами

$$\alpha_i : \begin{cases} x_i \mapsto x_{i+1}, & \\ x_{i+1} \mapsto x_i, & \text{если } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ x_l \mapsto x_l, & \text{если } l \neq i, i+1, \end{cases}$$

и определяется соотношениями

$$\alpha_j^2 = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{14}$$

$$\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\alpha_{i+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{15}$$

$$\alpha_k\alpha_l = \alpha_l\alpha_k, \quad 1 \leqslant k, l \leqslant n-1, \quad |k-l| \geqslant 2. \tag{16}$$

При этом группа C_n порождается автоморфизмами ε_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, и α_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и определяется соотношениями (3)—(5), (14)—(16) и

$$\varepsilon_{ij}\alpha_k = \alpha_k\varepsilon_{ij}, \quad k \neq i-1, i, j-1, j, \tag{17}$$

$$\varepsilon_{ij}\alpha_i = \alpha_i\varepsilon_{i+1,j}, \quad \varepsilon_{ij}\alpha_j = \alpha_j\varepsilon_{i,i+1}, \quad \varepsilon_{i,i+1}\alpha_i = \alpha_i\varepsilon_{i+1,i} \tag{18}$$

(см. [6, лемма 1]).

Очевидно, что P_n содержится в Cb_n. Выразим порождающие первой через порождающие второй.

ЛЕММА 4. *Порождающие группы P_n представимы в следующем виде*:

$$a_{i,i+1} = \varepsilon_{i,i+1}^{-1}\varepsilon_{i+1,i}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \varepsilon_{j-1,i}\varepsilon_{j-2,i}\dots\varepsilon_{i+1,i}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{i+1,i}^{-1}\dots\varepsilon_{j-2,i}^{-1}\varepsilon_{j-1,i}^{-1} \\ &= \varepsilon_{j-1,j}^{-1}\varepsilon_{j-2,j}^{-1}\dots\varepsilon_{i+1,j}^{-1}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{i+1,j}\dots\varepsilon_{j-2,j}\varepsilon_{j-1,j}, \\ &2 \leqslant i+1 < j \leqslant n. \end{aligned} \tag{20}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо вспомнить, как действуют соответствующие элементы на порождающих свободной группы F_n. Равенство (19) проверяется непосредственно.

Для доказательства первого равенства из (20) достаточно проверить, что автоморфизм

$$a_{ij}\varepsilon_{ji}(\varepsilon_{j-1,i}\varepsilon_{j-2,i}\dots\varepsilon_{i+1,i})\varepsilon_{ij}(\varepsilon_{i+1,i}^{-1}\dots\varepsilon_{j-2,i}^{-1}\varepsilon_{j-1,i}^{-1})$$

является тождественным. Для доказательства второго равенства из (20) установим справедливость соотношения

$$\varepsilon_{ki}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{ki}^{-1} = \varepsilon_{kj}^{-1}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{kj}, \quad i+1 \leqslant k \leqslant j-1. \tag{21}$$

В силу леммы 1 имеем формулы сопряжения

$$\varepsilon_{ki}\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ki}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}[\varepsilon_{kj}, \varepsilon_{ji}], \quad \varepsilon_{ki}\varepsilon_{ji}^{-1}\varepsilon_{ki}^{-1} = \varepsilon_{ji}^{-1},$$

откуда

$$\varepsilon_{ki}(\varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1})\varepsilon_{ki}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}[\varepsilon_{kj}, \varepsilon_{ji}]\varepsilon_{ji}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}\varepsilon_{kj}^{-1}\varepsilon_{ji}^{-1}\varepsilon_{kj}.$$

Поскольку элементы ε_{ij}^{-1} и ε_{kj}^{-1} перестановочны, получим (21), откуда легко следует требуемое. Лемма доказана.

Теперь докажем оставшуюся часть теоремы 1. Напомним, что

$$D_i = \text{гр}(\varepsilon_{i+1,1}, \varepsilon_{i+1,2}, \dots, \varepsilon_{i+1,i}, \varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \dots, \varepsilon_{i,i+1}),$$

а свободная группа U_{i+1} порождается элементами $a_{1,i+1}, a_{2,i+1}, \dots, a_{i,i+1}$. По лемме 4 справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_{k,i+1} &= \varepsilon_{i,i+1}^{-1}\varepsilon_{i-1,i+1}^{-1}\dots\varepsilon_{k+1,i+1}^{-1}(\varepsilon_{k,i+1}^{-1}\varepsilon_{i+1,k}^{-1})\varepsilon_{k+1,i+1}\dots\varepsilon_{i-1,i+1}\varepsilon_{i,i+1}, \\ &\quad 1 \leqslant k \leqslant i-1, \\ a_{i,i+1} &= \varepsilon_{i,i+1}^{-1}\varepsilon_{i+1,i}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому U_{i+1} является подгруппой группы D_i.

Более того, используя преобразования Тице, нетрудно показать, что группа D_i порождается элементами $a_{1,i+1}, a_{2,i+1}, \dots, a_{i,i+1}$; $\varepsilon_{1,i+1}, \varepsilon_{2,i+1}, \dots, \varepsilon_{i,i+1}$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Доказанная теорема сводит описание группы Cb_n к описанию ее подгрупп $D_{n-1}, D_{n-2}, \dots, D_1$. Покажем, что последние (за исключением D_1) устроены довольно сложно. Более того, в [9, с. 167] высказана гипотеза о том, что они не являются конечно определенными.

По теореме 1 группа Cb_3 является полупрямым произведением $Cb_3 = D_2 \leftthreetimes D_1$, где $D_2 = \text{гр}(\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})$, $D_1 = \text{гр}(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}) \simeq F_2$. В группе D_2 элементы ε_{13} и ε_{23} перестановочны. Покажем, что в D_2 выполняется и множество других соотношений. Действительно, как было замечено при доказательстве теоремы 1, сопряжения элементами из D_1 индуцируют автоморфизмы группы D_2. Следовательно, сопрягая соотношение перестановочности, мы опять получим соотношение, выполненное в D_2. В частности, сопрягая соотношение $\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}\varepsilon_{13}$ различными степенями элементов ε_{12} и ε_{21}, получим следующие соотношения

$$[\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{32}^{k}\varepsilon_{13}\varepsilon_{32}^{-k}] = 1, \quad [\varepsilon_{13}\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}^{k}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}^{-k}] = 1,$$

справедливые для любого целого k.

§ 3. Некоторые свойства группы сопрягающих автоморфизмов

Найдем фактор-группы C_n/C_n' и Cb_n/Cb_n'. Для этого используется

ЛЕММА 5 [6, теор. 1]. *Группа C_n порождается автоморфизмами σ_i, α_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, и определяется соотношениями* (1), (2), (14)—(16) *и*

$$\alpha_i\sigma_j = \sigma_j\alpha_i, \quad |i-j| \geqslant 2, \tag{22}$$

$$\sigma_i\alpha_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\alpha_i\sigma_{i+1}, \quad \sigma_i\sigma_{i+1}\alpha_i = \alpha_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}. \tag{23}$$

Из этой леммы и генетического кода группы Cb_n легко выводится

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) *Фактор-группа C_n/C_n', $n \geqslant 2$, изоморфна группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.*

б) *Фактор-группа Cb_n/Cb_n', $n \geqslant 2$, изоморфна группе $\mathbb{Z}^{n(n-1)}$.*

Группа внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(F_n)$ свободной группы F_n содержится в группе Cb_n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пересечение $B_n \cap \mathrm{Inn}(F_n)$, $n \geqslant 2$, является бесконечной циклической группой, которая порождается внутренним автоморфизмом, а именно сопряжением элементом $x_1x_2\dots x_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из описания (см. § 1) группы кос как подгруппы группы $\mathrm{Aut}(F_n)$, данного Э. Артином. Элементы из B_n оставляют неподвижным произведение $x_1x_2\dots x_n$. Среди внутренних автоморфизмов этим свойством обладает только сопряжение посредством $(x_1x_2\dots x_n)^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда и вытекает требуемое.

Покажем теперь, что группа C_n, $n \geqslant 2$, порождается не более, чем четырьмя элементами. Непосредственно из леммы 5 следует

$$C_2 = \mathrm{гр}(\alpha_1, \sigma_1 \parallel \alpha_1^2 = 1) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Группа C_n, $n \geqslant 3$, порождается элементами α_1, α, σ_1, σ и определяется соотношениями*

$$\sigma^n = (\sigma\sigma_1)^{n-1}, \quad \sigma_1(\sigma^{-j}\sigma_1\sigma^j) = (\sigma^{-j}\sigma_1\sigma^j)\sigma_1, \quad 2 \leqslant j \leqslant n/2, \tag{24}$$

$$\alpha^2 = 1, \quad \alpha^n = (\alpha_1\alpha)^{n-1}, \quad \alpha_1(\alpha^{-j}\alpha_1\alpha^j) = (\alpha^{-j}\alpha_1\alpha^j)\alpha_1, \quad 2 \leqslant j \leqslant n/2, \tag{25}$$

$$\alpha^{-i}\alpha_1\alpha^i\sigma^j\sigma_1\sigma^{-j} = \sigma^j\sigma_1\sigma^{-j}\alpha^{-i}\alpha_1\alpha^i, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n-2, \quad |i-j| \geqslant 2, \tag{26}$$

$$\sigma^{i-1}\sigma_1\sigma^{-(i-1)}\alpha^{-i}\alpha_1\alpha\alpha_1\alpha^{i-1} = \alpha^{-i}\alpha_1\alpha\alpha_1\alpha^{i-1}\sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{27}$$

$$\sigma^{i-1}\sigma_1\sigma\sigma_1\sigma^{-i}\alpha^{-(i-1)}\alpha_1\alpha^{i-1} = \alpha^{-i}\alpha_1\alpha^i\sigma^{i-1}\sigma_1\sigma\sigma_1\sigma^{-i}, \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{28}$$

При этом

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}, \quad \alpha = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\dots\alpha_1, \tag{29}$$

$$\sigma_{i+1} = \sigma^i\sigma_1\sigma^{-i}, \quad \alpha_{i+1} = \alpha^{-i}\alpha_1\alpha^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-2. \tag{30}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно [15, гл. 6], что группа B_n, $n \geqslant 3$, порождается элементами σ_1, σ и определяется соотношениями (24).

Аналогично, симметрическая группа S_n порождается элементами α_1, α и определяется соотношениями (25). При этом связь между старыми и новыми порождающими выражается формулами (29) и (30). Следовательно, в представлении группы C_n из леммы 5 можно заменить порождающие α_i, σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, на α_1, α, σ_1, σ, соотношения (1) и (2) — на (24), соотношения (14), (15) и (16) — на (25). Подставив в (22) и (23) выражения порождающих α_i, σ_j через α, α_1, σ_1, σ, получим (26)—(28). Предложение доказано.

Покажем теперь, что в группе сопрягающих автоморфизмов C_n можно определить нормальную форму. Для этого в группе D_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, упорядочим порождающие свободной абелевой группы гр$(\varepsilon_{1,i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,i+1}) \simeq \mathbb{Z}^i$ следующим образом:

$$\varepsilon_{1,i+1} < \varepsilon_{2,i+1} < \ldots < \varepsilon_{i,i+1}.$$

Тогда всякий элемент из этой группы однозначно представим в виде $\varepsilon_{1,i+1}^{\beta_1} \varepsilon_{2,i+1}^{\beta_2} \ldots \varepsilon_{i,i+1}^{\beta_i}$ для некоторых целых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$.

Положим далее $\omega_{ij} = \alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\ldots\alpha_j$ при $1 \leqslant j < i \leqslant n-1$ и $\omega_{ij} = 1$ в противном случае. Введем множество

$$\Omega_n = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \omega_{ij} \;\middle|\; 1 \leqslant j \leqslant i \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Всякий элемент c из группы C_n представим в виде*

$$c = d_1 d_2 \ldots d_n \beta,$$

где $d_i \in D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\beta \in \Omega_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено выше, группа C_n порождается элементами ε_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, и α_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. При этом ε_{ij} порождают группу Cb_n, а элементы α_k — группу S_n. Пусть элемент c представлен некоторым словом в алфавите $\{\varepsilon_{ij}^{\pm 1}, \alpha_k \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant n-1\}$. Так как $C_n = Cb_n \leftthreetimes S_n$, то, используя (17), (18), можно передвинуть все α_k вправо и представить c в виде $c = dw$, где d — некоторое слово, содержащее только порождающие $\varepsilon_{ij}^{\pm 1}$, а w — только порождающие

α_k. Так как слово w представляет некоторый элемент группы S_n, то он равен некоторому элементу из множества Ω_n. Последний мы и обозначим через β.

Рассмотрим теперь слово d. Воспользовавшись разложением группы Cb_n в полупрямое произведение групп D_i из теоремы 1, представим элемент d в виде произведения

$$d = d_1 d_2 \dots d_{n-1}, \quad d_i \in D_i.$$

Предложение доказано.

Пусть теперь V — множество теоретико-групповых слов, $V(G)$ — вербальная подгруппа, определенная в группе G множеством слов V. *Шириной* $\mathrm{wid}(G, V)$ относительно множества V (см. [16, § 12]) называется наименьшее $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более, чем m значений слов из $V^{\pm 1}$.

Подгруппа называется *собственной*, если она отлична от единичной и всей группы. Множество слов V называется *собственным*, если вербальная подгруппа $V(F_2)$ является собственной в свободной группе F_2, и *несобственным* в противном случае. Ширина вербальной подгруппы относительно несобственного множества слов всегда конечна [17, лемма 1]. Если в группе G всякое собственное множество слов определяет собственную вербальную подгруппу, то говорят, что G *богата вербальными подгруппами*. Иными словами, группа, богатая вербальными подгруппами, содержит столько же собственных вербальных подгрупп, сколько и свободная группа F_2. Будем говорить, что группа G *не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины*, если для всякого конечного собственного множества слов V ширина $\mathrm{wid}(G, V)$ бесконечна.

ЛЕММА 6 [14, лемма 3]**.** *Если существует эпиморфизм группы G на группу, не имеющую собственных вербальных подгрупп конечной ширины и богатую вербальными подгруппами, то и сама G не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Группа Cb_n, $n \geqslant 2$, не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что существует эпиморфизм группы Cb_n, $n \geqslant 2$, на группу Cb_2, которая изоморфна свободной группе F_2, а для нее требуемое утверждение непосредственно следует из [18]. Остается лишь воспользоваться леммой 6.

В [19] установлено, что группа B_n при $n \geqslant 3$ не имеет собственных вербальных подгрупп конечной ширины. Возможно, что, используя развитые там методы, можно установить аналогичное утверждение и для группы C_n, $n \geqslant 2$.

§ 4. О других разложениях группы сопрягающих базис автоморфизмов

Разложение группы Cb_n в полупрямое произведение, построенное в теореме 1, не единственно. В этом параграфе дается некоторое другое разложение, а также показывается, что группа Cb_3 является HNN-расширением некоторой граф-группы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно проверить, что генетический код группы Cb_n, $n \geqslant 3$, с множеством порождающих ε_{ij}, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, и определяющими соотношениями (3)—(5) обладает следующими свойствами:

а) число соотношений вида (3) равно $(n-3)(n-2)(n-1)n/2$ при $n \geqslant 4$;

б) число соотношений вида (4) равно $(n-2)(n-1)n/2$;

в) число соотношений вида (5) равно $(n-2)(n-1)n$;

г) всякий порождающий ε_{ij} группы Cb_n входит в $3(n-2)$ соотношения вида (5).

Также нам потребуется

ЛЕММА 7. *Каждая из подгрупп* $\text{гр}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji})$, $\text{гр}(\varepsilon_{ki}, \varepsilon_{kj})$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $k \neq i, j$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *группы* Cb_n *изоморфна свободной группе* F_2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Положим $G = \text{гр}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji}) \leq \text{Aut}(F_n)$. Очевидно, G содержится в группе $\text{Aut}(F_2)$, где F_2 — свободная группа с порождающими x_i и x_j. Можно показать, что $G \simeq \text{IA}(F_2)$, а так как последняя изоморфна F_2, то получится требуемое утверждение.

2) Положим $G = \text{гр}(\varepsilon_{ki}, \varepsilon_{kj})$ и рассмотрим некоторое непустое свободно приведенное слово w в алфавите $\{\varepsilon_{ki}^{\pm 1}, \varepsilon_{kj}^{\pm 1}\}$. Покажем, что оно будет определять нетривиальный автоморфизм. Действительно, пусть

$$w = \varepsilon_{ki}^{\alpha_1}\varepsilon_{kj}^{\beta_1}\ldots\varepsilon_{ki}^{\alpha_p}\varepsilon_{kj}^{\beta_p},$$

где все показатели являются целыми числами и, за исключением, возможно, α_1 и β_p, отличны от нуля. Если подействовать этим автоморфизмом на порождающий x_k группы F_n, то он перейдет в элемент

$$x_j^{-\beta_p}x_i^{-\alpha_p}\ldots x_j^{-\beta_1}x_i^{-\alpha_1}x_k x_i^{\alpha_1}x_j^{\beta_1}\ldots x_i^{\alpha_p}x_j^{\beta_p},$$

который, очевидно, отличен от x_k. Следовательно, w определяет нетривиальный автоморфизм. Лемма доказана.

Рассмотрим группу Cb_3. Она порождается элементами ε_{21}, ε_{31}, ε_{12}, ε_{32}, ε_{13}, ε_{23}. Пусть

$$a = \varepsilon_{21}\varepsilon_{31}, \quad b = \varepsilon_{12}\varepsilon_{32}, \quad c = \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}. \tag{31}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. 1) *Группа Cb_3 является* HNN-*расширением*

$$Cb_3 = \text{гр}(G, c \parallel c^{-1}Ac = A, \varphi)$$

граф-группы $G = \text{гр}(a, b, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{23} \parallel a\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}a, a\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}a, a\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}a, b\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}b, c^{-1}bc = \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23})$ с проходной буквой c, связанной подгруппой $A = \text{гр}(a\varepsilon_{31}^{-1}, b, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32})$ и изоморфизмом φ, определенным действием на порождающих

$$\varphi : \begin{cases} a\varepsilon_{31}^{-1} \mapsto a\varepsilon_{31}^{-1}, \\ \varepsilon_{23} \mapsto \varepsilon_{23}, \\ b \mapsto \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}, \\ \varepsilon_{32} \mapsto \varepsilon_{23}^{-1}b^{-1}\varepsilon_{23}b\varepsilon_{32}^{-1}. \end{cases}$$

2) *Группа Cb_3 может быть получена из свободной группы $G_0 = \text{гр}(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23})$ при помощи трех последовательных* HNN-*расширений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (31) выразим порождающие $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}$:

$$\varepsilon_{21} = a\varepsilon_{31}^{-1}, \quad \varepsilon_{12} = b\varepsilon_{32}^{-1}, \quad \varepsilon_{13} = c\varepsilon_{23}^{-1}.$$

Подставив эти выражения в определяющие соотношения группы Cb_3, получим новое представление

$$Cb_3 = \text{гр}(a, \varepsilon_{31}, b, \varepsilon_{32}, c, \varepsilon_{23} \parallel a\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}a,\ a\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}a,\ a\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}a,$$
$$b\varepsilon_{32} = \varepsilon_{32}b,\ b\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}b,\ c^{-1}(a\varepsilon_{31}^{-1})c = a\varepsilon_{31}^{-1},$$
$$c^{-1}\varepsilon_{23}c = \varepsilon_{23}, c^{-1}(b\varepsilon_{32}^{-1})c = b\varepsilon_{32}^{-1},\ c^{-1}(b\varepsilon_{23}^{-1})c = \varepsilon_{23}^{-1}b).$$

Заметим, что последнее соотношение можно переписать в виде

$$(c^{-1}bc)(c^{-1}\varepsilon_{23}^{-1}c) = \varepsilon_{23}^{-1}b$$

и, воспользовавшись перестановочностью ε_{23} и c, получить

$$c^{-1}bc = \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}.$$

Определим подгруппы

$$A = \text{гр}(a\varepsilon_{31}^{-1}, \varepsilon_{23}, b\varepsilon_{32}^{-1}, b), \quad B = \text{гр}(a\varepsilon_{31}^{-1}, \varepsilon_{23}, b\varepsilon_{32}^{-1}, \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}).$$

Легко понять, что

$$A = B = \text{гр}(a\varepsilon_{31}^{-1}, b, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{32}),$$

а сопряжение элементом c определяет автоморфизм

$$\varphi : \begin{cases} a\varepsilon_{31}^{-1} \mapsto a\varepsilon_{31}^{-1}, \\ \varepsilon_{23} \mapsto \varepsilon_{23}, \\ b \mapsto \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}, \\ \varepsilon_{32} \mapsto \varepsilon_{23}^{-1}b^{-1}\varepsilon_{23}b\varepsilon_{32}^{-1}. \end{cases}$$

Отсюда и из нового генетического кода группы Cb_3 получается требуемое HNN-расширение.

2) Если из (31) выразить порождающие ε_{21}, ε_{32}, ε_{13} и подставить их в определяющие соотношения группы Cb_3, то получится следующее представление:

$$Cb_3 = \text{гр}(a, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}, b, \varepsilon_{23}, c \parallel a\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}a,\ a\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}a, a(\varepsilon_{12}^{-1}b) = (\varepsilon_{12}^{-1}b)a,$$
$$b\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}b,\ b(c\varepsilon_{23}^{-1}) = (c\varepsilon_{23}^{-1})b,\ b\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}b,\ c\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}c,$$
$$c\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}c,\ c(a\varepsilon_{31}^{-1}) = (a\varepsilon_{31}^{-1})c).$$

Учитывая четвертое соотношение из этого представления, перепишем третье в виде

$$b^{-1}(a\varepsilon_{12}^{-1})b = \varepsilon_{12}^{-1}a.$$

Тогда

$$b^{-1}ab = \varepsilon_{12}^{-1}a\varepsilon_{12}. \tag{32}$$

Аналогичным образом из пятого соотношения с учетом седьмого получим

$$c^{-1}bc = \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}. \tag{33}$$

И, наконец, из последнего соотношения с учетом первого имеем

$$a^{-1}ca = \varepsilon_{31}^{-1}c\varepsilon_{31}. \tag{34}$$

Таким образом, удаляя третье, пятое и последнее соотношения, а затем вводя вместо них (32)—(34), получим следующий генетический код

$$\begin{aligned} Cb_3 = \text{гр}(a, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}, b, \varepsilon_{23}, c \parallel {} & a\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}a,\ a\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}a,\ b^{-1}ab = \varepsilon_{12}^{-1}a\varepsilon_{12}, \\ & b\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}b,\ c^{-1}bc = \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23},\ b\varepsilon_{31} = \varepsilon_{31}b,\ c\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23}c, \\ & c\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}c,\ a^{-1}ca = \varepsilon_{31}^{-1}c\varepsilon_{31}). \end{aligned}$$

Пусть

$$G_0 = \text{гр}(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23}),$$

$$G_1 = \text{гр}(G_0, a \parallel \operatorname{rel} G_0,\ a^{-1}\varepsilon_{31}a = \varepsilon_{31},\ a^{-1}\varepsilon_{23}a = \varepsilon_{23}),$$

где $\operatorname{rel} G$ — множество определяющих соотношений группы G. Очевидно, G_1 является HNN-расширением группы G_0 с проходной буквой a и связанными подгруппами $A_1 = B_1 = \text{гр}(\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32})$. Рассмотрим далее

$$G_2 = \text{гр}(G_1, b \parallel \operatorname{rel} G_1,\ b^{-1}\varepsilon_{12}b = \varepsilon_{12},\ b^{-1}\varepsilon_{31}b = \varepsilon_{31},\ b^{-1}ab = \varepsilon_{12}^{-1}a\varepsilon_{12}).$$

Ясно, что G_2 является HNN-расширением группы G_1 с проходной буквой b и связанными подгруппами $A_2 = B_2 = \text{гр}(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{31}, a)$. Положим

$$\begin{aligned} G_3 = \text{гр}(G_2, c \parallel \operatorname{rel} G_2,\ & c^{-1}\varepsilon_{23}c = \varepsilon_{23},\ c^{-1}\varepsilon_{12}c = \varepsilon_{12}, \\ & c^{-1}(a\varepsilon_{31}^{-1})c = a\varepsilon_{31}^{-1},\ c^{-1}bc = \varepsilon_{23}^{-1}b\varepsilon_{23}). \end{aligned}$$

Легко заметить, что $G = Cb_3$ и G является HNN-расширением группы G_2 с проходной буквой c и связанными подгруппами

$$A_3 = B_3 = \text{гр}(\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, a\varepsilon_{31}, b).$$

Предложение доказано.

Рассмотрим теперь группу Cb_n для произвольного $n \geqslant 3$. Положим $m = [n/2]$, где квадратные скобки означают взятие целой части. В Cb_n выделим подгруппу H_n, порожденную элементами $\varepsilon_{2i-1,2i}$, $\varepsilon_{2i,2i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. По лемме 7 подгруппа, порожденная элементами $\varepsilon_{2i-1,2i}$, $\varepsilon_{2i,2i-1}$, изоморфна свободной группе F_2, а учитывая перестановочность элементов $\varepsilon_{2i-1,2i}$ и $\varepsilon_{2i,2i-1}$ со всеми остальными порождающими группы H_n, получаем, что $H_n \simeq F_2 \times F_2 \times \ldots \times F_2$ — прямое произведение m экземпляров свободной группы F_2. Пусть G_n — подгруппа, порожденная порождающими группы Cb_n, которые не вошли в систему порождающих группы H_n.

ТЕОРЕМА 2. *Группа Cb_n, $n \geqslant 3$, разлагается в полупрямое произведение $Cb_n = G_n \leftthreetimes H_n$, где $H_n \simeq F_2^m$, $m = [n/2]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что G_n нормальна в Cb_n. Для этого выясним, что происходит с порождающими группы G_n при сопряжении элементом $\varepsilon_{2i-1,2i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. По лемме 1 справедливы следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{k,2i}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i},$$

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{k,2i-1}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i}^{\nu}\varepsilon_{k,2i-1}\varepsilon_{k,2i}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{2i-1,k}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i}^{\nu}\varepsilon_{2i-1,k}\varepsilon_{k,2i}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{2i-1,2i}^{-\nu}\varepsilon_{2i,k}\varepsilon_{2i-1,2i}^{\nu} = [\varepsilon_{k,2i}^{-\nu}, \varepsilon_{2i-1,k}]\varepsilon_{2i,k}.$$

Заметим, что при указанном сопряжении порождающие группы G_n переходят в ее элементы. Для первой и второй формул это очевидно, а для трех оставшихся — следует из того, что $k \neq 2i-1, 2i$.

Аналогичным образом, для элемента $\varepsilon_{2i,2i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, по лемме 1 справедливы следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu} = \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{k,2i-1}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu} = \varepsilon_{k,2i-1},$$

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{k,2i}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu}=\varepsilon_{k,2i-1}^{\nu}\varepsilon_{k,2i}\varepsilon_{k,2i-1}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{2i,k}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu}=\varepsilon_{k,2i-1}^{\nu}\varepsilon_{2i,k}\varepsilon_{k,2i-1}^{-\nu},$$

$$\varepsilon_{2i,2i-1}^{-\nu}\varepsilon_{2i-1,k}\varepsilon_{2i,2i-1}^{\nu}=[\varepsilon_{k,2i-1}^{-\nu},\varepsilon_{2i,k}]\varepsilon_{2i-1,k},$$

которые, как легко заметить, переводят порождающие группы G_n в ее элементы.

Следовательно, G_n нормальна в Cb_n и $Cb_n=G_nH_n$. Все соотношения группы Cb_n разбиваются на три подмножества. Первое состоит из соотношений, содержащих только порождающие группы H_n, второе — порождающие группы G_n, а третье — групп H_n и G_n одновременно. Соотношения из последнего подмножества переписаны в виде формул сопряжения порождающих группы G_n порождающими группы H_n. Отсюда и следует, что $G_n\cap H_n=1$. Теорема доказана.

Для $n=3$ получаем то же разложение, что и в теореме 1, так как

$$H_3=\text{гр}(\varepsilon_{12},\varepsilon_{21}),\quad G_3=\text{гр}(\varepsilon_{31},\varepsilon_{32},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23}),$$

а H_3, G_3 изоморфны группам D_1, D_2. При $n=4$ разложение $Cb_4=$ $=G_4\leftthreetimes H_4$ будет отличаться от разложения из теоремы 1, в этом случае

$$H_4=\text{гр}(\varepsilon_{12},\varepsilon_{21},\varepsilon_{34},\varepsilon_{43}\parallel\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}=\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij})\simeq F_2\times F_2,$$

$$G_4=\text{гр}(\varepsilon_{31},\varepsilon_{32},\varepsilon_{41},\varepsilon_{42},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23},\varepsilon_{14},\varepsilon_{24}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *В группах C_n и Cb_n при $n\geqslant 4$ неразрешима проблема вхождения в конечно порожденные подгруппы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Cb_n является подгруппой группы C_n, то предложение достаточно доказать только для первой группы. Группа Cb_4 содержит в качестве подгруппы группу $H_4\simeq F_2\times F_2$. Следовательно, в силу результата К. А. Михайловой (см. [3, гл. 4, § 4]) в Cb_4 неразрешима проблема вхождения в конечно порожденные подгрупппы. Осталось заметить, что Cb_4 является подгруппой группы Cb_n при $n\geqslant 4$. Предложение доказано.

Пусть ε_{ij} — некоторый порождающий группы Cb_n, символом ε^*_{ij} будем обозначать пару порождающих $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji}$, т. е. $\varepsilon^*_{ij} = \{\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ji}\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

ТЕОРЕМА 3. *При* $n = 2m+1$, $m = 2, 3, \ldots$, *группа* G_n *разлагается в полупрямое произведение*

$$G_n = (\ldots((K_m \leftthreetimes K_{m-1}) \leftthreetimes K_{m-2}) \leftthreetimes \ldots) \leftthreetimes K_1,$$

где

$$K_1 = \text{гр}(\varepsilon^*_{1n}, \varepsilon^*_{2n}),$$

$$\begin{aligned} K_i \;\; = \;\; & \text{гр}(\varepsilon^*_{n-2i,n-1}, \varepsilon^*_{n-2i,n-2}, \ldots, \varepsilon^*_{n-2i,n-2i+2}; \\ & \varepsilon^*_{n-2i+1,n-1}, \varepsilon^*_{n-2i+1,n-2}, \ldots, \varepsilon^*_{n-2i+1,n-2i+2}),\ 1 < i < m, \end{aligned}$$

$$K_m = \text{гр}(\varepsilon^*_{1,n-1}, \varepsilon^*_{1,n-2}, \ldots, \varepsilon^*_{1,3}; \varepsilon^*_{2,n-1}, \varepsilon^*_{2,n-2}, \ldots, \varepsilon^*_{2,3}; \varepsilon^*_{3,n}, \varepsilon^*_{4,n}, \ldots, \varepsilon^*_{n-1,n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$G_{n,j} = \text{гр}(K_m, K_{m-1}, \ldots, K_j), \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Очевидно, $G_{n,m} = K_m$, $G_{n,j-1} = \text{гр}(G_{n,j}, K_{j-1})$, $j = 2, 3, \ldots, m$, $G_{n,1} = G_n$.

Покажем, что в группе $G_{n,1} = \text{гр}(G_{n,2}, K_1)$ подгруппа $G_{n,2}$ является нормальной. Для этого проверим, куда переходят порождающие группы $G_{n,2}$ при сопряжении порождающими группы $K_1 = \text{гр}(\varepsilon^*_{1,n}, \varepsilon^*_{2,n})$. Для $\varepsilon_{i,n}$, $i = 1, 2$, из леммы 1 имеем следующие формулы сопряжения

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{in}^{\nu} = \varepsilon_{kl}, \tag{35}$$

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{in}^{\nu} = \varepsilon_{kn}, \tag{36}$$

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{in}^{\nu} = \varepsilon_{kn}^{\nu} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{kn}^{-\nu}, \tag{37}$$

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{in}^{\nu} = \varepsilon_{kn}^{\nu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kn}^{-\nu}, \tag{38}$$

$$\varepsilon_{in}^{-\nu} \varepsilon_{nk} \varepsilon_{in}^{\nu} = [\varepsilon_{kn}^{-\nu}, \varepsilon_{ik}] \varepsilon_{nk}. \tag{39}$$

Тогда группа $G_{n,2}$ порождается всеми порождающими группы Cb_n, за исключением порождающих ε^*_{1n}, ε^*_{2n} группы K_1, и $\varepsilon^*_{2i-1,2i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, группы H_n. Рассмотрим порождающий ε_{1n}. Разобьем все порождающие группы G_{n2} в объединение непересекающихся подмножеств

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{\varepsilon^*_{kl} \in G_{n,2} \mid 1 \leqslant k < l \leqslant n,\ k, l \neq 1, n\},\\
&A_2 = \{\varepsilon^*_{kn} \mid 3 \leqslant k \leqslant n-1\},\\
&A_3 = \{\varepsilon^*_{1k} \mid 3 \leqslant k \leqslant n-1\}.
\end{aligned}$$

Тогда на порождающих из A_1 элемент ε_{1n} действует по формулам (35), из A_2 — по формулам (36) и (39). При этом ε_{kn} и ε_{1k}, стоящие в правой части (39), лежат в A_2 и A_3 соответственно, а потому правая часть (39) лежит в $G_{n,2}$. На порождающих из A_3 элемент ε_{1n} действует по формулам (37) и (38). Порождающий ε_{kn}, стоящий в правых частях этих равенств, лежит в A_2, а потому — и в $G_{n,2}$. Следовательно, при сопряжении элементом ε_{1n} подгруппа $G_{n,2}$ переходит в себя. Аналогичным образом устанавливается, что и при сопряжении элементом ε_{2n} подгруппа $G_{n,2}$ переходит в себя.

Рассмотрим порождающий ε_{ni}, $i = 1, 2$, и покажем, что $\varepsilon_{ni}^{-\nu} G_{n,2} \varepsilon_{ni}^{\nu} \subseteq$ $\subseteq G_{n,2}$. По лемме 1 справедливы следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ni}^{\nu} = \varepsilon_{kl}, \tag{40}$$

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu} \varepsilon_{ki} \varepsilon_{ni}^{\nu} = \varepsilon_{ki}, \tag{41}$$

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{ni}^{\nu} = \varepsilon_{ki}^{\nu} \varepsilon_{kn} \varepsilon_{ki}^{-\nu}, \tag{42}$$

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu} \varepsilon_{nk} \varepsilon_{ni}^{\nu} = \varepsilon_{ki}^{\nu} \varepsilon_{nk} \varepsilon_{ki}^{-\nu}, \tag{43}$$

$$\varepsilon_{ni}^{-\nu} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ni}^{\nu} = [\varepsilon_{ki}^{-\nu}, \varepsilon_{nk}] \varepsilon_{ik}. \tag{44}$$

Рассмотрим далее порождающий ε_{n1} (ε_{n2} рассматривается аналогично). Используем то же разбиение порождающих группы $G_{n,2}$, что и выше. Тогда на порождающих из A_1 элемент ε_{n1} действует по формулам (40), из A_2 — по формулам (42) и (43). При этом порождающие ε_{k1}, входящие в правую часть, лежат в A_3. На порождающих из A_3 элемент ε_{n1} действует по формулам (41) и (44), а ε_{k1} и ε_{nk}, входящие в правую часть равенства (44), лежат в A_3 и A_2 соответственно, т. е. принадлежат $G_{n,2}$. Следовательно, $\varepsilon_{n1}^{-\nu} G_{n,2} \varepsilon_{n1}^{\nu} \subseteq G_{n,2}$. Таким образом, $G_{n,2}$ нормальна в $G_n = G_{n,1}$.

Покажем теперь, что подгруппа $G_{n,j}$, $3 \leqslant i \leqslant m$, нормальна в группе $G_{n,j-1} = \text{гр}(G_{n,j}, K_{j-1})$. Напомним, что

$$\begin{aligned} K_{j-1} = \text{гр}(&\varepsilon^*_{n-2j+3,n-1},\ \varepsilon^*_{n-2j+3,n-2},\ \dots,\ \varepsilon^*_{n-2j+3,n-2j+4};\\ &\varepsilon^*_{n-2j+2,n-1},\ \varepsilon^*_{n-2j+2,n-2},\ \dots,\ \varepsilon^*_{n-2j+2,n-2j+4}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{n,j} = \text{гр}(&\varepsilon^*_{kn},\ k = 3, 4, \dots, n-1;\ \varepsilon^*_{n-2i+1,n-1},\ \varepsilon^*_{n-2i+1,n-2},\ \dots,\\ &\varepsilon^*_{n-2i+1,n-2i+2},\ \varepsilon^*_{n-2i,n-1},\ \varepsilon^*_{n-2i,n-2},\ \dots,\ \varepsilon^*_{n-2i+1,n-2i+2},\\ &i = j, j+1, \dots, m).\end{aligned}$$

Рассмотрим некоторый порождающий ε_{pq}, где $p \in \{n-2j+2, n-2j+3\}$, $n-2j+4 \leqslant q \leqslant n-1$. Из леммы 1 имеем следующие формулы сопряжения

$$\varepsilon^{-\nu}_{pq}\varepsilon_{kl}\varepsilon^{\nu}_{pq} = \varepsilon_{kl}, \tag{45}$$

$$\varepsilon^{-\nu}_{pq}\varepsilon_{kq}\varepsilon^{\nu}_{pq} = \varepsilon_{kq}, \tag{46}$$

$$\varepsilon^{-\nu}_{pq}\varepsilon_{kp}\varepsilon^{\nu}_{pq} = \varepsilon^{\nu}_{kq}\varepsilon_{kp}\varepsilon^{-\nu}_{kq}, \tag{47}$$

$$\varepsilon^{-\nu}_{pq}\varepsilon_{pk}\varepsilon^{\nu}_{pq} = \varepsilon^{\nu}_{kq}\varepsilon_{pk}\varepsilon^{-\nu}_{kq}, \tag{48}$$

$$\varepsilon^{-\nu}_{pq}\varepsilon_{qk}\varepsilon^{\nu}_{pq} = [\varepsilon^{-\nu}_{kq}, \varepsilon_{pk}]\varepsilon_{qk}. \tag{49}$$

Пусть для определенности $p = n-2j+2$ (случай $p = n-2j+3$ рассматривается аналогично). Разобьем все порождающие группы $G_{n,j}$ в объединение следующих непересекающихся подмножеств

$$\begin{aligned} D^1_{pq} &= \{\varepsilon^*_{kl} \in G_{nj} \mid 1 \leqslant k < l \leqslant n,\ k, l \neq p, q\},\\ D^2_{pq} &= \{\varepsilon^*_{kq} \mid 1 \leqslant k < p\},\\ D^3_{pq} &= \{\varepsilon^*_{kp} \mid 1 \leqslant k < p\}.\end{aligned}$$

Тогда порождающий ε_{pq} действует на элементах из D^1_{pq} по формулам (45), из D^2_{pq} — по формулам (46) и (49). При этом ε_{kq} и ε_{pk}, стоящие в правой части равенства (49), лежат в D^2_{pq} и D^3_{pq} соответственно. На порождающих из D^3_{pq} элемент ε_{pq} действует по формулам (47), (48) и переводит их в элементы группы $G_{n,j}$. Следовательно, $\varepsilon^{-\nu}_{pq}G_{n,j}\varepsilon^{\nu}_{pq} \subseteq G_{n,j}$.

Рассмотрим теперь порождающий ε_{qp}, где $p \in \{n-2j+2, n-2j+3\}$, $n-2j+4 \leqslant q \leqslant n-1$. По лемме 1 имеем следующие формулы сопряжения:

$$\varepsilon^{-\nu}_{qp}\varepsilon_{kl}\varepsilon^{\nu}_{qp} = \varepsilon_{kl}, \tag{50}$$

$$\varepsilon_{qp}^{-\nu}\varepsilon_{kp}\varepsilon_{qp}^{\nu}=\varepsilon_{kp}, \tag{51}$$

$$\varepsilon_{qp}^{-\nu}\varepsilon_{kq}\varepsilon_{qp}^{\nu}=\varepsilon_{kp}^{\nu}\varepsilon_{kq}\varepsilon_{kp}^{-\nu}, \tag{52}$$

$$\varepsilon_{qp}^{-\nu}\varepsilon_{qk}\varepsilon_{qp}^{\nu}=\varepsilon_{kp}^{\nu}\varepsilon_{qk}\varepsilon_{kp}^{-\nu}, \tag{53}$$

$$\varepsilon_{qp}^{-\nu}\varepsilon_{pk}\varepsilon_{qp}^{\nu}=[\varepsilon_{kp}^{-\nu},\varepsilon_{qk}]\varepsilon_{pk}. \tag{54}$$

Пусть для определенности $p=n-2j+2$ (случай $p=n-2j+3$ рассматривается аналогично). Элемент ε_{qp} действует на порождающих из D_{pq}^1 по формулам (50), на порождающих из D_{pq}^2 — по формулам (52) и (53). При этом ε_{kp}, входящие в правую часть, лежат в D_{pq}^3. Наконец, на D_{pq}^3 элемент ε_{qp} действует по формулам (51) и (54), а элементы ε_{kp} и ε_{qk}, входящие в правую часть равенства (54), лежат в D_{pq}^3 и D_{pq}^2 соответственно.

Таким образом, G_{nj} нормальна в $G_{n,j-1}$. Из генетического кода группы $G_{n,j-1}$ видно, что $G_{nj}\cap K_{j-1}=1$. Следовательно, $G_{n,j-1}=G_{nj}\leftthreetimes K_{j-1}$. Используя индукцию по m, получим требуемое разложение группы G_n. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *При $n=2m$, $m=2,3,\ldots$, группа G_n разлагается в полупрямое произведение*

$$G_n=(\ldots((L_m\leftthreetimes L_{m-1})\leftthreetimes L_{m-2})\leftthreetimes\ldots)\leftthreetimes L_2,$$

где

$$L_i=\text{гр}(\varepsilon_{n-2i+1,n}^*,\ \varepsilon_{n-2i+1,n-1}^*,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-2i+1,n-2i+3}^*,\ \varepsilon_{n-2i+2,n}^*,$$
$$\varepsilon_{n-2i+2,n-1}^*,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-2i+2,n-2i+3}^*),\ 2\leqslant i\leqslant m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_{n,j}=\text{гр}(L_m,K_{m-1},\ldots,L_j)$, $j=2,3,\ldots,m$. Так же, как и в теореме 3, проверяется, что подгруппа G_{nj} нормальна в группе $G_{n,j-1}$, а из генетического кода группы $G_{n,j-1}$ вытекает, что $G_{nj}\cap L_{j-1}=1$. Следовательно, $G_{n,j-1}=G_{nj}\leftthreetimes L_{j-1}$. Используя индукцию по m, получим требуемое разложение группы G_n. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность О. В. Богопольскому, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний, а также Дж. Мейеру, указавшего на работу [9] и некоторые неточности в первоначальной версии статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *D. Z. Djokovic*, The structure of the automorphism group of a free group on two generators, Proc. Am. Math. Soc., **88**, N 2 (1983), 218—220.
2. *Г. Т. Козлов*, Строение группы $\mathrm{Aut}(F_2)$, Алгебра, логика и приложения, Иркутск, Иркутский гос. ун-т, 1994, 28—32.
3. *Р. Линдон, П. Шупп*, Комбинаторная теория групп, М., Мир, 1980.
4. *S. Krstic, J. McCool*, The non-finite presentability of $\mathrm{IA}(F_3)$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, Invent. Math., **129**, N 3 (1997), 595—606.
5. *J. McCool*, On basis-conjugating automorphisms of free groups, Can. J. Math., **38**, N 6 (1986), 1525—1529.
6. *А. Г. Савушкина*, О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы, Матем. заметки, **60**, N 1 (1996), 92—108.
7. *А. А. Марков*, Основы алгебраической теории кос, Тр. Матем. ин-та АН, **16**, 1945, 1—54.
8. *J. S. Birman*, Braids, links and mapping class group, Princeton–Tokyo, Univ. press, 1974.
9. *D. J. Collins, N. D. Gilbert*, Structure and torsion in automorphism groups of free products, Quart. J. Math. Oxford, **41**, N 162 (1990), 155—178.
10. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 15-е изд., Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2002.
11. *М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков*, Основы теории групп, 4-е изд., М., Наука, 1996.
12. *H. Servatius*, Automorphisms of graph groups, J. Algebra, **126**, N 1 (1989), 34—60.
13. *H. Servatius, C. Droms, B. Servatius*, Surface subgroups of graph groups, Proc. Am. Math. Soc., **106**, N 3 (1989), 573—578.
14. *В. Г. Бардаков*, Ширина вербальных подгрупп некоторых групп Артина, групповые и метрические свойства отображений: сб. работ, посв. памяти Ю. И. Мерзлякова, Новосибирск, Новосибирский гос. ун-т, 1995, 8—18.
15. *Г. С. Коксетер, У. О. Мозер*, Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп, М., Наука, 1980.
16. *Ю. И. Мерзляков*, Рациональные группы, 2-е изд., М., Наука, 1987.

17. *В. Г. Бардаков*, О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций, Алгебра и логика, **36**, N 5 (1997), 494—517.

18. *A. H. Rhemtulla*, A problem of bounded expressibility in free products, Proc. Camb. Philos. Soc., **64**, N 3 (1969), 573—584.

19. *В. Г. Бардаков*, К теории групп кос, Матем. сб., **183**, N 6 (1992), 3—42.

Адрес автора:

Поступило 7 декабря 2001 г.

БАРДАКОВ Валерий Георгиевич,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
пр. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН.
e-mail: bardakov@math.nsc.ru